THE LIBRARY OF CONGRESS
1800

Class AS182

Book .B35

SMITHSONIAN DEPOSIT

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

JAHRGANG 1925

PHYSIKALISCH-MATHEMATISCHE KLASSE

VERZEICHNIS DER MITGLIEDER DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN AM 1. JANUAR 1925
ÖFFENTLICHE SITZUNG ZUR FEIER DES JAHRESTAGES KÖNIG FRIEDRICHS II. AM 22. JANUAR 1925
ÖFFENTLICHE SITZUNG ZUR FEIER DES LEIBNIZISCHEN JAHRESTAGES AM 2. JULI 1925
VERZEICHNIS DER VOM 1. DEZEMBER 1924 BIS 30. NOVEMBER 1925 EINGEGANGENEN DRUCKSCHRIFTEN

STÜCK I—XXXIV. MIT FÜNF TAFELN

Library of Congress
MAY 10 1926
Smithsonian Deposit

BERLIN 1925
VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

AS 182
.B35

INHALT

Seite

Inhalt

1925 I. II

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

Library of Congress
AUG 27 1925
Smithsonian Deposit

BERLIN 1925

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang einer aufzunehmenden Mitteilung soll in der Regel in den Sitzungsberichten bei Mitgliedern 32, bei Nichtmitgliedern 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte, in den Abhandlungen 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Abhandlungen nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 200 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1925

I. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 8. Januar.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Keibel spricht im Anschluß an seinen Vortrag vom 28. Februar 1924 »Zum Kopfproblem« über Mesomerie, Branchiomerie und die Metamerie des peripheren Nervensystems bei den Wirbeltieren. (Ersch. später.)

Er kommt zu dem Schlusse, daß die Branchiomerie unabhängig von der Mesomerie entstanden ist und daß der Zustand mit wenigen Kiementaschen und Bogen primitiver ist als der mit vielen.

Bei den Embryonen von Petromyzon fluviatilis sind in der Reihe weder Anlagen von Somiten ausgefallen noch Kiementaschen. Auch ist keines der Somite, auch das dritte nicht, durch die Verschmelzung zweier ursprünglich selbständiger Somite entstanden.

Soweit die Mitteilung auf eigenen Beobachtungen beruht, sind diese an Embryonen von Petromyzon fluviatilis angestellt.

Sein Petromyzonmaterial verdankt er den HH. Carl in Magdeburg, G. W. Wolff in Kolberg, Kuhlmey in Werdermühle, Dr. Willer in Königsberg, Schikora in Berlin und Frl. Dr. Cords in Königsberg.

Von Hrn. Prof. Kingsbury in Ithaca U. S. A. erhielt er Material von einem amerikanischen Petromyzon, aus Neapel solches von Petromyzon Planeri.

Seinem Assistenten Hrn. Prof. Weissenberg und Frl. Winkler hat er für ihre Hilfe bei der Aufzucht der Embryonen und der Bearbeitung des Materials zu danken.

2. Hr. Einstein legte eine Arbeit über die Quantentheorie des einatomigen idealen Gases (zweite Abhandlung) vor.

Die früher von mir entwickelte Theorie der Gasentartung wird weiter durchgeführt. Dabei zeigt sich, daß es bei jeder Temperatur eine Sättigungsdichte des idealen Gases gibt, derart, daß die gegenüber dieser Dichte überzähligen Moleküle an der thermischen Agitation nicht teilnehmen. Die statistischen Eigenschaften (Dichte — Schwankungen) werden untersucht. Die Zustandsgleichung wird diskutiert, und eine bequeme Näherungsgleichung für sie wird angegeben.

3. Hr. Correns legte 2 Abhandlungen von Hrn. Prof. Felix Bernstein in Göttingen, Institut für mathematische Statistik, vor:

1. Beiträge zur Mendelistischen Anthropologie I. Quantitative Rassenanalyse auf Grund von statistischen Beobachtungen über den Klangcharakter der Singstimme.

Frühere Untersuchungen des Verfassers und seiner Mitarbeiter hatten gezeigt, daß der Klangcharakter der menschlichen Singstimme durch ein mendelndes Genpaar A, a so bestimmt ist, daß die Genformel AA Baß bzw. Sopran, die Genformel Aa Bariton bzw. Mezzosopran, die Genformel aa Tenor bzw. Alt bedingt. Bei statistischer Kenntnis der drei Stimmgruppen in

einer durchgemischten Bevölkerung lassen sich die Prozentsätze der reinen Rassen (Baß–Sopran- und Tenor–Alt-Rasse) berechnen. Statistische Untersuchungen in Italien und Deutschland zeigen danach für die Baß–Sopran-Rasse die Prozentsätze: Palermo 12.4; Messina 12.5; Reggio 13.8; Pisa 16.6; Trier (katholisch) 56.3; Göttingen 60.2; Husum 62.0; Rendsburg 58.6; Schleswig 56.0; Flensburg 52.8; Stolp 56.5; Schivelbein 55.1. Die Baß–Sopran-Rasse wird im wesentlichen als identisch mit der nordischen Rasse von A. Retzius angenommen und die Beziehung der Ergebnisse zu den historisch bekannten Wanderungen und Siedlungen besprochen.

2. Beiträge zur Mendelistischen Anthropologie II. Quantitative Rassenzerlegung auf Grund von statistischen Beobachtungen über den Drehsinn des Kopfhaarwirbels.

Der Drehsinn des hinteren menschlichen Kopfhaarwirbels, der sich, von innen nach außen verfolgt, als Rechts- (—) oder Links-Drehsinn (+) darstellt, wird nach Beobachtungen an 41 Familien mit 134 Kindern durch ein einfaches Mendelsches Genpaar *R*, *r* bestimmt. Rechtsdrehsinn ist dominant über Linksdrehsinn. Unter den auftretenden Mehrfachbildungen werden die »polaren« Doppelwirbel, deren Komponenten (von links nach rechts) den Drehsinn —+ und +— aufweisen, durch ein zweites Genpaar *D*, *d* bestimmt, wobei »Auftreten des Doppelwirbels »rezessiv gegen« Nichtauftreten« ist, und die *Rr*-Konstitution den Drehsinn der linken Komponente bestimmt. Auf Grund statistischer Beobachtungen in Göttingen, Mühlhausen, Langensalza, Kissingen, Iserlohn, Flensburg, Schleswig, Husum, Rendsburg, Stolp und Schivelbein wurde die Zerlegung in die reinen Rassen *RR* und *rr* vorgenommen. Der Vergleich mit den Singstimmenzerlegungen legt die Annahme nahe, daß der Rechtsdrehsinn ein Merkmal der Baß–Sopran-Rasse war, und daß sich also hier eine unabhängige Bestimmung des quantitativen Anteils der Baß–Sopran-Rasse bzw. nordischen Rasse an der Bevölkerung ergibt.

Quantentheorie des einatomigen idealen Gases.

Zweite Abhandlung.

Von A. Einstein.

In einer neulich in diesen Berichten (XXII 1924, S. 261) erschienenen Abhandlung wurde unter Anwendung einer von Hrn. D. Bose zur Ableitung der Planckschen Strahlungsformel erdachten Methode eine Theorie der »Entartung« idealer Gase angegeben. Das Interesse dieser Theorie liegt darin, daß sie auf die Hypothese einer weitgehenden formalen Verwandtschaft zwischen Strahlung und Gas gegründet ist. Nach dieser Theorie weicht das entartete Gas von dem Gas der mechanischen Statistik in analoger Weise ab wie die Strahlung gemäß dem Planckschen Gesetze von der Strahlung gemäß dem Wienschen Gesetze. Wenn die Bosesche Ableitung der Planckschen Strahlungsformel ernst genommen wird, so wird man auch an dieser Theorie des idealen Gases nicht vorbeigehen dürfen; denn wenn es gerechtfertigt ist, die Strahlung als Quantengas aufzufassen, so muß die Analogie zwischen Quantengas und Molekülgas eine vollständige sein. Im folgenden sollen die früheren Überlegungen durch einige neue ergänzt werden, die mir das Interesse an dem Gegenstande zu steigern scheinen. Der Bequemlichkeit halber schreibe ich das Folgende formal als Fortsetzung der zitierten Abhandlung.

§ 6. Das gesättigte ideale Gas.

Bei der Theorie des idealen Gases scheint es eine selbstverständliche Forderung, daß Volumen und Temperatur einer Gasmenge willkürlich gegeben werden können. Die Theorie bestimmt dann die Energie bzw. den Druck des Gases. Das Studium der in den Gleichungen (18), (19), (20), (21) enthaltenen Zustandsgleichung zeigt aber, daß bei gegebener Molekülzahl n und gegebener Temperatur T das Volumen nicht beliebig klein gemacht werden kann. Gleichung (18) verlangt nämlich, daß für alle s $\alpha^s \geqq 0$ sei, was gemäß (20) bedeutet, daß $A \geqq 0$ sein muß. Dies bedeutet, daß in der in diesem Falle gültigen Gleichung (18b) λ $(= e^{-A})$ zwischen 0 und 1 liegen muß. Aus (18b) folgt demnach, daß die Zahl der Moleküle in einem solchen Gas bei gegebenem Volumen V nicht größer sein kann als

$$n = \frac{(2\pi m \varkappa T)^{\frac{3}{2}} V}{h^3} \sum_s^{\infty} \tau^{-\frac{3}{2}}. \qquad (24)$$

Was geschieht nun aber, wenn ich bei dieser Temperatur $\frac{n}{V}$ (z. B. durch isothermische Kompression) die Dichte der Substanz noch mehr wachsen lasse?

Ich behaupte, daß in diesem Falle eine mit der Gesamtdichte stets wachsende Zahl von Molekülen in den 1. Quantenzustand (Zustand ohne kinetische Energie) übergeht, während die übrigen Moleküle sich gemäß dem Parameterwert $\lambda = 1$ verteilen. Die Behauptung geht also dahin, daß etwas Ähnliches eintritt wie beim isothermen Komprimieren eines Dampfes über das Sättigungsvolumen. Es tritt eine Scheidung ein; ein Teil »kondensiert«, der Rest bleibt ein »gesättigtes ideales Gas« ($A = 0$ $\lambda = 1$).

Daß die beiden Teile in der Tat ein thermodynamisches Gleichgewicht bilden, sieht man ein, indem man zeigt, daß die »kondensierte« Substanz und das gesättigte ideale Gas pro Mol dieselbe Plancksche Funktion $\Phi = S - \frac{\bar{E} + pV}{T}$ haben. Für die »kondensierte« Substanz verschwindet Φ, weil S, E und V einzeln verschwinden[1]. Für das »gesättigte Gas« hat man nach (12) und (13) für $A = 0$ zunächst

$$S = -\varkappa \sum_s \lg\left(1 - e^{-\alpha^s}\right) + \frac{\bar{E}}{T}. \tag{25}$$

Die Summe kann man als Integral schreiben und durch partielle Integration umformen. Man erhält so zunächst

$$\sum_s = -\int_0^\infty s \cdot \frac{e^{-\frac{c s^{\frac{2}{3}}}{\varkappa T}}}{1 - e^{-\frac{c s^{\frac{2}{3}}}{\varkappa T}}} \cdot \frac{2}{3} \frac{c s^{-\frac{1}{3}}}{\varkappa T} ds,$$

oder gemäß (8) und (11) und (15)

$$\sum_s = -\frac{2}{3} \int_0^\infty n_s E^s ds = -\frac{2}{3} \frac{\bar{E}}{\varkappa T} = -\frac{pV}{\varkappa T}. \tag{26}$$

Aus (25) und (26) folgt also für das »gesättigte ideale Gas«

$$S = \frac{\bar{E} + pV}{T}$$

oder — wie es für die Koexistenz des gesättigten idealen Gases mit der kondensierten Substanz erforderlich ist —

$$\Phi = 0. \tag{27}$$

Wir gewinnen also den Satz:

Nach der entwickelten Zustandsgleichung des idealen Gases gibt es bei jeder Temperatur eine maximale Dichte in Agitation befindlicher Moleküle.

[1] Der »kondensierte« Teil der Substanz beansprucht kein besonderes Volumen, da er zum Druck nichts beiträgt.

Bei Überschreitung dieser Dichte fallen die überzähligen Moleküle als unbewegt aus (»kondensieren« ohne Anziehungskräfte). Das Merkwürdige liegt darin, daß das »gesättigte ideale Gas« sowohl den Zustand maximaler möglicher Dichte bewegter Gasmoleküle als auch diejenige Dichte repräsentiert, bei welcher das Gas mit dem »Kondensat« im thermodynamischen Gleichgewicht ist. Ein Analogon zum »übersättigten Dampf« existiert also beim idealen Gas nicht.

§ 7. Vergleich der entwickelten Gastheorie mit derjenigen, welche aus der Hypothese von der gegenseitigen statistischen Unabhängigkeit der Gasmoleküle folgt.

Von Hrn. EHRENFEST und anderen Kollegen ist an BOSES Theorie der Strahlung und an meiner analogen der idealen Gase gerügt worden, daß in diesen Theorien die Quanten bzw. Moleküle nicht als voneinander statistisch unabhängige Gebilde behandelt werden, ohne daß in unseren Abhandlungen auf diesen Umstand besonders hingewiesen worden sei. Dies ist völlig richtig. Wenn man die Quanten als voneinander statistisch unabhängig in ihrer Lokalisierung behandelt, gelangt man zum WIENschen Strahlungsgesetz; wenn man die Gasmoleküle analog behandelt, gelangt man zur klassischen Zustandsgleichung der idealen Gase, auch wenn man im übrigen genau so vorgeht, wie BOSE und ich es getan haben. Ich will die beiden Betrachtungen für Gase einander hier gegenüberstellen, um den Unterschied recht deutlich zu machen, und um unsere Resultate mit denen der Theorie von unabhängigen Molekülen bequem vergleichen zu können.

Gemäß beiden Theorien ist die Zahl z_ν der »Zellen«, welche zu dem infinitesimalen Gebiet ΔE der Molekülenergie (im folgenden »Elementargebiet« genannt) gehören, gegeben durch

$$z_\nu = 2\pi \frac{V}{h^3}(2m)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{1}{2}} \Delta E . \qquad (2a)$$

Der Zustand des Gases sei (makroskopisch) dadurch definiert, daß angegeben wird, wie viele Moleküle n_ν in einem jeden solchen infinitesimalen Bereich liegen. Man soll die Zahl W der Realisierungsmöglichkeiten (PLANCKsche Wahrscheinlichkeit) des so definierten Zustandes berechnen,

a) nach BOSE:

Ein Zustand ist mikroskopisch dadurch definiert, daß angegeben wird, wie viele Moleküle in jeder Zelle sitzen (Komplexion). Die Zahl der Komplexionen für das ν-te infinitesimale Gebiet ist dann

$$\frac{(n_\nu + z_\nu - 1)!}{n_\nu!\,(z_\nu - 1)!} . \qquad (28)$$

Durch Produktbildung über alle infinitesimalen Gebiete erhält man die Gesamtzahl der Komplexionen eines Zustandes und daraus nach dem BOLTZMANNschen Satze die Entropie

$$S = \varkappa \sum_\nu \left\{ (n_\nu + z_\nu) \lg (n_\nu + z_\nu) - n_\nu \lg n_\nu - z_\nu \lg z_\nu \right\} . \qquad (29a)$$

Daß bei dieser Rechnungsweise die Verteilung der Moleküle unter die Zellen nicht als eine statistisch unabhängige behandelt ist, ist leicht einzusehen. Es hängt dies damit zusammen, daß die Fälle, welche hier »Komplexionen« heißen, nach der Hypothese der unabhängigen Verteilung der einzelnen Moleküle unter die Zellen, nicht als Fälle gleicher Wahrscheinlichkeit anzusehen wären. Die Abzählung dieser »Komplexionen« verschiedener Wahrscheinlichkeit würde dann bei tatsächlicher statistischer Unabhängigkeit der Moleküle die Entropie nicht richtig ergeben. Die Formel drückt also indirekt eine gewisse Hypothese über eine gegenseitige Beeinflussung der Moleküle von vorläufig ganz rätselhafter Art aus, welche eben die gleiche statistische Wahrscheinlichkeit der hier als »Komplexionen« definierten Fälle bedingt.

b) nach der Hypothese der statistischen Unabhängigkeit der Moleküle:

Ein Zustand ist mikroskopisch dadurch definiert, daß von jedem Molekül angegeben wird, in welcher Zelle es sitzt (Komplexion). Wie viele Komplexionen gehören zu einem makroskopisch definierten Zustand? Ich kann n_ν bestimmte Moleküle auf

$$z_\nu^{n_\nu}$$

verschiedene Weisen auf die z_ν Zellen des ν-ten Elementargebietes verteilen. Ist die Zuteilung der Moleküle auf die Elementargebiete schon in bestimmter Weise vorgenommen, so gibt es also im ganzen

$$\prod (z_\nu^{n_\nu})$$

verschiedene Verteilungen der Moleküle über alle Zellen. Um die Zahl der Komplexionen im definierten Sinne zu erhalten, muß nun dieser Betrag noch multipliziert werden mit der Anzahl

$$\frac{n!}{\prod n_\nu!}$$

der möglichen Zuordnungen aller Moleküle an die Elementargebiete bei gegebenen n_ν. Das Boltzmannsche Prinzip ergibt dann für die Entropie den Ausdruck

$$S = \varkappa \left\{ n \lg n + \sum_\nu (n_\nu \lg z_\nu - n_\nu \lg n_\nu) \right\}. \qquad (29\text{b})$$

Das erste Glied dieses Ausdruckes hängt nicht von der Wahl der makroskopischen Verteilung ab, sondern nur von der Gesamtzahl der Moleküle. Bei der Vergleichung der Entropien verschiedener makroskopischer Zustände desselben Gases spielt dies Glied die Rolle einer belanglosen Konstante, welche wir weglassen können. Wir müssen sie weglassen, wenn wir — wie es in der Thermodynamik üblich ist — erreichen wollen, daß die Entropie bei gegebenem innerem Zustand des Gases der Anzahl der Moleküle proportional sei. Wir haben also

$$S = \varkappa \sum_\nu n_\nu (\lg z_\nu - \lg n_\nu) \qquad (29\text{c})$$

zu setzen. Man pflegt dies Weglassen des Faktors $n!$ in W bei Gasen gewöhnlich dadurch zu begründen, daß man Komplexionen, die aus einander

durch bloßes Vertauschen gleichartigen Molekülen entstehen, nicht als verschieden betrachtet und deshalb nur einmal rechnet.

Nun haben wir für beide Fälle das Maximum von S aufzusuchen unter den Nebenbedingungen

$$\bar{E} = \sum E_\nu n_\nu = \text{konst.}$$

$$n = \sum n_\nu \quad = \text{konst.}$$

Im Falle a) ergibt sich:

$$n_\nu = \frac{z_\nu}{e^{\alpha + \beta E} - 1}, \tag{30a}$$

was abgesehen von der Bezeichnungsweise mit (13) übereinstimmt. Im Falle b) ergibt sich

$$n_\nu = z_\nu e^{-\alpha - \beta E}. \tag{30b}$$

In beiden Fällen ist hierbei $\beta \varkappa T = 1$.

Man sieht ferner, daß im Falle b) das MAXWELLsche Verteilungsgesetz herauskommt. Die Quantenstruktur macht sich hier nicht bemerkbar (wenigstens nicht bei unendlich großem Gesamtvolumen des Gases). Man sieht nun leicht, daß Fall b) mit dem NERNSTschen Theorem unvereinbar ist. Um nämlich den Wert der Entropie beim absoluten Nullpunkt der Temperatur für diesen Fall zu berechnen, hat man (29c) für den absoluten Nullpunkt zu berechnen. Bei diesem werden sich alle Moleküle im ersten Quantenzustand befinden. Wir haben also

$$n_\nu = 0 \text{ für } \nu \neq 1$$

$$n_1 = n$$

$$z_1 = 1$$

zu setzen. (29c) liefert also für $T = 0$

$$S = -n \lg n. \tag{31}$$

Es ist also bei der Berechnungsweise b) ein Widerspruch gegen die Aussage des NERNSTschen Theorems vorhanden. Dagegen steht die Berechnungsweise a) mit dem NERNSTschen Theorem im Einklang, wie man sofort sieht, wenn man bedenkt, daß beim absoluten Nullpunkt im Sinne der Berechnungsweise a) nur eine einzige Komplexion vorhanden ist ($W = 1$). Die Betrachtungsweise b) führt nach dem Dargelegten entweder zu einem Verstoß gegen das NERNSTsche Theorem oder zu einem Verstoß gegen die Forderung, daß die Entropie bei gegebenem innerem Zustand der Molekülzahl proportional sein muß. Aus diesen Gründen glaube ich, daß der Berechnungsweise a) (d. h. BOSES statistischem Ansatz) der Vorzug gegeben werden muß, wenn sich die Bevorzugung dieser Berechnungsweise anderen gegenüber auch nicht a priori erweisen läßt. Dies Ergebnis bildet seinerseits eine Stütze für die Auffassung von der tiefen Wesensverwandtschaft zwischen Strahlung und Gas, indem dieselbe statistische Betrachtungsweise, welche zur PLANCKschen Formel führt, in ihrer Anwendung auf ideale Gase die Übereinstimmung der Gastheorie mit dem NERNSTschen Theorem herstellt.

§ 8. Die Schwankungseigenschaften des idealen Gases.

Ein Gas vom Volumen V kommuniziere mit einem solchen gleicher Natur von unendlich großem Volumen. Beide Volumina seien durch eine Wand getrennt, welche nur Moleküle vom infinitesimalen Energiegebiet ΔE durchlassen, Moleküle von anderer kinetischer Energie aber reflektiert. Die Fiktion einer solchen Wand ist der der quasi-monochromatisch durchlässigen Wand auf dem Gebiete der Strahlungstheorie analog. Es wird nach der Schwankung Δ_ν der Molekülzahl n_ν gefragt, welche zu dem Energiegebiet ΔE gehört. Dabei wird angenommen, daß ein Energieaustausch zwischen Molekülen verschiedener Energiegebiete innerhalb V nicht stattfinde, so daß Schwankungen von Molekülzahlen, die zu Energien außerhalb ΔE gehören, nicht stattfinden mögen.

Sei n_ν der Mittelwert der zu ΔE gehörigen Moleküle, $n_\nu + \Delta_\nu$ der Momentanwert. Dann liefert (29a) den Wert der Entropie in Funktion von Δ_ν, indem man in diese Gleichung $n_\nu + \Delta_\nu$ statt n_ν einsetzt. Geht man bis zu quadratischen Gliedern, so erhält man

$$S = \bar{S} + \overline{\frac{\partial S}{\partial \Delta_\nu}} \Delta_\nu + \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial^2 S}{\partial \Delta_\nu^2}} \Delta_\nu^2 .$$

Eine ähnliche Relation gilt für das unendlich große Restsystem, nämlich

$$S^\circ = \bar{S}^\circ - \overline{\frac{\partial S^x}{\partial \Delta_\nu}} \Delta_\nu .$$

Das quadratische Glied ist hier relativ unendlich klein wegen der relativ unendlichen Größe des Restsystems. Bezeichnet man die Gesamtentropie mit $\sum (= S + S^\circ)$, so ist $\overline{\frac{\partial \sum}{\partial \Delta_\nu}} = 0$, weil im Mittel Gleichgewicht besteht. Man erhält also für die Gesamtentropie durch Addition dieser Gleichungen die Relation

$$\sum = \overline{\sum} + \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial^2 S}{\partial \Delta_\nu^2}} \Delta_\nu^2 . \tag{32}$$

Nach dem Boltzmannschen Prinzip erhält man hieraus für die Wahrscheinlichkeit der Δ_ν das Gesetz

$$dW = \text{konst}\, e^{\frac{S}{\varkappa}} d\Delta_\nu = \text{konst}\, e^{\frac{1}{2\varkappa} \overline{\frac{\partial^2 S}{\partial \Delta_\nu^2}} \Delta_\nu^2} d\Delta_\nu .$$

Hieraus folgt für das mittlere Schwankungsquadrat

$$\overline{\Delta_\nu^2} = \frac{\varkappa}{\left(-\overline{\frac{\partial^2 S}{\partial \Delta_\nu^2}}\right)} . \tag{33}$$

Hieraus ergibt sich mit Rücksicht auf (29a)

$$\overline{\Delta_\nu^2} = n_\nu + \frac{n_\nu^2}{z_\nu} . \tag{34}$$

Dies Schwankungsgesetz ist dem der quasi-monochromatischen PLANCKschen Strahlung vollkommen analog. Wir schreiben es in der Form

$$\overline{\left(\frac{\Delta_\nu}{n_\nu}\right)^2} = \frac{1}{n_\nu} + \frac{1}{z_\nu}. \tag{34a}$$

Das Quadrat der mittleren relativen Schwankung der Moleküle der hervorgehobenen Art setzt sich aus zwei Summanden zusammen. Der erste wäre allein vorhanden, wenn die Moleküle voneinander unabhängig wären. Dazu kommt ein Anteil des mittleren Schwankungsquadrates, der von der mittleren Moleküldichte gänzlich unabhängig ist und nur durch das Elementargebiet ΔE und das Volumen bestimmt ist. Er entspricht bei der Strahlung den Interferenzschwankungen. Man kann ihn auch beim Gase in entsprechender Weise deuten, indem man dem Gase in passender Weise einen Strahlungsvorgang zuordnet und dessen Interferenz-Schwankungen berechnet. Ich gehe näher auf diese Deutung ein, weil ich glaube, daß es sich dabei um mehr als um eine bloße Analogie handelt.

Wie einem materiellen Teilchen bzw. einem System von materiellen Teilchen ein (skalares) Wellenfeld zugeordnet werden kann, hat Hr. E. DE BROGLIE in einer sehr beachtenswerten Schrift[1] dargetan. Einem materiellen Teilchen von der Masse m wird zunächst eine Frequenz ν_0 zugeordnet gemäß der Gleichung

$$mc^2 = h\nu_0. \tag{35}$$

Das Teilchen ruhe nun in bezug ein galileisches System K', in welchem wir eine überall synchrone Schwingung von der Frequenz ν_0 denken. Relativ zu einem System K, in bezug auf welches K' mit der Masse m mit der Geschwindigkeit v längs der (positiven) X-Achse bewegt ist, existiert dann ein wellenartiger Vorgang von der Art

$$\sin\left(2\pi\nu_0 \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right).$$

Frequenz ν und Phasengeschwindigkeit V dieses Vorgangs sind also gegeben durch

$$\nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{36}$$

$$V = \frac{c^2}{v} \tag{37}$$

[1] LOUIS DE BROGLIE. Thèses. Paris. (Edit. Musson & Co.), 1924. In dieser Dissertation findet sich auch eine sehr bemerkenswerte geometrische Interpretation der BOHR-SOMMERFELDschen Quantenregel.

v ist dann — wie Hr. de Broglie gezeigt hat — zugleich die Gruppengeschwindigkeit dieser Welle. Es ist ferner interessant, daß die Energie $\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ des Teilchens gemäß (35) und (36) gerade gleich $h\nu$ ist, im Einklang mit der Grundrelation der Quantentheorie.

Man sieht nun, daß so einem Gase ein skalares Wellenfeld zugeordnet werden kann, und ich habe mich durch Rechnung davon überzeugt, daß $\frac{1}{Z_\nu}$ das mittlere Schwankungsquadrat dieses Wellenfeldes ist, soweit es dem von uns oben untersuchten Energiebereich ΔE entspricht.

Diese Überlegungen werfen Licht auf das Paradoxon, auf welches am Ende meiner ersten Abhandlung hingewiesen ist. Damit zwei Wellenzüge merkbar interferieren können, müssen sie bezüglich V und ν nahezu übereinstimmen. Dazu ist gemäß (35), (36), (37) nötig, daß v sowie m für beide Gase nahezu übereinstimmen. Die zwei Gasen von merklich verschiedener Molekülmasse zugeordneten Wellenfelder können daher nicht merklich miteinander interferieren. Daraus kann man folgern, daß sich gemäß der hier vorliegenden Theorie die Entropie eines Gasgemisches genau so additiv aus derjenigen der Gemischbestandteile zusammensetzt wie gemäß der klassischen Theorie, wenigstens solange die Molekulargewichte der Komponenten einigermaßen voneinander abweichen.

§ 9. Bemerkung über die Viskosität der Gase bei tiefen Temperaturen.

Nach den Betrachtungen des vorigen Paragraphen scheint es, daß mit jedem Bewegungsvorgang ein undulatorisches Feld verknüpft sei, ebenso wie mit der Bewegung der Lichtquanten das optische undulatorische Feld verknüpft ist. Dies undulatorische Feld — dessen physikalische Natur einstweilen noch dunkel ist, muß sich im Prinzip nachweisen lassen durch die ihm entsprechenden Bewegungserscheinungen. So müßte ein Strahl von Gasmolekülen, der durch eine Öffnung hindurchgeht, eine Beugung erfahren, die der eines Lichtstrahles analog ist. Damit ein derartiges Phänomen beobachtbar sei, muß die Wellenlänge λ einigermaßen vergleichbar sein mit den Dimensionen der Öffnung. Aus (35), (36) und (37) folgt nun für gegen c kleine Geschwindigkeiten

$$\lambda = \frac{V}{\nu} = \frac{h}{mv}. \tag{38}$$

Dies λ ist für Gasmoleküle, die sich mit thermischen Geschwindigkeiten bewegen, stets außerordentlich klein, sogar meist erheblich kleiner als der Moleküldurchmesser σ. Daraus folgt zunächst, daß an die Beobachtung dieser Beugung an herstellbaren Öffnungen bzw. Schirmen gar nicht zu denken ist.

Es zeigt sich aber, daß bei tiefen Temperaturen für die Gase Wasserstoff und Helium λ von der Größenordnung von σ wird, und es scheint in der Tat, daß sich beim Reibungskoeffizienten der Einfluß geltend mache, den wir nach der Theorie erwarten müssen.

Trifft nämlich ein Schwarm mit der Geschwindigkeit v bewegter Moleküle ein anderes Molekül, das wir uns der Bequemlichkeit halber als unbewegt vorstellen, so ist dies vergleichbar mit dem Fall, daß ein Wellenzug von gewisser Wellenlänge λ ein Blättchen von dem Durchmesser 2σ trifft. Es tritt dabei eine (Fraunhofersche) Beugungserscheinung ein, welche gleich ist jener, die von einer gleich großen Öffnung geliefert würde. Große Beugungswinkel treten dann auf, wenn λ von der Größenordnung σ oder größer ist. Es werden also außer der nach der Mechanik auftretenden Stoßablenkung dann auch noch mechanisch nicht begreifbare Ablenkungen der Moleküle von ähnlicher Häufigkeit wie erstere auftreten, welche die freie Weglänge verkleinern. Es wird also in der Nähe jener Temperatur ziemlich plötzlich ein beschleunigtes Sinken der Viskosität mit sinkender Temperatur einsetzen. Eine Abschätzung jener Temperatur gemäß der Beziehung $\lambda = \sigma$ liefert für H_2 56°, für He 40°. Natürlich sind dies ganz rohe Schätzungen; dieselben können aber durch exaktere Rechnungen ersetzt werden. Es handelt sich hier um eine neue Deutung der von P. GÜNTHER auf NERNSTS Veranlassung bei Wasserstoff gewonnenen experimentellen Ergebnisse über die Abhängigkeit des Viskositätskoeffizienten von der Temperatur, zu deren Erklärung NERNST bereits eine quantentheoretische Betrachtung ersonnen hat[1].

§ 10. Zustandsgleichung des gesättigten idealen Gases. Bemerkungen zur Theorie der Zustandsgleichung der Gase und zur Elektronentheorie der Metalle.

Im § 6 wurde gezeigt, daß für ein mit »kondensierter Substanz« im Gleichgewicht befindliches ideales Gas der Entartungsparameter λ gleich 1 ist. Konzentration, Energie und Druck des mit Bewegung ausgestatteten Teiles der Moleküle sind dann gemäß (18b), (22) und (15) durch T allein bestimmt. Es gelten also die Gleichungen

$$\eta = \frac{n}{NV} = \frac{2.615}{Nh^3}(2\pi m \varkappa T)^{\frac{3}{2}} = 1.12 \cdot 10^{-15}(MRT)^{\frac{3}{2}} \qquad (39)$$

$$\frac{E}{n} = \frac{1.348}{2.615} \cdot \varkappa T \qquad (40)$$

$$p = \frac{1.348}{2.615} RT\eta \,. \qquad (41)$$

Dabei bedeutet: η die Konzentration in Molen,
N die Zahl der Moleküle im Mol,
M die Molmasse (Molekulargewicht).

Man findet mit Hilfe von (39), daß die wirklichen Gase keine solchen Werte der Dichte erreichen, daß das entsprechende ideale Gas gesättigt wäre. Jedoch ist die kritische Dichte des Heliums nur etwa fünfmal kleiner als die Sättigungsdichte η des idealen Gases von gleicher Temperatur und gleichem Molekulargewicht. Bei Wasserstoff ist das entsprechende Verhältnis etwa 26. Da die

[1] Vgl. W. NERNST, Sitzungsber. 1919, VIII, S. 118. — P. GÜNTHER, Sitzungsber. 1920, XXXVI, S. 720.

wirklichen Gase also bei Dichten existieren, welche der Größenordnung nach der Sättigungsdichte nahekommen und gemäß (41) die Entartung den Druck erheblich beeinflußt, so wird sich, wenn die vorliegende Theorie richtig ist, ein nicht unerheblicher Quanteneinfluß auf die Zustandsgleichung bemerkbar machen; insbesondere wird man untersuchen müssen, ob so die Abweichungen von dem Van der Vaalschen Gesetz der übereinstimmenden Zustände erklärt werden können[1].

Übrigens wird man auch erwarten müssen, daß das im vorigen Paragraphen genannte Beugungsphänomen, welches ja bei tiefen Temperaturen eine scheinbare Vergrößerung des wahren Molekülvolumens erzeugt, die Zustandsgleichung beeinflusse.

Es gibt einen Fall, in welchem die Natur das gesättigte ideale Gas möglicherweise im wesentlichen realisiert hat, nämlich bei den Leitungselektronen im Innern der Metalle. Die Elektronentheorie der Metalle hat bekanntlich das Verhältnis zwischen elektrischer und thermischer Leitfähigkeit mit bemerkenswerter Näherung quantitativ erklärt (Drude-Lorentzsche Formel) unter der Annahme, daß im Innern der Metalle freie Elektronen vorhanden seien, welche sowohl die Elektrizität als die Wärme leiten. Trotz dieses großen Erfolges wird aber jene Theorie gegenwärtig nicht für zutreffend gehalten, unter anderem deshalb, weil sie der Tatsache nicht gerecht werden konnte, daß die freien Elektronen zur spezifischen Wärme des Metalles keinen merklichen Beitrag liefern. Diese Schwierigkeit verschwindet aber, wenn man die vorliegende Theorie der Gase zugrunde legt. Aus (39) folgt nämlich, daß die Sättigungskonzentration der (bewegten) Elektronen bei gewöhnlicher Temperatur etwa gleich $5.5 \cdot 10^{-5}$ ist, so daß nur ein verschwindend kleiner Teil der Elektronen zur thermischen Energie einen Beitrag liefern könnte. Die mittlere thermische Energie pro an der thermischen Bewegung teilnehmendem Elektron ist dabei etwa halb so groß wie gemäß der klassischen Molekulartheorie. Wenn nur sehr kleine Kräfte vorhanden sind, welche die nicht bewegten Elektronen in ihrer Ruhelage festhalten, so ist auch begreiflich, daß diese an der elektrischen Leitung sich nicht beteiligen. Möglicherweise könnte sogar Wegfall dieser schwachen Bindungskräfte bei ganz tiefen Temperaturen die Supraleitfähigkeit bedingen. Die Thermokräfte würden auf Grund dieser Theorie überhaupt nicht begreiflich sein, solange man das Elektronengas als ideales Gas behandelt. Natürlich wäre einer solchen Elektronentheorie der Metalle nicht die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung zugrunde zu legen, sondern diejenige des gesättigten idealen Gases nach vorliegender Theorie; aus (8), (9), (11) ergibt sich für diesen speziellen Fall:

$$dW = \text{konst} \frac{E^{\frac{1}{2}}\, dE}{e^{\frac{E}{\varkappa T}} - 1}. \qquad (42)$$

[1] Dies ist nicht der Fall, wie ich nachträglich durch Vergleich mit der Erfahrung gefunden habe. Der gesuchte Einfluß wird durch molekulare Wechselwirkungen anderer Art verdeckt.

Beim Durchdenken dieser theoretischen Möglichkeit kommt man zu der Schwierigkeit, daß man zur Erklärung des gemessenen Leitvermögens der Metalle für Wärme und Elektrizität wegen der sehr geringen Volumdichte der Elektronen, die sich nach unseren Ergebnissen an der thermischen Agitation beteiligen, sehr große freie Weglängen annehmen muß (Größenordnung 10^{-3} cm). Auch scheint es nicht möglich zu sein, auf Grund dieser Theorie das Verhalten der Metalle gegenüber ultraroter Strahlung (Reflexion, Emission) zu begreifen.

§ 11. Zustandsgleichung des ungesättigten Gases.

Wir wollen nun die Abweichung der Zustandsgleichung des idealen Gases von der klassischen Zustandsgleichung im ungesättigten Gebiet genauer betrachten. Wir knüpfen hierfür wieder an die Gleichungen (15), (18b) und (19b) an.

Wir setzen zur Abkürzung

$$\sum_{\tau=1}^{\tau=\infty} \tau^{-\frac{3}{2}} \lambda^{\tau} = y(\lambda)$$

$$\sum_{\tau=1}^{\tau=\infty} \tau^{-\frac{5}{2}} \lambda^{\tau} = z(\lambda)$$

und stellen uns die Aufgabe, z als Funktion von y auszudrücken $(z = \Phi(y))$. Die Lösung dieser Aufgabe, welche ich Hrn. J. Grommer verdanke, beruht auf folgendem allgemeinen Satz (Lagrange):

Unter der in unserem Falle erfüllten Bedingung, daß y und z für $\lambda = 0$ verschwinden, und daß y und z in einem gewissen Bereich um den Nullpunkt reguläre Funktionen von λ sind, besteht für hinreichend kleine y die Taylorsche Entwicklung

$$z = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left(\frac{d^{\nu} z}{d y^{\nu}}\right)_{\lambda=0} \frac{y^{\nu}}{\nu!}, \qquad (43)$$

wobei die Koeffizienten aus den Funktionen $y(\lambda)$ und $z(\lambda)$ vermöge der Rekursionsformel dargestellt werden können

$$\frac{d^{\nu}(z)}{d y^{\nu}} = \frac{\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d^{\nu-1} z}{d y^{\nu-1}}\right)}{\frac{dy}{d\lambda}}. \qquad (44)$$

Man erhält so in unserem Falle die bis $\lambda = 1$ konvergente und zur Ausrechnung bequeme Entwicklung

$$z = y - 0.1768\, y^2 - 0.0034\, y^3 - 0.0005\, y^4.$$

Wir führen nun die Bezeichnungen ein

$$\frac{z}{y} = F(y).$$

Dann gelten für das ungesättigte ideale Gas, d. h. zwischen $y = 0$ und $y = 2.615$ die Beziehungen

$$\frac{\bar{E}}{n} = \frac{3}{2} \varkappa T F(y) \tag{19c}$$

$$p = R T \eta F(y)\,; \tag{22c}$$

wobei gesetzt ist

$$y = \frac{h^3}{(2\pi m \varkappa T)^{\frac{3}{2}}} \frac{n}{V} = \frac{h^3 N \eta}{(2\pi M R T)^{\frac{3}{2}}}. \tag{18c}$$

Aus (19b) erhält man für die auf das Mol bezogene spezifische Wärme bei konstantem Volumen c_v:

$$c_v = \frac{3}{2} R \left(F(y) - \frac{3}{2} y F'(y) \right) = \frac{3}{2} R\, G(y)\,.$$

Wir geben zur leichteren Übersicht eine graphische Darstellung der Funktionen $F(y)$ und $G(y)$

Berücksichtigt man den annähernd linearen Verlauf von $F(y)$, so ergibt sich für p die gute Näherungsgleichung

$$p = R T \eta \left[1 - 0.186 \frac{h^3 N^4 \eta}{(2\pi M R T)^{\frac{3}{2}}} \right]. \tag{22d}$$

Dezember 1924.

Ausgegeben am 9. Februar.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1925

II. Gesamtsitzung. 15. Januar.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Goldschmidt las über die Bronzetür des Augsburger Domes.

Die zweiflügelige Bronzetür des Augsburger Domes ist nicht der bisher herrschenden Meinung entsprechend aus Überbleibseln zweier Türen zusammengesetzt, die sich möglicherweise an der Ostseite des romanischen Domes befanden, sondern hat von Anfang an nur eine einzige Tür gebildet, deren beide Flügel aber die gleichen Darstellungen enthielten. Auch sind die schmalen Platten nicht, wie man gemeint, beschnittene breite, sondern sie sind von vornherein so schmal gearbeitet und nachträglich auf dem linken Flügel eingefügt, um der Tür eine größere Breite zu geben, als ursprünglich geplant war. Der rechte Flügel besteht noch in seiner ersten Anordnung der Felder, während die des linken durcheinandergeraten sind. Die Erklärung der Felder ergibt sich danach ohne allzugroße Schwierigkeit als eine typologische, bei der die meisten Figuren ihre überzeugende Deutung finden. Die hinzugefügten Schmalfelder passen sich dem alten Programm an. Viele Eigentümlichkeiten weisen auf die Beziehung zu Italien, der Stil und die historischen Nachrichten auf die Entstehung um die Mitte des 11. Jahrhunderts.

2. Hr. Eduard Meyer überreichte sein Buch »Blüte und Niedergang des Hellenismus in Asien« (Berlin 1925) und seine Schrift »Spenglers Untergang des Abendlandes« (Berlin 1925),

3. Hr. Nernst die 2. Aufl. seines Buches über »Die theoretischen und experimentellen Grundlagen des neuen Wärmesatzes« (Halle a. S. 1924),

4. Hr. Keibel das 13. und 14. Heft der von ihm herausgegebenen »Normentafeln zur Entwicklungsgeschichte der Wirbeltiere« (Jena 1922 und 1925).

5. Aus Mitteln der Akademie sind zu wissenschaftlichen Zwecken bewilligt:

durch die Gesamtakademie

400 ℛℳ zur Fortführung des Biographischen Jahrbuches;

durch die philosophisch-historische Klasse

120 ℛℳ dem Archivdirektor Hrn. Dr. Witte in Neustrelitz für seine im Interesse der deutschen Ostmarkenforschung erfolgte Teilnahme am Deutschen Historikertag in Frankfurt a. M.;

durch die physikalisch-mathematische Klasse

500 ℛℳ dem ordentlichen Mitgliede der Akademie Hrn. Engler als Beihilfe zu den Druckkosten der Unternehmung »Flora von Papuasien und Mikronesien«,

150 *ℛℳ* dem Hrn. Prof. Dr. Venske in Potsdam zur Beendigung seiner erdmagnetischen Untersuchungen,

750 *ℛℳ* dem Hrn. Prof. Dr. Rothe in Wilmersdorf als Zuschuß für die Herausgabe des 7. Bandes der Vorlesungen von Weierstraß.

Die Akademie hat den Direktor der Heidelberger Sternwarte Hrn. Prof. Dr. Max Wolf und den Direktor der Universitätssternwarte in Kopenhagen Hrn. Prof. Dr. Svante Elis Strömgren zu korrespondierenden Mitgliedern ihrer physikalisch-mathematischen Klasse gewählt.

Die Akademie hat das korrespondierende Mitglied ihrer physikalisch-mathematischen Klasse Hrn. Oscar Brefeld in Berlin am 7. Januar 1925 durch den Tod verloren.

Ausgegeben am 9. Februar.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1925 III—V

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

Library of Congress
AUG 27 1925
Smithsonian Deposit

BERLIN 1925

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang einer aufzunehmenden Mitteilung soll in der Regel in den Sitzungsberichten bei Mitgliedern 32, bei Nichtmitgliedern 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte, in den Abhandlungen 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Abhandlungen nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 200 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1925

III. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 29. Januar.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Einstein sprach über die »Quantentheorie des idealen Gases«.

Es wird durch eine Dimensionalbetrachtung sowie durch zwei mechanische Überlegungen gezeigt, daß die Zustandsgleichung des idealen Gases (Entartungsproblem) reduziert werden kann auf die Bestimmung einer universellen Funktion einer Variabeln. Dies Resultat ist dem Wienschen Verschiebungsgesetz der Strahlungstheorie analog.

2. Hr. Zimmermann legte eine Arbeit über die Knickfestigkeit der Stabringe vor.

Sie bestätigt und erweitert die Ergebnisse der früheren Untersuchungen über den gleichen Gegenstand. Es zeigt sich, daß die Erfüllung des Spannziffersatzes die Möglichkeit der zwangfreien Umwandlung eines offenen Stabzuges in einen geschlossenen nicht immer gewährleistet, sondern daß außerdem noch eine Formbedingung befriedigt werden muß. Die allgemeine Gleichung dafür wird angegeben, und zwei Beispiele werden durchgerechnet.

3. Hr. Planck legte eine Arbeit des Ehrenmitgliedes der Akademie Hrn. Carathéodory in München über die Bestimmung der Energie und der absoluten Temperatur mit Hilfe von reversiblen Prozessen vor.

Es wird gezeigt, daß man durch Messungen von Adiabaten- und Zustandskurven an gasförmigen Substanzen alle Daten erhält, um einerseits die absolute Temperaturskala, andererseits die Energie und Entropie der betreffenden Substanz zu bestimmen, falls der absolute Nullpunkt bekannt ist. Dagegen kann dieser Nullpunkt selbst nur mit Hilfe eines irreversiblen Prozesses erhalten werden.

Zur Quantentheorie des idealen Gases.

Von A. Einstein.

Angeregt durch eine von Bose herrührende Ableitung der Planckschen Strahlungsformel, welche sich konsequent auf die Lichtquantenhypothese stützt, habe ich neulich eine Quantentheorie des idealen Gases aufgestellt[1]. Diese Theorie erscheint dann als berechtigt, wenn man von der Überzeugung ausgeht, daß ein Lichtquant (abgesehen von seiner Polarisationseigenschaft) sich von einem einatomigen Molekül im wesentlichen nur dadurch unterscheide, daß die Ruhemasse des Quants verschwindend klein ist. Da aber die Voraussetzung dieser Analogie keineswegs von allen Forschern gebilligt wird, da ferner die von Hrn. Bose und mir angewandte statistische Methode keineswegs zweifelsfrei ist, sondern nur durch den Erfolg im Falle der Strahlung a posteriori gerechtfertigt erscheint, habe ich noch nach anderen, von willkürlichen Hypothesen möglichst freien Überlegungen über die Quantentheorie des idealen Gases gesucht. Diese Überlegungen sollen im folgenden mitgeteilt werden. Sie bilden eine wirksame Stütze der früher aufgestellten Theorie, wenn die erlangten Ergebnisse auch keinen vollen Ersatz für jene Theorie bieten. Es handelt sich hier darum, auf dem Gebiete der Gastheorie Betrachtungen anzustellen, welche in Methode und Ergebnis weitgehend analog sind denjenigen, welche auf dem Gebiet der Strahlungstheorie zum Wienschen Verschiebungsgesetz führen.

§ 1. Problemstellung.

Von einem idealen Gase sei gegeben das Volumen V eines Mols, die Temperatur T, die Masse m des Moleküls. Gefragt wird nach dem statistischen Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung, also nach dem Analogon des Maxwellschen Verteilungsgesetzes. Gesucht ist also eine Gleichung vom Typus

$$dn = \rho\,(L\,,\ \varkappa T,\ V,\ m)\,\frac{V\,dp_1\,dp_2\,dp_3}{h^3}\,. \qquad (1)$$

Dabei bedeutet dn die Zahl der Moleküle, deren rechtwinklige Impulskomponenten p_1, p_2, p_3 in den durch dp_1, dp_2, dp_3 angedeuteten Grenzen liegen. L bedeutet die kinetische Energie des Moleküls $\left(\frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)\right)$; wegen der selbstverständlichen Isotropiebedingung können nämlich p_1, p_2, p_3 nur in der Verbindung L in ρ auftreten. ρ ist eine vorläufig unbekannte Funktion der angegebenen vier Variabeln. Ist die Dichtefunktion ρ bekannt, so ist natürlich

[1] Diese Ber. XXII S. 261. 1924.

auch die Zustandsgleichung bekannt, weil nicht daran zu zweifeln ist, daß für den Druck die mechanische Berechnung aus den Zusammenstößen der Moleküle mit der Wand maßgebend ist. Dagegen dürfen wir nicht voraussetzen, daß die Zusammenstöße der Moleküle untereinander nach den Regeln der Mechanik erfolgen; sonst würden wir natürlich zum Maxwellschen Verteilungsgesetz und zur klassischen Gasgleichung gelangen.

§ 2. Warum paßt die klassische Zustandsgleichung nicht in die Quantentheorie?

Seit den ersten Planckschen Arbeiten über Quantentheorie faßt man in dem Boltzmannschen Prinzip

$$S = \varkappa \lg W$$

die Größe W als eine ganze Zahl auf. Sie gibt an, auf wie viele diskrete Weisen (im Sinne der Quantentheorie) der ins Auge gefaßte Zustand von der Entropie S realisiert werden kann. Wenn es nun auch in den meisten Fällen nicht möglich ist, W ohne Willkür theoretisch zu berechnen, so bringt doch diese Auffassungsweise die Überzeugung mit sich, daß S keine willkürliche additive Konstante enthalte, sondern im Sinne der Quantentheorie völlig bestimmt und stets positiv sei. Diese Plancksche Auffassung wird durch das Nernstsche Theorem beinahe zur Notwendigkeit. Bei dem absoluten Nullpunkt hört nämlich jede durch thermische Agitation erzeugte Unordnung auf, und der ins Auge gefaßte Zustand kann nur auf eine Weise ($W = 1$) realisiert werden, was eben bedeutet, daß das Nernstsche Theorem ($S = 0$ für $T = 0$) gilt.

Diese einfache Deutbarkeit des Nernstschen Theorems durch die Plancksche Auffassung des Boltzmannschen Prinzips überzeugt von der allgemeinen Richtigkeit dieser Auffassung. Sie führt uns im Speziellen zu der Überzeugung, daß die Entropie nicht negativ werden kann.

Nach der klassischen Zustandsgleichung idealer Gase enthält die Entropie des Mols das additive Glied $R \lg V$, welches die Abhängigkeit dieser vom Volumen bei konstanter Temperatur ausdrückt. Dies Glied kann durch Verkleinerung von V beliebig stark negativ gemacht werden, derart, daß die Entropie selbst negativ wird. Nun liegen zwar diese Werte von V bei den wirklichen Gasen weit unterhalb des kritischen Volumens dieser Gase, so daß ein Erreichen negativer Entropiewerte bei wirklichen Gasen aus dem angegebenen Grunde nicht erschlossen zu werden braucht. Aber wir dürfen doch wohl davon überzeugt sein, daß die Fiktion von Gasen, die sich dem idealen Gase stärker nähern als die in der Natur wirklich vorhandenen Gase, nicht zu einer Verletzung allgemeiner thermischer Sätze führen darf. Nach der klassischen Zustandsgleichung würden aber, wie gesagt, negative Entropiewerte auftreten müssen bei prinzipiell realisierbaren Zuständen. Deshalb müssen wir die klassische Zustandsgleichung prinzipiell verwerfen und sie in ähnlicher Weise als ein Grenzgesetz ansehen wie etwa die Wiensche Strahlungsgleichung.

§ 3. Dimensionalbetrachtung. Im folgenden benutzte Methode.

Aus (1) folgt, daß ρ dimensionsfrei ist. Wir können hieraus über den Bau der Funktion ρ Schlüsse ziehen, wenn wir annehmen, daß ρ keine andere

dimensionierte Konstante enthält als die PLANCKsche Konstante h. In bekannter Weise leitet man dann ab, daß ρ von der Form sein muß

$$\rho = \psi\left(\frac{L}{\varkappa T}, \frac{m\left(\frac{V}{N}\right)^{\frac{2}{3}} \varkappa T}{h^2}\right), \tag{2}$$

wobei ψ eine unbekannte universelle Funktion zweier dimensionsloser Variabeln ist. Die Funktion ψ unterliegt hierbei der Bedingung

$$\frac{V}{h^3}\int \rho \, d\Phi = N, \tag{3}$$

wobei gesetzt ist

$$d\Phi = \int_L^{L+dL} dp_1 \, dp_2 \, dp_3 = 2\pi (2m)^{\frac{3}{2}} L^{\frac{1}{2}} dL. \tag{4}$$

Mehr kann aus Dimensionalbetrachtungen nicht geschlossen werden. Die Funktion ψ zweier Variabeln läßt sich aber ohne Setzung irgendwie zweifelhafter Hypothesen soweit bestimmen, daß nur mehr eine Funktion einer Variabeln unbestimmt bleibt. Dies läßt sich erreichen auf zwei voneinander unabhängigen Weisen, indem man aus den beiden Aussagen die Folgerungen zieht:

1. Die Entropie eines Gases ändert sich nicht bei unendlich langsamer adiabatischer Kompression.

2. In einem idealen Gase gibt es auch bei Anwesenheit eines konservativen statischen äußeren Kraftfeldes einen stationären Zustand, bei welchem überall die gesuchte Geschwindigkeitsverteilung herrscht.

Diese beiden Behauptungen sollen gültig sein unter Vernachlässigung der Wirkung der Zusammenstöße der Moleküle untereinander. Es handelt sich hierbei, wegen der prinzipiellen Vernachlässigung der Zusammenstöße, allerdings um zwei nicht beweisbare Voraussetzungen; dieselben sind aber sehr natürlich, und ihre Richtigkeit wird außerdem noch dadurch wahrscheinlich gemacht, daß sie beide zu demselben Ergebnis führen, und daß sie in dem Grenzfalle verschwindenden Quanteneinflusses zur MAXWELLschen Verteilung führen.

§ 4. Adiabatische Kompression.

Das Gas sei eingeschlossen in ein parallepipedisches Gefäß von den beitenlängen l_1, l_2, l_3. Die Geschwindigkeitsverteilung sei isotrop, doch sonst Seliebig. Die Zusammenstöße mit der Wand seien elastisch. Dann ändert sich die Zustandsverteilung mit der Zeit nicht. Sie sei gegeben durch

$$dn = \frac{V}{h^3} \rho \, d\Phi, \tag{5}$$

wobei ρ eine beliebig gegebene Funktion von L sei.

Wenn wir die Wände unendlich langsam adiabatisch verschieben, derart, daß

$$\frac{\Delta l_1}{l_1} = \frac{\Delta l_2}{l_2} = \frac{\Delta l_3}{l_3} = \frac{1}{3}\frac{\Delta V}{V}, \tag{6}$$

so bleibt die Verteilung isotrop, also von der Form (5). Wie ändert sich dabei die Verteilung?

Bedeutet $|p_1|$ den absoluten Betrag von p_1 eines Moleküls, so erhält man leicht unter Anwendung der Gesetze des elastischen Stoßes

$$\Delta |p_1| = -|p_1| \frac{\Delta l_1}{l}. \tag{7}$$

Analoge Gleichungen gelten für $\Delta |p_2|$ und $\Delta |p_3|$. Hieraus erhält man mit Rücksicht auf (7)

$$\Delta L = \frac{1}{m} (|p_1| \delta |p_1| + \cdot + \cdot\cdot) = -\frac{2}{3} L \frac{\Delta V}{V}. \tag{8}$$

Aus (4) folgt ferner

$$\Delta d\Phi = 2\pi (2m)^{\frac{3}{2}} \left(L^{\frac{1}{2}} \Delta dL + \frac{1}{2} L^{-\frac{1}{2}} \Delta L dL \right),$$

oder zufolge (8)

$$\Delta d\Phi = -d\Phi \frac{\Delta V}{V}, \tag{9}$$

also auch

$$\Delta (V d\Phi) = 0. \tag{10}$$

In all diesen Formeln bedeutet Δ die Veränderung, welche die ins Auge gefaßte Größe durch die adiabatische Volumänderung erleidet.

Nun erleidet bei der adiabatischen Volumänderung die Zahl dN der in (5) betrachteten Moleküle keine Änderung. Es ist daher

$$0 = \Delta dn = \Delta (V \rho d\Phi)$$

oder wegen (10)

$$\Delta \rho = 0. \tag{11}$$

Wir betrachten nun die Entropie des Gases, dessen Zustandsverteilung durch (5) gegeben sei. Wir nehmen dabei an, daß sich diese Entropie additiv zusammensetze aus Teilen, welche den einzelnen Energiebereichen dL entsprechen. Diese Hypothese ist in der Strahlungstheorie jener analog, daß die Entropie einer Strahlung sich aus der der quasi-monochromatischen Bestandteile additiv zusammensetze. Sie ist äquivalent der Annahme, daß man für Moleküle verschiedener Geschwindigkeitsbereiche semi-permeable Wände einführen dürfe[1]. Nach dieser Hypothese haben wir einem Gas, dessen Moleküle isotrop verteilt sind und dem Impulsbereich $d\Phi$ angehören, die Entropie

$$\frac{dS}{\varkappa} = \frac{V}{h^3} s(\rho, L) d\Phi \tag{12}$$

zuzuschreiben, wobei s eine vorläufig unbekannte Funktion zweier Variablen bedeutet.

[1] Derartige semi-permeable Wände kann man sich durch konservative Kraftfelder realisiert denken.

Bei der vorhin betrachteten adiabatischen Kompression muß diese Entropie ungeändert bleiben; es ist also

$$\Delta dS = 0$$

oder wegen (7) und (10)

$$0 = \Delta s = \frac{\partial s}{\partial \rho} \Delta \rho + \frac{\partial s}{\partial L} \Delta L .$$

Hieraus folgt wegen (11)

$$\frac{\partial s}{\partial L} = 0, \tag{13}$$

s ist also eine Funktion von ρ allein.

Nun stellen wir die Bedingung dafür auf, daß ein Gas im thermodynamischen Gleichgewicht ist bezüglich der Geschwindigkeitsverteilung. Dafür muß die Entropie

$$\frac{S}{\varkappa} = \frac{V}{h^3} \int s \, d\Phi$$

ein Maximum sein bezüglich aller Variationen von ρ, welche den beiden Bedingungen

$$\delta \left\{ \frac{V}{h^3} \int \rho \, d\Phi \right\} = 0$$

und

$$\delta \left\{ \frac{V}{h^3} \int L \rho \, d\Phi \right\} = 0$$

genügen. Die Ausführung der Variation liefert die Bedingung

$$\frac{\partial s}{\partial \rho} = AL + B, \tag{14}$$

wobei A und B von L unabhängig sind. Da aber s, also auch $\frac{\partial s}{\partial \rho}$ eine Funktion von ρ allein ist, so kann man diese Gleichung nach ρ auflösen und erhält

$$\rho = \Psi(AL + B), \tag{15}$$

wobei Ψ eine unbekannte Funktion ist. A und B können natürlich von $\varkappa T$, $\frac{V}{N}$, m und h abhängen.

Die Größe A läßt sich bestimmen, indem man auf eine infinitesimale isopyknische Erwärmung des Gases den Entropiesatz anwendet. Bezeichnet man mit E die Energie des Gases, und bezeichnet man mit D die Änderungen, welche bei diesem Vorgang auftreten, so hat man zunächst

$$DE = TdS = \frac{V}{h^3} \int L D\rho \, d\Phi = \frac{V \varkappa T}{h^3} \int D s \, d\Phi .$$

Da wegen (14)

$$Ds = D\rho(AL + B)$$

und wegen des Konstantbleibens der Molekülzahl

$$\int D\rho\, d\Phi = 0,$$

so erhält man

$$\int L D\rho\, d\Phi (1 - \varkappa T A) = 0$$

oder

$$A = \frac{1}{\varkappa T}.$$

Statt (15) ergibt sich also

$$\rho = \Psi\left(\frac{L}{\varkappa T} + B\right). \tag{15a}$$

§ 5. Gas im konservativen Kraftfelde.

Ein Gas befinde sich im dynamischen Gleichgewicht unter der Wirkung eines konservativen Kraftfeldes. Die potentielle Energie Π eines Moleküls sei eine Funktion des Ortes. ρ sei wieder die auf den sechsdimensionalen reduzierten Phasenraum bezogene Moleküldichte. Zusammenstöße der Moleküle vernachlässigen wir wieder und nehmen an, daß die Bewegung des einzelnen Moleküls unter dem Einfluß des äußeren Kraftfeldes gemäß der klassischen Mechanik erfolge. Die Bedingung, daß die Bewegung eine stationäre sein soll, liefert dann die Bedingung

$$\sum_i \left(\frac{\partial(\rho \dot{x}_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial(\rho \dot{p}_i)}{\partial p_i}\right) = 0. \tag{16}$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf die Bewegungsgleichungen

$$\dot{x}_i = \frac{1}{m} p_i$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}$$

des Moleküls in bekannter Weise

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial \rho}{\partial p_i}\dot{p}_i = 0. \tag{16a}$$

ρ ist also längs der Bahnkurve konstant. Da ferner wegen der Isotropie der Gleichgewichtsverteilung ρ die p_i nur in der Kombination L enthalten kann, so muß ρ in der Form darstellbar sein

$$\rho = \Psi^*(L + \Pi). \tag{17}$$

Da an den verschiedenen Stellen unseres Gases Gleichgewichtsverteilungen herrschen, die verschiedenen Werten von V bei derselben Temperatur entsprechen, so drückt Gleichung (17) zugleich die Form der Abhängigkeit der Phasendichte ρ von V aus, indem Π eine Funktion von V ist.

§ 6. Folgerungen über die Zustandsgleichung des idealen Gases.

Schreiben wir die Resultate der Untersuchungen der beiden letzten Paragraphen ausführlich mit Bezug auf das Problem der Zustandsgleichung, so müssen wir statt (15a) und (17) schreiben

$$\rho = \Psi\left(h, m, \frac{L}{\varkappa T} + B\right), \tag{15b}$$

$$\rho = \Psi^*(h, m, \varkappa T, L + \Pi). \tag{17b}$$

A, B und Π sind hierbei noch unbekannte universelle Funktionen von h, m, $\varkappa T$, V. Ψ und Ψ^* sind bei dieser Schreibweise dimensionslose universelle Funktionen. Jedes dieser Ergebnisse zeigt nun, daß die aus der Dimensionalbetrachtung gewonnene Gleichung (2) in folgender Weise spezialisiert werden muß:

$$\rho = \psi\left(\frac{L}{\varkappa T} + \chi\left(\frac{m\left(\frac{V}{N}\right)^{\frac{2}{3}}\varkappa T}{h^2}\right)\right). \tag{18}$$

Hierbei sind ψ und χ zwei universelle Funktionen je einer dimensionslosen Variablen. Die beiden Funktionen ψ und χ sind durch (3) verknüpft, so daß das Resultat in Wahrheit nur die unbekannte Funktion ψ enthält. Aus (2), (3) und (4) erhält man nämlich die Beziehung

$$\int_{x=0}^{x=\infty} \psi(x+\chi)\, x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{Nh^3}{2\pi(2m\varkappa T)^{\frac{3}{2}} V}. \tag{19}$$

Ist die Funktion ψ gegeben, so läßt sich zu jedem Werte von χ die rechte Seite der Gleichung berechnen; durch Umkehrung erhält man also auch χ als Funktion der rechten Seite. Damit ist das Problem also tatsächlich auf die Frage nach der Funktion ψ reduziert.

§ 7. Beziehung dieser Resultate zur klassischen Theorie sowie zu der von mir gegebenen Quantentheorie des idealen Gases.

Wir untersuchen den Fall, daß die Konstante h sich aus dem Verteilungsgesetz heraushebt. Wir setzen zur Abkürzung

$$u = \frac{h^3 N}{(m\varkappa T)^{\frac{3}{2}} V}, \qquad v = \frac{L}{\varkappa T}.$$

Aus (1) und (18) erkennt man, daß sich h dann und nur dann aus dem Ausdruck für dn heraushebt, wenn $\frac{1}{u}\psi$ von u unabhängig ist. Wir wollen in diesem Falle diese Funktion $\bar{\psi}(v)$ nennen. Es muß dann bei passender Wahl der Funktion φ eine Gleichung von der Form gelten

$$\psi(v + \varphi(u)) = u\bar{\psi}(v). \tag{20}$$

Logarithmiert man diese Gleichung und differenziert sie zweimal (nach u und v), so erkennt man leicht, daß $\lg \psi$ eine lineare Funktion sein muß. Auch ϕ ergibt sich dann leicht. Es zeigt sich, daß ψ tatsächlich die Exponentialfunktion sein muß (Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung). —

Der klassischen Theorie entspricht der Ansatz

$$\psi(v) = e^{-v}, \tag{21}$$

der von mir entwickelten statistischen Theorie der Ansatz

$$\psi(v) = \frac{1}{e^{v} - 1}. \tag{22}$$

An die Stelle der Exponentialfunktion mit negativem Exponenten tritt also die Plancksche Funktion[1]. Daß der Ansatz (22) zum Unterschied von (21) dem Nernstschen Theorem Genüge leistet, habe ich in einer jüngst erschienenen Arbeit gezeigt.

Zwei Ziele sind durch die vorliegende Untersuchung erreicht worden. Erstens ist eine allgemeine Bedingung (Gleichung (18)) gefunden worden, der jede Theorie des idealen Gases genügen muß. Zweitens geht aus dem Obigen hervor, daß die von mir abgeleitete Zustandsgleichung durch adiabatische Kompression sowie durch konservative Kraftfelder nicht gestört wird.

---

[1] Dies folgt leicht aus (18), (20) und (21) der oben zitierten Abhandlung.

Die Knickfestigkeit der Stabringe.

Von H. Zimmermann.

Auf Seite 153 der Sitzungsberichte für 1924 ist ein Verfahren zur Berechnung der Knickfestigkeit von Stabzügen mitgeteilt worden, das sich besonders dazu eignet, auf Stabringe angewendet zu werden, die man ja als in sich zurückkehrende Stabzüge auffassen kann. Wenn ein offener Stabzug in einen solchen Ring umgewandelt werden soll, so müssen seine Enden entgegengesetzt gleich eingespannt sein. Dann heben sich die Einspannmomente bei gleicher Größe der Verdrehung beider Enden auf und besteht Gleichgewicht. Letztere Bedingung ist wesentlich; denn da die Spannziffern nur das Verhältnis der Momente zu den Verdrehungen ausdrücken, sagt ihre Gleichsetzung über diese Größen selber nichts aus. Für die Verbindung der einzelnen Felder eines offenen Stabzuges gilt natürlich dieselbe Bedingung. Sie beeinflußt aber hier die Rechnung nicht, weil die das Kennzeichen eines solchen Stabzuges bildende Freiheit der Endneigungen nach Größe und Sinn die gleiche Freiheit für die Enden aller Felder zur notwendigen Folge hat. Die von der biegungsfesten Verbindung der Felder in den Zwischenknoten geforderte Gleichheit der Verdrehungen der aneinanderstoßenden Enden benachbarter Felder darf also ohne weiteres vorausgesetzt werden, wie das in den früheren Untersuchungen auch immer geschehen ist. Und um die Größe der dabei herauskommenden Endneigungen des ganzen Stabzuges braucht man sich überhaupt nicht zu kümmern; also auch nicht darum, ob sie gleich sind. Erst wenn die Forderung gestellt wird, daß der offene Stabzug sich ohne Zwang in einen geschlossenen verwandeln lassen solle, tritt diese Bedingung hinzu.

Für die vollkommene Klarstellung der Sachlage ist es dienlich, sie auch noch von dem entgegengesetzten Anfangszustand aus zu verfolgen; nämlich durch den Übergang vom Ring zum offenen Stabzug. Die Umwandlung geschieht, indem man an einem beliebigen Knotenpunkt einen Schnitt legt und die dort vorher wirkenden inneren Momente als äußere anbringt. Jetzt ist es selbstverständlich, daß die Verdrehung der durch den Schnitt entstandenen freien Enden gleich ist, wie sie es ja vorher war. Und daß die Spannziffern der Enden dem Spannziffersatze genügen, also beim Fehlen von Anschlußstabzügen einander entgegengesetzt gleich sein müssen, gilt für die Enden ebenso, wie es vorher für den Knotenpunkt galt, in dem sie verbunden waren. Man kann das durch den einen Satz ausdrücken: Im Ring gelten für alle Knoten die Bedingungen wie für die Zwischenknoten im offenen Stabzug.

Hieraus ergibt sich nun, daß es für die Berechnung des Ringes nicht genügt, ihn wie einen offenen Stabzug mit entgegengesetzt gleicher Endeinspannung zu behandeln. Es muß noch die Bedingung der Gleichheit der Endverdrehungen hinzugefügt werden. Im Folgenden zeigen wir, wie die so vervollständigte Aufgabe gelöst werden kann.

I. Die Endneigungen eines Feldes an der Knickgrenze.

Die Bezeichnungen werden so gewählt wie im beistehenden Bild 1 und wie in der oben angezogenen Arbeit; jedoch zur Vereinfachung des Satzes die Größen s, t und u ohne Klammern. Damit lauten die allgemeinen Feldgleichungen

$$(1) \qquad \begin{cases} \nu' = tM' : aS + sM'' : aS\,; \\ -\nu'' = sM' : aS + tM'' : aS\,. \end{cases}$$

Bild 1. Bezeichnungen.

Zerlegt man die M in zwei Teile, ein für beide Enden gleiches Angriffsmoment M und je ein Einspannmoment $-m'\nu'$ links und $m''\nu''$ rechts, so ergibt die Auflösung von (1) nach den ν die folgenden Gleichungsgruppen.

a. Bei gleichem Vorzeichen der M:

$$(2\text{a}) \qquad \begin{cases} \nu' = \dfrac{[1 + (t-s)\mu'']\,(t+s)\,M : aS}{(1+t\mu')(1+t\mu'') - s^2\mu'\mu''}\,; \\[2ex] -\nu'' = \dfrac{[1 + (t-s)\mu']\,(t+s)\,M : aS}{(1+t\mu')(1+t\mu'') - s^2\mu'\mu''}\,. \end{cases}$$

b. Bei ungleichen Vorzeichen der M:

$$(2\text{b}) \qquad \begin{cases} \nu' = \dfrac{[1 + (t+s)\mu'']\,(t-s)\,M : aS}{(1+t\mu')(1+t\mu'') - s^2\mu'\mu''}\,; \\[2ex] \nu'' = \dfrac{[1 + (t+s)\mu']\,(t-s)\,M : aS}{(1+t\mu')(1+t\mu'') - s^2\mu'\mu''}\,. \end{cases}$$

Die hierin auftretenden μ sind abkürzende Bezeichnungen für die Verhältniszahlen

$$(3) \qquad \mu' = \frac{m'}{aS}\,; \qquad \mu'' = \frac{m''}{aS}\,,$$

in denen die aS unveränderliche Momente darstellen und m', m'' die Spannziffern für das linke und das rechte Ende des Stabes bedeuten.

Aus (2a) und (2b) habe ich früher die Knickbedingungen für den mit m' und m'' elastisch eingespannten Stab abgeleitet[1]. Wenn nämlich das An-

[1] Vgl. Sitzungsberichte 1921, S. 896 oder Zentralblatt der Bauverwaltung 1922, S. 36. Die Bezeichnungen sind dort etwas anders gewählt. Die früher benutzten Zeichen s und t sind nämlich gleich den jetzigen s und t geteilt durch aS. Die Zusammenziehung des Teilers aS mit den m, die jetzt noch die gleiche Bedeutung haben wie vorher, ergibt die μ.

griffsmoment M Null wird, so verschwinden auch die ν, es sei denn, daß der Nenner der die ν darstellenden Brüche ebenfalls Null wird. Geschieht beides, so werden die ν unbestimmt. Die Bedingungen dafür sind also

$$M = 0$$

und

$$(1 + t\mu')(1 + t\mu'') - s^2\mu'\mu'' = 0. \tag{4}$$

Dies als Einleitung. Sehen wir, was darüber noch weiter zu sagen ist. Wie nach der gegenseitigen Abhängigkeit der Spannziffern eines Feldes — deren Gesetz für den Augenblick der Erreichung der Knickgrenze durch Gleichung (4) ausgedrückt wird — kann man auch danach fragen, welche Beziehung zwischen den Verdrehungen ν' und ν'' der Enden des Feldes besteht. Wir finden eine solche einfachster Art, indem wir je die beiden Gleichungen (2a) und ebenso die (2b) durcheinander teilen. So ergibt sich, wenn man für die μ ihre Werte aus (3) setzt,

$$\text{im Fall a:} \quad \frac{\nu''}{\nu'} = -\frac{1 + (t - s)m' : aS}{1 + (t - s)m'' : aS}; \tag{5a}$$

$$\text{im Fall b:} \quad \frac{\nu''}{\nu'} = \frac{1 + (t + s)m' : aS}{1 + (t + s)m'' : aS}. \tag{5b}$$

Man erkennt hieraus, daß das Verhältnis der Verdrehungen bei gleichen Angriffsmomenten M gar nicht von deren Größe abhängt, also auch noch im Augenblick des Knickens einen bestimmten, durch (5a) oder (5b) festgelegten Wert hat. Denn damit die Brüche auf der rechten Seite von (5a) oder (5b) die Form $0:0$ annehmen könnten, müßte $m' = m''$ sein. Dann wird aber $\nu'' = -\nu'$ oder $\nu'' = \nu'$ bei jedem Wert von $m' = m''$.

In anderer Weise können die Brüche allerdings in unbestimmter Form erscheinen, wenn

$$S = 0,$$

d. h. wenn das Feld unbelastet ist. Dann ändern aber auch die Größen s und t ihre Form. In der oben genannten Arbeit von 1924 ist gezeigt, wie man in diesem Falle die Unbestimmtheit beseitigen kann. Man braucht danach zu diesem Zwecke

$$\left\{\begin{array}{lccc} \text{statt} & s; & t; & aS \\ \text{nur zu setzen} & \frac{1}{2} & 1 & 1:A, \end{array}\right. \tag{6}$$

worin A die Bedeutung

$$A = \frac{a}{3EJ} \tag{7}$$

hat. Damit gehen die für endliche Werte von S geltenden Gleichungen (5a) und (5b) in die folgenden, bei $S = 0$ zu benutzenden über.

(8a) Im Fall a: $$\frac{\nu''}{\nu'} = -\frac{1 + \frac{1}{2}Am'}{1 + \frac{1}{2}Am''};$$

(8b) im Fall b: $$\frac{\nu''}{\nu'} = \frac{1 + \frac{3}{2}Am'}{1 + \frac{3}{2}Am''}.$$

Ein Feld ohne Achslast hat zwar an sich keine Bedeutung für die Knickberechnung, wohl aber in Verbindung mit belasteten Feldern. Deswegen bedürfen wir auch der Gleichungen (8a) und (8b).

Zu bemerken bleibt noch, daß der Fall a die einfach bogenförmige, der Fall b die S-förmige Krümmung des Stabes betrifft.

II. Berechnung eines dreiseitigen Ringes.

Es spart Raum und erleichtert die Darstellung, wenn man die Zahl der Seiten des Ringes auf drei beschränkt. Durch die Wahl der folgenden Bezeichnungen wird dafür gesorgt, daß sich das Rechnungsverfahren ohne weiteres auf Ringe mit mehr Seiten ausdehnen läßt.

Knotenpunkte	**1**		**2**		**3**		**1**
Felder		1—2		2—3		3—1	
Feldlängen		a_{12}		a_{23}		a_{31}	
Stabkräfte		S_{12}		S_{23}		S_{31}	
Produkte aS		r_{12}		r_{23}		r_{31}	
Trägheitsmomente		J_{12}		J_{23}		J_{31}	
Hilfswinkel α		α_{12}		α_{23}		α_{31}	
Größen s		s_{12}		s_{23}		s_{31}	
Größen t		t_{12}		t_{23}		t_{31}	
Größen u		u_{12}		u_{23}		u_{31}	
Spannziffern	m_1'' m_1'		m_2'' m_2'		m_3'' m_3'		m_1'' m_1'
»	m_1		m_2		m_3		m_1 .

Die r sind abkürzende Zeichen. Die Hilfswinkel α sind mit den Trägheitsmomenten J der Querschnitte aus einer der Gleichungen

$$\alpha = a\sqrt{\frac{S}{EJ}} = \pi\sqrt{\frac{S}{K_0}} = \pi\sqrt{\frac{J_0}{J}} \tag{9}$$

zu berechnen, in denen

$$K_0 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 EJ \quad \text{und} \quad J_0 = \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \frac{S}{E}, \tag{10}$$

also K_0 die Knicklast des Feldes mit der Einspannung Null nach EULER und J_0 das Trägheitsmoment bedeutet, das der Stab haben müßte, wenn er sich bei frei drehbaren Enden unter der Stabkraft S an der Knickgrenze befinden sollte. Die s, t und u sind mit α oder $S:K_0$ oder $J_0:J$ aus der mehrfach er-

Bild 2. Stabring mit Abzweigungen.

wähnten Zahlentafel zu entnehmen, oder umgekehrt zur Bestimmung dieser Werte zu benutzen, je nachdem, wie es die Aufgabe verlangt. Die Spannziffern sind im Bild 2 an den Stellen eingeschrieben, zu denen sie gehören. Die gestrichenen m beziehen sich auf die Seiten des Ringes, die m_1, m_2, m_3 auf Stabzüge, die in den Knoten 1, 2, 3 biegungsfest angeschlossen sind; sie werden als durch vorausgehende Berechnung dieser Züge bekannte Größen behandelt.

Wir wollen nun sehen, was uns an Gleichungen für die Lösung der Aufgabe zur Verfügung steht.

Da sind erstens die aus dem allgemeinen Spannziffersatze

$$\sum m = 0$$

folgenden drei Knotengleichungen; nämlich

$$(11)\quad \begin{cases} \text{für Knoten } 1: & m_1'' + m_1 + m_1' = 0; \\ \text{»} \quad \text{»} \quad 2: & m_2'' + m_2 + m_2' = 0; \\ \text{»} \quad \text{»} \quad 3: & m_3'' + m_3 + m_3' = 0. \end{cases}$$

Ferner die drei aus (4) folgenden Feldgleichungen

$$(12)\quad \begin{cases} \text{für Feld } 1-2: & \dfrac{m_2''}{r_{12}} = -\dfrac{1 + t_{12}\, m_1' : r_{12}}{t_{12} + u_{12}\, m_1' : r_{12}}; \\ \text{»} \quad \text{»} \quad 2-3: & \dfrac{m_3''}{r_{23}} = -\dfrac{1 + t_{23}\, m_2' : r_{23}}{t_{23} + u_{23}\, m_2' : r_{23}}; \\ \text{»} \quad \text{»} \quad 3-1: & \dfrac{m_1''}{r_{31}} = -\dfrac{1 + t_{31}\, m_3' : r_{31}}{t_{31} + u_{31}\, m_3' : r_{31}}. \end{cases}$$

Sie gelten nur für Felder mit Achslasten. Wo ein Feld unbelastet ist, erhält man die dazu gehörende Feldgleichung, indem man

$$(13)\quad \begin{cases} \text{statt} & t & u & r \\ & \mathbf{1} & {}^3/_4 & \mathbf{1}:A \end{cases}$$

mit den betreffenden Zeigern an A setzt.

Schließlich die drei Winkelgleichungen

$$(14)\quad \begin{cases} \text{für Feld } 1-2: & \dfrac{v_2''}{v_1'} = \mp \dfrac{1 + (t_{12} \mp s_{12})\, m_1' : r_{12}}{1 + (t_{12} \mp s_{12})\, m_2'' : r_{12}} = \dfrac{v_2}{v_1}; \\ \text{»} \quad \text{»} \quad 2-3: & \dfrac{v_3''}{v_2'} = \mp \dfrac{1 + (t_{23} \mp s_{23})\, m_2' : r_{23}}{1 + (t_{23} \mp s_{23})\, m_3'' : r_{23}} = \dfrac{v_3}{v_2}; \\ \text{»} \quad \text{»} \quad 3-1: & \dfrac{v_1''}{v_3'} = \mp \dfrac{1 + (t_{31} \mp s_{31})\, m_3' : r_{31}}{1 + (t_{31} \mp s_{31})\, m_1'' : r_{31}} = \dfrac{v_1}{v_3}. \end{cases}$$

Sie sind aus (5a) und (5b) durch Hinzufügen der Knotenpunktzeiger und Zusammenziehen beider Gleichungen in je eine entstanden. Die oberen

Zeichen gelten für einfach bogenförmige, die unteren für S-förmige Krümmung der Felder.

Die biegungsfeste Verbindung der Feldenden in den Knotenpunkten hat die Folge, daß die Verdrehungen der Enden zu beiden Seiten jedes Knotenpunktes gleich sein müssen, wie das im Eingange schon erörtert wurde. So wie vorher für die Spannziffern erhalten wir daher jetzt auch drei Knotengleichungen für die Verdrehungen, nämlich

$$(15)\qquad \begin{cases} \text{im Knoten } 1: & \nu_1'' = \nu_1' = \nu_1\,; \\ \text{»} \quad \text{»} \quad 2: & \nu_2'' = \nu_2' = \nu_2\,; \\ \text{»} \quad \text{»} \quad 3: & \nu_3'' = \nu_3' = \nu_3\,. \end{cases}$$

Die Bezeichnung mit Strichen kann daher weggelassen werden, wie in (15) schon geschehen und in (14) nachträglich ausgeführt ist.

Wenn wir nun die drei Gleichungen (14) miteinander multiplizieren, so fallen die drei ν heraus, und wir erhalten die nachstehende schöne Gleichung:

$$(16)\quad \left(\mp\frac{1+(t_{12}\mp s_{12})\dfrac{m_1'}{r_{12}}}{1+(t_{12}\mp s_{12})\dfrac{m_2''}{r_{12}}}\right)\left(\mp\frac{1+(t_{23}\mp s_{23})\dfrac{m_2'}{r_{23}}}{1+(t_{23}\mp s_{23})\dfrac{m_3''}{r_{23}}}\right)\left(\mp\frac{1+(t_{31}\mp s_{31})\dfrac{m_3'}{r_{31}}}{1+(t_{31}\mp s_{31})\dfrac{m_1''}{r_{31}}}\right)=1\,.$$

Sie möge kurz Ringgleichung genannt werden.

Da hierin wie in (14) die oberen Zeichen für einfach bogenförmige, die unteren für S-förmige Krümmung des betreffenden Feldes gelten, so entscheidet (16) darüber, welche dieser Biegeformen möglich oder notwendig sind, und in welchem Felde sie eintreten müssen. Das ergibt sich daraus, daß jeder der drei Faktoren einem Felde zugeordnet ist; und zwar demjenigen, dessen Zeiger er enthält.

Auch (16) bezieht sich nur auf einen in allen Feldern belasteten Ring, gerade so wie (12). Sind einzelne Felder ohne Achslast, dann ist der zugehörige Faktor leicht nach der Regel (6) abzuändern.

Überblicken wir jetzt diese Ergebnisse, so zeigt sich folgendes. Wenn die Lasten für alle Felder, die Maße bis auf das Trägheitsmoment J des Querschnittes eines Feldes, z. B. 2—3, gegeben sind und J_{23} so bestimmt werden soll, daß sich der ganze Ring an der Knickgrenze befindet, dann haben wir es zunächst mit sieben Unbekannten zu tun, nämlich mit den sechs Spannziffern m_1', m_2', m_3', m_1'', m_2'', m_3'' und J_{23}.

Denn die Größen s, t und u derjenigen Felder, deren Maße bekannt sind, für die sich also α oder $S_0 : K$ oder $J_0 : J$ aus den Gleichungen (9) und (10) berechnen läßt, sind nach Belieben mit einer dieser Größen aus der Zahlentafel zu entnehmen. Für das Feld 2—3 aber, dessen J_{23} gesucht wird — wir nennen es Schlußfeld —, sind die Größen s_{23}, t_{23}, u_{23} bekannte Funktionen von J_{23}.

Von den sechs Spannziffern lassen sich drei ohne weiteres mit Hilfe der Gleichungen (11) ausschalten. Es bleiben dann vier Unbekannte übrig, drei Spannziffern und das Trägheitsmoment J_{23}. Zu ihrer Bestimmung verfügen wir über die drei Gleichungen (12) und über (16). Die Zahl der Un-

bekannten läßt sich noch weiter vermindern, indem man zwei Spannziffern mit Hilfe der (12) durch die dritte ausdrückt, für die eine Gleichung mit den Funktionen t_{23} und u_{23} übrigbleibt. Diese und die Gleichung (16) zusammen bestimmen die letzte Spannziffer und das Trägheitsmoment J_{23}. Sie sind beide verwickelt transzendent in J_{23} und algebraisch vom vierten Grade in der Spannziffer.

Hiermit ist zwar die Lösbarkeit der Aufgabe nachgewiesen und der Weg dafür angegeben, aber auch gezeigt, daß eine allgemeine Lösung in geschlossener Form leider nicht möglich ist. Wie das Ziel trotzdem erreicht werden kann, braucht hier nicht erörtert zu werden; ob sich dafür ein bequemes Näherungsverfahren finden lassen wird, bleibt abzuwarten. Das folgende Beispiel möge als Vorstudie dazu gelten.

III. Ring mit zwei gleichen Feldern.

Wir nehmen jetzt an, es seien zwei von den drei Feldern gleich bemessen und belastet; etwa die Felder 1—2 und 3—1. Dadurch wird die Anordnung symmetrisch in bezug auf den Knoten 1. Im Bild 3 sind die gleichen Felder durch stärkere Linien hervorgehoben. Zur weiteren Vereinfachung sind die in die Knoten 1, 2, 3 einmündenden Stabzüge beseitigt; ihre Spannziffern m_1, m_2, m_3 verschwinden daher aus den Gleichungen (11), und diese ergeben

Bild 3. Ring mit zwei gleichen Feldern.

$$(17)\qquad \begin{cases} m_1'' = -m_1'; \\ m_2'' = -m_2'; \\ m_3'' = -m_3'. \end{cases}$$

Der jetzigen Annahme gemäß ist ferner zu setzen

$$(18)\qquad \begin{cases} r_{31} = r_{12}; \\ s_{31} = s_{12};\quad t_{31} = t_{12};\quad u_{31} = u_{12}. \end{cases}$$

Damit folgt aus (12) wenn man die letzte Gleichung an die Spitze stellt,

$$(19)\qquad \begin{cases} \dfrac{m_1'}{r_{12}} = \dfrac{1 + t_{12}\, m_3' : r_{12}}{t_{12} + u_{12}\, m_3' : r_{12}}; \\[2ex] \dfrac{m_2'}{r_{12}} = \dfrac{1 + t_{12}\, m_1' : r_{12}}{t_{12} + u_{12}\, m_1' : r_{12}}; \\[2ex] \dfrac{m_3'}{r_{23}} = \dfrac{1 + t_{23}\, m_2' : r_{23}}{t_{23} + u_{23}\, m_2' : r_{23}}. \end{cases}$$

Hieraus lassen sich die Größen m_2' und m_3' entfernen. Die Auflösung der ersten Gleichung (19) nach $m_3' : r_{12}$ ergibt

$$(20)\qquad \frac{m_3'}{r_{12}} = -\frac{1 - t_{12}\, m_1' : r_{12}}{t_{12} - u_{12}\, m_1' : r_{12}}.$$

Führt man den Wert von $m_2' : r_{12}$ aus der zweiten Gleichung (19) in die dritte ein, so erhält man einen weiteren Ausdruck für $m_3' : r_{12}$ als Funktion von $m_1' : r_{12}$ und dann durch Gleichsetzung beider

$$(21)\qquad \frac{1 - t_{12}\, m_1' : r_{12}}{t_{12} - u_{12}\, m_1' : r_{12}} = -\frac{r_{23}}{r_{12}} \frac{1 + t_{23} \dfrac{r_{12}}{r_{23}} \dfrac{1 + t_{12}\, m_1' : r_{12}}{t_{12} + u_{12}\, m_1' : r_{12}}}{1 + u_{23} \dfrac{r_{12}}{r_{23}} \dfrac{1 + t_{12}\, m_1' : r_{12}}{t_{12} + u_{12}\, m_1' : r_{12}}}.$$

Wird nun nach $m_1' : r_{12}$ aufgelöst, so folgt zunächst

$$(22)\qquad \left(\frac{m_1'}{r_{12}}\right)^2 = \frac{t_{12}^2 + 2\,(r_{12} : r_{23})\, t_{12}\, t_{23} + (r_{12} : r_{23})^2\, u_{23}}{u_{12}^2 + u_{12} \cdot 2\,(r_{12} : r_{23})\, t_{12}\, t_{23} + t_{12}^2\, (r_{12} : r_{23})^2\, u_{23}}.$$

Mit Hilfe der die Größe u bestimmenden Beziehung

$$u_{23} = t_{23}^2 - s_{23}^2$$

läßt sich dies auf die nachstehende bemerkenswerte Form bringen:

$$(23)\qquad \left(\frac{m_1'}{r_{12}}\right)^2 = \frac{1}{t_{12}^2} \frac{\left[t_{12} + \dfrac{r_{12}}{r_{23}}(t_{23} + s_{23})\right]\left[t_{12} + \dfrac{r_{12}}{r_{23}}(t_{23} - s_{23})\right]}{\left[\dfrac{u_{12}}{t_{12}} + \dfrac{r_{12}}{r_{23}}(t_{23} + s_{23})\right]\left[\dfrac{u_{12}}{t_{12}} + \dfrac{r_{12}}{r_{23}}(t_{23} - s_{23})\right]}.$$

Die Gleichung (16) geht mit (17) und (18) über in

$$(24)\qquad \left(\mp \frac{1 + (t_{12} \mp s_{12}) \dfrac{m_1'}{r_{12}}}{1 - (t_{12} \mp s_{12}) \dfrac{m_2'}{r_{12}}}\right) \left(\mp \frac{1 + (t_{23} \mp s_{23}) \dfrac{m_2'}{r_{23}}}{1 - (t_{23} \mp s_{23}) \dfrac{m_3'}{r_{23}}}\right) \left(\mp \frac{1 + (t_{12} \mp s_{12}) \dfrac{m_3'}{r_{12}}}{1 - (t_{12} \mp s_{12}) \dfrac{m_1'}{r_{12}}}\right) = 1.$$

Hiermit ist nun die Aufgabe, das Trägheitsmoment für den Querschnitt eines Feldes so zu bestimmen, daß sich der ganze Ring an der Knickgrenze befindet, in folgender Weise zu lösen, wenn man das Feld 2—3 als Schlußfeld wählt. Für die beiden anderen Felder ist dann alles bekannt.

Wir nehmen zunächst für J_{23} schätzungsweise einen Wert an und suchen die dazu gehörenden Größen t_{23}, u_{23}, $t_{23} + s_{23}$ und $t_{23} - s_{23}$ in der Zahlentafel auf. Damit berechnen wir $m_1' : r_{12}$ aus (23) und alsdann m_2' und m_3' aus (19) und (20). Alle diese Größen in (24) eingesetzt müssen die Bedingung erfüllen. Tun sie das nicht oder nicht genügend, so ist die Rechnung mit einem anderen Werte von J_{23} zu wiederholen.

Das ist natürlich ein sehr unvollkommenes Verfahren, soll aber auch nur einen ohne allzu große Mühe gangbaren Weg andeuten. Viel schneller und sozusagen eleganter gelangt man an das Ziel, wenn man nicht für J_{23}, sondern für m_1' bestimmte Annahmen macht. Hierzu zwei Beispiele.

Erster Fall: $m_1' = 0$.

Diese Annahme bedingt nicht notwendig, daß im Knoten 1 ein Gelenk sei. Sie ist auch erfüllbar, wenn der Ring an der Knickgrenze eine Biege-

form annehmen kann, bei der im Knoten 1 keine gegenseitige Einspannung der Felder 1—2 und 3—1 stattfindet.

Mit $m'_1 = 0$ folgt aus (19) und (20)

$$\frac{m'_2}{r_{12}} = \frac{1}{t_{12}}; \quad \frac{m'_3}{r_{12}} = -\frac{1}{t_{12}}. \tag{25}$$

Führt man diese drei Werte in (24) ein, so ergibt sich

$$\left(\mp\frac{1}{1-(t_{12}\mp s_{12}):t_{12}}\right)(\mp 1)\left(\mp\frac{1-(t_{12}\mp s_{12}):t_{12}}{1}\right) = \mp 1. \tag{26}$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß im ersten und letzten Faktor zugleich entweder $t-s$ oder $t+s$ steht, was bedeutet, daß sich die Felder 1—2 und 3—1 zugleich entweder S-förmig oder einfach bogenförmig krümmen müssen. Geschähe das nicht, so wäre der Nenner im ersten Faktor dem Zähler im dritten nicht gleich und die linke Seite der Gleichung nicht gleich Eins. Da sie aber außerdem positiv sein soll, und nach dem soeben Gesagten das Produkt der beiden äußeren Faktoren positiv ist, so muß auch der mittlere Faktor positiv, das Feld 2—3 also S-förmig gekrümmt sein.

Die Rechnung enthält bisher nichts über die Bemessung dieses Feldes, die doch so ausgeführt werden sollte, daß sich der ganze Ring bei gegebenen Maßen für die Querschnitte der übrigen Felder und bei den für alle drei vorgeschriebenen Lasten gerade an der Knickgrenze befindet. Um auch diesen Punkt zu erledigen, benutzen wir die Gleichung (23). Sie lehrt, daß m'_1 nur Null werden kann, wenn

$$\begin{cases} \text{entweder} \quad t_{12} + \frac{r_{12}}{r_{23}}(t_{23}+s_{23}) = 0 \\ \text{oder} \quad t_{12} + \frac{r_{12}}{r_{23}}(t_{23}-s_{23}) = 0 \end{cases} \tag{27}$$

ist. Um festzustellen, welche von diesen Gleichungen im vorliegenden Falle gilt, müssen wir auf den Abschnitt I zurückgreifen, indem wir die Knickbedingung für das Feld 2—3 aus den dort entwickelten Gleichungen ableiten.

Die Gleichungen (25) ergeben die Spannziffern für die Enden dieses Feldes zu

$$m'_2 = \frac{r_{12}}{t_{12}} \quad \text{und} \quad m''_3 = -m'_3 = \frac{r_{12}}{t_{12}},$$

also gleich groß, was wegen der Symmetrie von vornherein zu erwarten war. Für einen an beiden Enden gleich eingespannten Stab zerfällt die Knickbedingung (4) in die zwei Teile

$$\mu = \frac{m}{r} = -\frac{1}{t+s} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{m}{r} = -\frac{1}{t-s} \tag{28}$$

für einfach bogenförmige und für S-förmige Krümmung des Stabes[1].

[1] Setzt man nämlich in den Gleichungen (2a) und (2b) $\mu' = \mu'' = \mu$, so geht der Nenner aller Brüche in die Form $[1+(t+s)\mu]\,[1+(t-s)\mu]$ über. Es hebt sich daher in Fall a, d. h.

Zur Anwendung auf das Feld 2—3 braucht man nur den Größen r, s und t den Zeiger 23 anzuhängen, da $m_2' = m_3'' = m$ gesetzt werden kann. Die Gleichungen (25) und (28) zusammen ergeben

$$\frac{r_{12}}{t_{12}} = -\frac{r_{23}}{t_{23} + s_{23}} \quad \text{und} \quad \frac{r_{12}}{t_{12}} = -\frac{r_{23}}{t_{23} - s_{23}},$$

und das sind dieselben Gleichungen wie in (27). Wir ersehen daraus, daß die erste von ihnen dem Fall der einfach bogenförmigen, die zweite dem der S-förmigen Krümmung entspricht. Da nun aber nach dem vorher aus (26) gezogenen Schluß das Feld 2—3 S-förmig gekrümmt sein muß, so gilt hier nur die zweite Gleichung (27). D. h., daß das gesuchte Trägheitsmoment

$$J_{23}$$

dadurch zu bestimmen ist, daß man mit dem aus

$$(29) \qquad t_{23} - s_{23} = -\frac{r_{23}}{r_{12}} t_{12}$$

berechneten Werte von $t_{23}—s_{23}$ in die Zahlentafel eingeht und den dazugehörigen Wert von $J_0 : J$ aufsucht. Da J_0 bekannt ist, findet man so auch $J_{23} = J$.

Zweiter Fall: $m_1' = \infty$.

Eine solche Art der Einspannung kann auch bei nicht starren Feldern 1—2 und 3—1 stattfinden, wenn sie sich im Knoten 1 symmetrisch gegeneinander verbiegen.

Mit $m_1' = \infty$ folgt aus (19) und (20)

$$(30) \qquad \frac{m_2'}{r_{12}} = \frac{t_{12}}{u_{12}}; \qquad \frac{m_3'}{r_{12}} = -\frac{t_{12}}{u_{12}}.$$

Setzt man diese Werte in (24) ein, so ergibt sich

$$(31) \quad \left(\mp\frac{(t_{12} \mp s_{12})}{1 - (t_{12} \mp s_{12})\, t_{12} : u_{12}}\right)(\mp 1)\left(\mp\frac{1 - (t_{12} \mp s_{12})\, t_{12} : u_{12}}{-(t_{12} \mp s_{12})}\right) = \pm 1.$$

Auch hier muß ebenso wie bei (26) die Krümmung der Felder 1—2 und 3—1 gleichartig sein, da sonst das Produkt der drei Faktoren nicht gleich Eins sein würde. Damit es aber auch positiv wird, wie (24) vorschreibt, muß der mittlere Faktor negativ sein, weil das Produkt der beiden äußeren es ist. D a s F e l d 2—3 m u ß s i c h a l s o j e t z t e i n f a c h b o g e n f ö r m i g k r ü m m e n.

Die weitere Rechnung verläuft so wie vorher. Die Gleichung (23) zeigt, daß m_1' nur unendlich groß werden kann, wenn

---

bei einfach bogenförmiger Krümmung, der Faktor $1 + (t - s)\mu$, im Fall b bei S-förmiger Krümmung, der Faktor $1 + (t + s)\mu$ weg. Als Knickbedingungen für diese beiden Fälle erhält man also durch Nullsetzung der im Nenner verbliebenen Ausdrücke die oben angeführten Gleichungen.

$$(32)\quad \begin{cases} \text{entweder} & \dfrac{u_{12}}{t_{12}} + \dfrac{r_{12}}{r_{23}}(t_{23} + s_{23}) = 0 \\ \text{oder} & \dfrac{u_{12}}{t_{12}} + \dfrac{r_{12}}{r_{23}}(t_{23} - s_{23}) = 0 . \end{cases}$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von den (27) nur dadurch, daß $u_{12}:t_{12}$ an die Stelle von t_{12} getreten ist, ebenso wie in (30) gegenüber (25). Man braucht daher auch nur in den früher aus (25) und (28) gezogenen Schlüssen dieselbe Änderung vorzunehmen, um sie dem jetzt behandelten Falle anzupassen. Man findet so, daß die erste Gleichung (32) die Knickbedingung für einfach bogenförmige, die zweite für S-förmige Krümmung darstellt. Und da sich das Feld nur einfach bogenförmig krümmen kann, so gilt jetzt die erste Gleichung (32). Das gesuchte J_{23} ist also zu berechnen aus

$$(33)\qquad t_{23} + s_{23} = -\frac{r_{23}}{r_{12}} \frac{u_{12}}{t_{12}},$$

wobei die Zahlentafel ebenso benutzt wird wie vorher. Damit ist auch der Fall $m_1' = \infty$ erledigt.

Bild 4. Biegeform für $m_1' = 0$.

Bild 5. Biegeform für $m_1' = \infty$.

In den Bildern 4 und 5 sind die Biegeformen für die Annahmen $m_1' = 0$ und $m_1' = \infty$ dargestellt. Sie beziehen sich zwar auf einen Ring mit drei gleichen Feldern, gelten aber natürlich auch für den nur zweifeldrig symmetrischen Ring. Sie veranschaulichen das, was vorher auf dem Wege der Rechnung gefunden wurde.

Welche Änderungen eintreten, wenn einzelne Felder ohne Achslast sind, ist schon in den früheren Abschnitten besprochen. Beim Ring mit zwei gleichen Feldern könnten etwa diese oder könnte das dritte Feld unbelastet sein. Die Regeln (6) und (13) zeigen, was dann an die Stelle der Größen s, t, u und r zu setzen ist. Die Rechnung vereinfacht sich dadurch.

Wir schließen den Abschnitt mit einer Bemerkung über die Gleichung (23). Es wird dem Leser schon aufgefallen sein, daß sie immer zwei Gleichungen für die gesuchte Größe liefert, von denen wir doch nur eine brauchen konnten. Das liegt daran, daß (23) allgemeiner ist als (24). Sie gilt nämlich nicht nur für geschlossene, sondern auch für offene Stabzüge, bei denen die Bedingung (24) wegfällt. Beim offenen Stabzug aber gibt es zweierlei Gleich-

gewichtslagen, sichere und unsichere (labile). Die Gleichung (23) wäre unvollkommen, wenn sie nicht die Knickbedingungen für beide Lagen umfaßte. Daß nur eine von ihnen technisch verwertbar ist, kann und darf nicht bewirken, daß die andere auch theoretisch nicht in die Erscheinung tritt.

IV. Ring mit drei gleichen Feldern.

Die bisherigen Ergebnisse lassen sich diesem Fall so leicht anpassen, daß wir nicht darauf einzugehen brauchten, wenn nicht ein besonderer Grund dafür vorläge. Auf S. 160 der Sitzungsberichte für 1924 haben wir ihn nämlich schon einmal behandelt, aber ohne die jetzt als notwendig erkannte Bedingung (16) zu berücksichtigen. Da ist es doch von Belang, zu untersuchen, ob die frühere Lösung trotz dieser Lücke richtig war oder nicht. Das soll jetzt geschehen.

Bei einem Ring mit drei gleichen Feldern können wir die Gleichungen (18) dahin erweitern, daß

$$(34)\qquad \begin{cases} r_{12} = r_{23} = r_{31} = r; \\ s_{12} = s_{23} = s_{31} = s; \\ t_{12} = t_{23} = t_{31} = t; \\ u_{12} = u_{23} = u_{31} = u. \end{cases}$$

Bei $m_1' = 0$ bleibt die Gleichung (26) mit den aus ihr gezogenen Schlüssen gültig. Aus der danach allein in Betracht kommenden Gleichung (29) folgt mit (34)

$$(35)\qquad t - s = -t.$$

Bei $m_1' = \infty$ bleibt ebenso die Gleichung (31) und was aus ihr gefolgert wurde, gültig. Die danach anzuwendende Gleichung (33) ergibt mit (34)

$$(36)\qquad t + s = -u : t.$$

Da nun aber $u = (t+s)\,(t-s)$ ist, so folgt hieraus

$t = \quad -(t-s)$, gerade so, wie aus (35).

Beide Gleichungen ergeben als Knickbedingung für den Ring mit drei gleichen Feldern

$$(37)\qquad u + 3t^2 = 0,$$

das ist dieselbe Gleichung, die früher auf ganz anderem Wege gefunden und auf S. 161 der Sitzungsberichte für 1924 unter (31) angeführt worden ist.

Das Ergebnis war also richtig, obgleich die Bedingung (16) nicht berücksichtigt wurde. Daraus ist zu folgern, daß diese Bedingung bei symmetrischen Anordnungen und den Annahmen $m' = 0$ sowie $m' = \infty$ für den Symmetriepunkt immer erfüllbar ist. Ob aber die andere, aus der Gleichgewichtsbedingung für diesen Punkt hervorgehende und im Falle der Symmetrie durch (23) ausgedrückte Forderung, daß die Spannziffern für je zwei in einem Knotenpunkt zusammenstoßende Enden benachbarter Felder entgegengesetzt gleich sein müssen, für einen Symmetriepunkt etwa nur dadurch

zu erfüllen ist, daß sie Null oder unendlich sind, das bleibt noch genauer zu prüfen. Geometrische Betrachtungen lassen vermuten, daß es in der Tat so ist. Dann kann aber die früher aus dem Unbestimmtwerden des Ausdrucks für m gezogene Folgerung, daß der Ring sich bei jedem Wert von m an der Knickgrenze befinde, wenn nur die Bedingung (37) erfüllt ist, nicht aufrechterhalten werden. Er besitzt dann auch an dieser Grenze nicht unendlich viele, sondern nur die beiden in den Bildern 4 und 5 dargestellten Biegeformen, die wir a. a. Orte lediglich als besonders hervortretende Einzelfälle ansahen.

Um dies nach Möglichkeit aufzuklären, kehren wir noch einmal zum Ring mit zwei gleichen Feldern zurück. Bei ihm wird die Spannziffer m'_1 für den Symmetriepunkt 1 durch die Gleichung (23) bestimmt. Sie ist Null, wenn der Zähler, dagegen ∞, wenn der Nenner Null wird. Wegen der Bedingung (24) und der Gleichungen (29) und (33) muß

im ersten Falle $$t_{23} - s_{23} = -\frac{r_{23}}{r_{12}} t_{12}$$

und im zweiten Falle $$t_{23} + s_{23} = -\frac{r_{23}}{r_{12}} \frac{u_{12}}{t_{12}}$$

sein. Wenn nun der Ring gleichseitig wird und damit die Gleichungen (34) in Geltung treten, so gehen die beiden vorstehenden Gleichungen in dieselbe Gleichung über, nämlich nach (37) in

$$u + 3t^2 = 0,$$

das ist die Knickbedingung für den gleichseitigen Ring. Es wird dann aber in dem Ausdruck auf der rechten Seite von (23) sowohl der Zähler wie auch der Nenner Null und damit m'_1 scheinbar unbestimmt. In Wirklichkeit bleibt nur unentschieden ob $m'_1 = 0$ oder $m'_1 = \infty$ ist. Zwischen diesen beiden Werten kann man nach Belieben wählen; beide führen auf die gleiche Knickbedingung (37).

So erkennen wir, daß der Einblick in die für den gleichseitigen Ring geltenden Gesetze dadurch sehr vertieft worden ist, daß wir ihn hier als Sonderfall des Ringes mit nur zwei gleichen Seiten von einem umfassenderen Standpunkte aus betrachtet haben.

Über die Bestimmung der Energie und der absoluten Temperatur mit Hilfe von reversiblen Prozessen.

Von C. Carathéodory.

1. Vor vielen Jahren hatte ich gelegentlich die Bemerkung gemacht, daß für die Begründung der Thermodynamik auch irreversible Prozesse durchaus notwendig sind[1]. In der Tat würde man, falls in der Natur die reversiblen thermodynamischen Prozesse allein realisierbar wären, zwar die Skala der absoluten Temperatur bestimmen können, aber die Lage des absoluten Nullpunktes auf dieser Skala wäre noch unbestimmt. In meiner früheren Arbeit ist aber dieses Nebenresultat nicht leicht zugänglich wegen der großen Allgemeinheit, die ich damals meinen Betrachtungen zugrunde gelegt hatte. In den folgenden Zeilen, die durch eine Aufforderung von Hrn. Planck entstanden sind, soll nun der Versuch gemacht werden, diese an sich interessante Tatsache mit Hilfe von möglichst elementaren Mitteln nachzuweisen.

2. Wir gehen von folgendem Gedankenexperiment aus: Wir betrachten einen an beiden Enden offenen Zylinder, der durch zwei bewegliche Stempel verschlossen ist und dessen Inneres durch eine feste Wand W in zwei Hohlräume geteilt wird. Der Zylindermantel und die Stempel sollen für Wärme undurchlässig sein, die innere Wand W dagegen soll durch eine geeignete Vorrichtung je nach Wunsch isolierend wirken, oder auch nicht.

Im Inneren eines jeden dieser Hohlräume befindet sich eine bestimmte Menge einer gasförmigen Substanz, deren Druck auf den zugehörigen Stempel und deren Volumen wir gleichzeitig beobachten. Wir bezeichnen mit p den Druck, mit v das Volumen der ersten Substanz, und ähnlich mit $\bar{p}$ und $\bar{v}$ dieselben Größen für die zweite Substanz, die chemisch von der ersten nicht verschieden zu sein braucht; die betrachteten Substanzen sind aber natürlich keine idealen sondern wirkliche Gase.

3. Wir denken uns nun zunächst die Wand W undurchlässig für die Wärme, lassen den ersten Stempel, von irgendeinem Anfangszustand ausgehend, sich unendlich langsam bewegen und notieren in der pv-Ebene die gleichzeitigen Werte des Druckes und des Volumens. Wir erhalten auf diese Weise in dieser Ebene eine »Adiabaten-Kurve« und, wenn wir diesen reversiblen Prozeß von anderen Anfangszuständen ausgehend, die wir irgendwie realisieren,

---

[1] Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamik (Math. Ann. Bd. 67 [1909], p. 381). Vgl. auch den Artikel von M. Born, Physikalische Zeitschrift **22** (1921), p. 218, 249, 282.

wiederholen, eine ganze Schar derartiger Kurven, die einen gewissen Bereich der pv-Ebene einfach überdecken. Diese Kurvenschar kann nun dargestellt werden durch eine Relation von der Form

$$f(p, v) = x, \tag{1}$$

wo x eine Konstante bedeutet. Die Funktion $f(p, v)$ ist natürlich nicht eindeutig bestimmt, da, wenn $\phi(u)$ eine beliebige monotone Funktion bedeutet, dieselbe Kurvenschar auch durch die Gleichung $\phi\left(f(p, v)\right) = \text{const.}$ dargestellt werden kann. Unter allen möglichen derartigen Funktionen wählen wir eine bestimmte, die wir unseren weiteren Rechnungen zugrunde legen werden. Ähnlich stellen wir die Schar der Adiabatenkurven für die zweite Substanz durch die Gleichung

$$\bar{f}(\bar{p}, \bar{v}) = \bar{x} \tag{2}$$

dar.

4. Wenn wir nun die thermische Undurchlässigkeit der Wand W aufheben, werden nicht alle möglichen Zustände (p, v) der ersten Substanz gleichzeitig mit einem gegebenen Zustand $(\bar{p}, \bar{v})$ des zweiten Gases vorhanden sein können. Es wird eben eine Bedingung für das thermische Gleichgewicht der beiden Gase bestehen müssen, die durch eine Gleichung von der Form

$$F(p, v, \bar{p}, \bar{v}) = 0 \tag{3}$$

ausdrückbar ist.

Das Experiment lehrt uns aber, daß, wenn (p_1, v_1) und (p_2, v_2) zwei Zustände des ersten Gases bedeuten, die beide im thermischen Gleichgewicht mit einem und demselben Zustand $(\bar{p}_1, \bar{v}_1)$ des zweiten Gases sind, jeder Zustand $(\bar{p}_2, \bar{v}_2)$ des zweiten Gases, der mit (p_1, v_1) im Gleichgewichte ist, auch mit (p_2, v_2) im Gleichgewichte sein muß. Mit anderen Worten, aus

$$F(p_1, v_1, \bar{p}_1, \bar{v}_1) = 0, \quad F(p_2, v_2, \bar{p}_1, \bar{v}_1) = 0, \quad F(p_1, v_1, \bar{p}_2, \bar{v}_2) = 0$$

folgt stets

$$F(p_2, v_2, \bar{p}_2, \bar{v}_2) = 0.$$

Aus dieser Tatsache kann ohne große Schwierigkeit gefolgert werden, daß die Relation (3) auf folgende Gestalt gebracht werden kann:

$$g(p, v) = \bar{g}(\bar{p}, \bar{v}). \tag{4}$$

Die Funktionen $g(p, v)$ und $\bar{g}(\bar{p}, \bar{v})$ können ebensowenig wie f und $\bar{f}$ eindeutig bestimmt werden. Die Gleichgewichtsbedingung (4) kann in der Tat auch geschrieben werden $\psi\left(g(p, v)\right) = \psi\left(\bar{g}(\bar{p}, \bar{v})\right)$, wobei $\psi(u)$ eine willkürliche monotone Funktion bedeutet.

5. Wir wählen nun wieder unter allen diesen Darstellungsmöglichkeiten der Gleichgewichtsbedingung (4) eine bestimmte und setzen

$$g(p, v) = \tau, \tag{5}$$

$$\bar{g}(\bar{p}, \bar{v}) = \bar{\tau}. \tag{6}$$

Nun führen wir x und τ bzw. $\bar{x}$ und $\bar{\tau}$ als unabhängige Veränderliche ein und berechnen mit Hilfe von (1) und (5) die Größen p und v als Funktionen unserer neuen Veränderlichen. Wir erhalten

$$p = p(x, \tau), \quad v = v(x, \tau) \tag{7}$$

und, indem wir auf ähnliche Weise die Gleichungen (2) und (6) behandeln,

$$\bar{p} = \bar{p}(\bar{x}, \bar{\tau}), \quad \bar{v} = \bar{v}(\bar{x}, \bar{\tau}). \tag{8}$$

Die thermische Gleichgewichtsbedingung nimmt jetzt die einfache Gestalt an:

$$\tau = \bar{\tau}. \tag{9}$$

6. Die beiden Funktionenpaare (7) und (8), die, wie wir gesehen haben, nicht einmal eindeutig bestimmbar sind (vgl. hierzu auch den § 12), sind mit der Gleichgewichtsbedingung (9) die einzigen Daten, die wir aus dem Experiment über unsere Substanzen erfahren können, solange wir reversible Prozesse allein beobachten.

Diese Funktionen müssen nun gewissen Relationen genügen, die wir erhalten, indem wir verlangen, daß unsere Substanzen die allgemeinen Eigenschaften haben, die durch die beiden Hauptsätze der Thermodynamik bedingt werden.

Die Anwendung dieser Hauptsätze auf unser System führt uns nun dazu, gewisse theoretische Funktionen von $x, \tau, \bar{x}, \bar{\tau}$ zu betrachten, die wir, um sie von den experimentell bestimmten Funktionen zu unterscheiden, mit großen Buchstaben bezeichnen werden.

7. Der erste Hauptsatz der Thermodynamik, auf unsere erste Substanz (mit den Zustandskoordinaten x, τ) angewandt, läßt sich nun folgendermaßen aussprechen:

Es gibt eine Zustandsfunktion $E(x, \tau)$, die man die Energie unserer Substanz nennt, derart, daß die Adiabatenkurven $x =$ const. mit den Integralkurven der Differentialgleichung

$$dE + p\,dv = 0 \tag{10}$$

zusammenfallen, wenn man für p und v die Funktionen (7) einsetzt.

Der Ausdruck (10) kann, wenn man ihn entwickelt, geschrieben werden

$$dE + p\,dv \equiv M(x, \tau)\,dx + N(x, \tau)\,d\tau,$$

und der erste Hauptsatz besagt also bloß, daß $N(x, \tau) \equiv 0$ ist. Wir können also für unsere erste Substanz schreiben

$$dE + p\,dv = M(x, \tau)\,dx \tag{11}$$

und ganz ähnlich für die zweite Substanz

$$d\bar{E} + \bar{p}\,d\bar{v} = \bar{M}(\bar{x}, \bar{\tau})\,d\bar{x}. \tag{12}$$

8. Um nun auch den zweiten Hauptsatz anzuwenden, betrachten wir die reversiblen Zustandsänderungen des zusammengesetzten Systems, das entsteht, wenn die Wand W innerhalb unseres Zylinders für die Wärme durchlässig gedacht wird. Dann muß man dafür, daß während dieser Prozesse thermisches Gleichgewicht bestehe, $\bar{\tau} = \tau$ setzen, und wir können als Zustandskoordinaten

unseres Systems $x, \bar{x}$ und τ wählen. Im dreidimensionalen Raume der $(x, \bar{x}, \tau)$ werden dann die betrachteten reversiblen Zustandsänderungen durch gewisse Kurven dargestellt, die nur der einen Bedingung

$$d(E+\bar{E})+p\,dv+\bar{p}\,d\bar{v}=0$$

genügen müssen. Diese letzte Bedingung kann nun, wegen (11) und (12) in Verbindung mit $\tau=\bar{\tau}$, geschrieben werden:

$$M(x, \tau)\,dx+\bar{M}(\bar{x}, \tau)\,d\bar{x}=0. \tag{13}$$

Nun besagt aber der zweite Hauptsatz der Thermodynamik, daß, wenn P_1 und P_2 zwei Punkte des Raumes der $(x, \bar{x}, \tau)$ bedeuten, die auf einer der Gleichung (13) genügenden Kurve liegen, in jeder Umgebung von P_2 gewisse Punkte P'_2 gefunden werden können, die auf keiner Kurve dieser Art liegen, die P_1 enthält.

Andererseits zeigt eine leichte Überlegung[1], daß die Integralkurven der Gleichung (13) diese letztgenannte Eigenschaft dann und nur dann haben, wenn der Ausdruck $M\,dx+\bar{M}\,d\bar{x}$ einen Multiplikator besitzt. Mit anderen Worten: es gibt zwei Funktionen $\Lambda(x, \bar{x}, \tau)$ und $\Omega(x, \bar{x}, \tau)$, so daß

$$\Lambda\cdot(M\,dx+\bar{M}\,d\bar{x})=d\Omega. \tag{14}$$

9. Die Gleichung (14) ist gleichbedeutend mit folgendem Gleichungssystem

$$\left\{\begin{aligned} \Lambda(x, \bar{x}, \tau)\cdot M(x, \tau) &= \frac{\partial\,\Omega(x, \bar{x}, \tau)}{\partial x} \\ \Lambda(x, \bar{x}, \tau)\cdot \bar{M}(\bar{x}, \tau) &= \frac{\partial\,\Omega}{\partial \bar{x}} \\ 0 &= \frac{\partial\,\Omega}{\partial \tau}. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Die letzte Gleichung dieses Systems besagt, daß Ω von τ unabhängig ist; dasselbe gilt dann auch von $\frac{\partial\,\Omega}{\partial x}$ und $\frac{\partial\,\Omega}{\partial \bar{x}}$, und wir können setzen:

$$\frac{\partial\,\Omega}{\partial x}:\frac{\partial\,\Omega}{\partial \bar{x}}=\Phi(x, \bar{x}).$$

Jetzt folgt aus den zwei ersten Gleichungen (15) durch Division

$$M(x, \tau)=\Phi(x, \bar{x})\,\bar{M}(\bar{x}, \tau). \tag{16}$$

Die linke Seite dieser Identität ist von $\bar{x}$ unabhängig. Falls wir also setzen, für irgendeinen festen Wert $\bar{x}_0$ von $\bar{x}$,

$$\Phi(x, \bar{x}_0)=A(x), \quad \bar{M}(\bar{x}_0, \tau)=\Theta(\tau),$$

so folgt aus (16)

$$M(x, \tau)=A(x)\cdot\Theta(\tau). \tag{17}$$

[1] A. a. O. p. 369.

Ferner erhalten wir durch Vergleichung von (16) und (17)

$$\overline{M}(\bar{x}, \tau) = \frac{A(x)}{\Phi(x, \bar{x})} \cdot \Theta(\tau),$$

und man kann schreiben, weil die linke Seite dieser letzten Gleichung von x unabhängig ist,

$$A(x) : \Phi(x, \bar{x}) = \bar{A}(\bar{x}),$$

also

$$\overline{M}(\bar{x}, \tau) = \bar{A}(\bar{x}) \cdot \Theta(\tau). \tag{18}$$

10. Mithin sehen wir, daß die Funktionen $M(x, \tau)$ und $\overline{M}(\bar{x}, \tau)$ als Produkte erscheinen einer Funktion von x bzw. $\bar{x}$ allein mit einer Funktion $\Theta(\tau)$, die von τ allein abhängt. Diese Funktion $\Theta(\tau)$ ist, wie man sieht, dieselbe für unsere beiden Gase, mithin ganz unabhängig von der betrachteten Substanz, und stellt eine universelle Funktion von τ dar, die man die absolute Temperatur nennt.

11. Die theoretischen Funktionen $E(x, \tau)$, $\Theta(\tau)$, $A(x)$, die wir für jede unserer Substanzen eingeführt haben, würden eine nur sehr bedingte Bedeutung für die Wirklichkeit haben, wenn es nicht möglich wäre, sie mit Hilfe der beobachteten Funktionen $p(x, \tau)$ und $v(x, \tau)$ zu berechnen. Um dies zu bewerkstelligen, vergleichen wir die Relationen (11) mit (17) und erhalten:

$$\begin{aligned} dE &= \Theta(\tau) A(x)\, dx - p\, dv \\ &= \big(\Theta(\tau) A(x) - p v_x\big)\, dx - p v_\tau\, d\tau. \end{aligned} \tag{19}$$

Nun steht aber links ein vollständiges Differential; das gibt uns die Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\Theta A - p v_x) = -\frac{\partial}{\partial x} p v_\tau$$

oder

$$\frac{d\Theta(\tau)}{d\tau} A(x) = \frac{\partial(v, p)}{\partial(x, \tau)}. \tag{20}$$

Die Funktionaldeterminante von $v(x, \tau)$ und $p(x, \tau)$ nach x und τ muß also stets dem Produkte einer Funktion von τ allein mit einer Funktion von x allein gleich sein.

Ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt, also z. B.

$$\frac{\partial(v, p)}{\partial(x, \tau)} = \alpha(x) \cdot \beta(\tau), \tag{21}$$

so folgt aus (20), daß folgende Gleichungen notwendig bestehen müssen:

$$A(x) = \frac{\alpha(x)}{C} \qquad \Theta(\tau) = C \int_{\tau_0}^{\tau} \beta\, d\tau + C'; \tag{22}$$

hierbei bedeuten C und C' beliebige Integrationskonstanten.

Setzt man diese Werte in (19) ein, so kann man die Energie E als Funktion von x und τ berechnen.

12. Wir müssen nun untersuchen, ob die Funktionen $E(x, \tau)$ und $\Theta(\tau)$, die wir bestimmt haben, auch, wie es sein soll, eine physikalische Bedeutung besitzen. In der Tat hatten wir in den §§ 3 und 4 gesehen, daß unsere experimentellen Daten gar nicht hinreichen, um v und p als Funktionen von x und τ zu berechnen. Wir hätten ebensogut zwei neue unabhängige Veränderliche ξ und σ einführen können, die mit den früheren durch die Relationen

$$x = \phi(\xi) \quad \tau = \psi(\sigma) \tag{23}$$

zusammenhängen. Es ist aber leicht zu sehen, daß das Schlußresultat unverändert bleibt. Schreibt man nämlich $E^*(\xi, \sigma)$ für die Energie unserer Substanz als Funktion der neuen Koordinaten, so müssen nach dem Vorhergehenden die folgenden Relationen erfüllt sein:

$$\left\{\begin{aligned} dE^* + p\,dv &= M^*(\xi, \sigma)\,d\xi \\ M^* &= \Theta^*(\sigma) \cdot A^*(\xi) \\ \frac{d\Theta^*}{d\sigma} \cdot A^*(\xi) &= \frac{\partial(v, p)}{\partial(\xi, \sigma)}. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial(v, p)}{\partial(\xi, \sigma)} = \frac{\partial(v, p)}{\partial(x, \tau)} \phi'(\xi) \cdot \psi'(\sigma);$$

also kann man stets schreiben

$$\frac{d\Theta^*(\sigma)}{d\sigma} = \Theta'(\psi(\sigma)) \cdot \psi'(\sigma), \quad A^*(\xi) = A(\phi(\xi))\,\phi'(\xi), \tag{25}$$

woraus man sofort entnimmt

$$\Theta^*(\sigma) = \Theta(\psi(\sigma)), \quad E^*(\xi, \sigma) = E(\phi(\xi), \psi(\sigma)). \tag{26}$$

Wegen der soeben geschilderten Invarianz genügen unsere experimentellen Daten vollkommen, um die absolute Temperatur und die Energie zu bestimmen, sobald die Integrationskonstanten C und C' bekannt sind.

Eine weitere Größe, die bei unseren Transformationen ebenfalls invariant bleibt und demnach eine physikalische Bedeutung besitzt, ist die Entropie, die durch die Gleichung

$$S = \int_{x_0}^{x} A(x)\,dx \tag{27}$$

definiert wird und wegen (25) auch der Gleichung

$$S = \int_{\xi_0}^{\xi} A^*(\xi)\,d\xi$$

genügt.

13. Von den beiden Integrationskonstanten C und C' bestimmen wir die erste dadurch, daß wir die Einheit der absoluten Temperatur festlegen, also

z. B. bestimmen, daß zwischen der Temperatur des schmelzenden Eises und der des siedenden Wassers bei einem Druck von 760 mm Quecksilber 100° absolut liegen müssen.

Es ist aber leicht einzusehen, daß, solange wir reversible Prozesse allein beobachten, die Konstante C' nicht bestimmt werden kann. Die Gleichung (19) läßt sich nämlich schreiben, falls man die absolute Temperatur $t = \Theta(\tau)$ und die Entropie (27) einführt,

$$dE = t\,dS - p\,dv. \tag{28}$$

Würde man nun den absoluten Nullpunkt der Temperatur verschieben[1], also z. B.

$$t' = t - t_0$$

setzen, und gleichzeitig statt der Energie E die Funktion

$$E' = E - t_0 S$$

benutzen, so würde man statt (28) erhalten:

$$dE' = t'\,dS - p\,dv. \tag{29}$$

Die Einführung eines falschen Nullpunktes der absoluten Temperatur würde lediglich die Folge haben, daß man für jede Substanz eine falsche Energie, nämlich E', berechnen würde, ohne daß irgendwo eine Unstimmigkeit in den Formeln zu bemerken wäre, weil wir den Begriff der Wärmemenge hier nicht kennen.

Man muß also, um C' zu bestimmen, den ersten Hauptsatz der Thermodynamik auf einen irreversiblen Prozeß anwenden, wodurch eine lineare Gleichung für C' entsteht, bei der der Koeffizient von C' nicht verschwindet, weil die Entropie bei irreversiblen Prozessen nicht konstant bleibt. Es genügt natürlich, C' für eine einzige Substanz ein für allemal zu bestimmen, weil die absolute Temperatur eine universelle Bedeutung hat.

14. Für ideale Gase gestalten sich die Rechnungen folgendermaßen: die Adiabatenkurven genügen der Gleichung

$$x = p v^{1+\gamma},$$

und die Zustandsgleichung lautet:

$$\tau = p v.$$

Hieraus folgt durch logarithmische Differentiation

$$\frac{1}{x} x_v = \frac{1+\gamma}{v}, \quad \frac{1}{x} x_p = \frac{1}{p},$$

$$\frac{1}{\tau} \tau_v = \frac{1}{v}, \quad \frac{1}{\tau} \tau_p = \frac{1}{p}.$$

Es ist daher

$$\frac{\partial(x, \tau)}{\partial(v, p)} = \frac{x\tau \cdot \gamma}{pv} = \gamma x$$

[1] Der Nullpunkt der thermodynamischen maßgebenden Größe $\Theta(\tau)$ braucht nicht, wie das öfters fälschlich behauptet wird, mit dem Nullpunkte von τ zusammenzufallen, wo τ durch die Zustandsgleichung spezieller Systeme z. B. idealer Gase gegeben ist.

und also

$$\frac{\partial (v, p)}{\partial (x, \tau)} = \frac{1}{\gamma x}.$$

Man kann demnach schreiben

$$\Theta'(\tau) = C, \qquad \Theta(\tau) = C\tau + C'$$

$$A(x) = \frac{1}{C\gamma x}, \quad S(x) = \frac{1}{C\gamma} lx.$$

Wir berechnen die Energie aus der Gleichung

$$\begin{aligned} dE &= (C\tau + C') \frac{dx}{C\gamma x} - p\,dv \\ &= \frac{C'}{C\gamma} dlx + \frac{\tau}{\gamma} \frac{dx}{x} - \tau \frac{dv}{v} \\ &= \frac{C'}{C\gamma} dlx + \frac{\tau}{\gamma} d\left(l(xv^{-\gamma})\right) \\ &= \frac{C'}{C\gamma} dlx + \frac{}{\gamma} d\tau. \end{aligned}$$

Man hat also

$$E = \frac{\tau}{\gamma} + \frac{C'}{C\gamma} lx,$$

oder, wenn man die Temperatur und das Volumen als unabhängige Veränderliche wählt,

$$E = \frac{\tau}{\gamma} + \frac{C'}{C\gamma} l\tau v^{\gamma}.$$

Nun ist aber bekanntlich die Energie eines idealen Gases als Funktion von τ und v unabhängig vom Volumen, was man durch einen irreversiblen Prozeß feststellt. Es ist also in diesem Falle $C' = 0$ und daher

$$t = C\tau, \quad E = \frac{\tau}{\gamma},$$

oder, wenn man die Energie als Funktion von S und v berechnet,

$$E = \frac{e^{C\gamma S}}{\gamma v^{\gamma}},$$

eine Formel, die, wenn man (28) beachtet, alle früheren dieses Paragraphen enthält.

15. Zum Schluß noch eine Bemerkung allgemeiner Natur!

Wenn man der Ansicht ist, daß die Geometrie als das erste Kapitel der mathematischen Physik anzusehen ist, ist es nur vernünftig, wenn man sich als Ziel setzt, auch andere Teile dieser Disziplin auf dieselbe Weise zu be-

handeln wie die Geometrie. Für diese besitzt man in der Tat seit dem Altertume eine Methode, die nichts an Klarheit zu wünschen übrigläßt und so vollendet ist, daß man sie seitdem nicht hat wesentlich verbessern können. Dies hat Newton schon empfunden, als er die Darstellung seiner Mechanik, auch in der äußeren Form, dem klassischen Vorbilde der Geometrie angepaßt hat. Es ist nun sehr bezeichnend, daß man mit noch geringerer Mühe als bei der Mechanik die klassische Thermodynamik genau nach derselben Methode wie die Geometrie behandeln kann.

Diese Methode besteht darin, daß man:

1. Gedankenexperimente macht, also z. B. bei geometrischen Problemen Figuren konstruiert oder solche, die man konstruiert hat, im Raume bewegt;

2. die Axiome, denen die Dinge, die man betrachtet, allgemein genügen müssen, auf diese Gedankenexperimente anwendet;

3. die logischen Schlüsse, die aus den gegebenen Prämissen folgen, ausführt.

In meiner Arbeit von 1908 hatte ich schon versucht, diesen Weg zu gehen, es scheint mir aber, daß die Parallele mit der Geometrie bei der obigen Behandlung der Thermodynamik eines natürlichen Gases noch schärfer hervortritt.

Ausgegeben am 5. März.

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1925

IV. Gesamtsitzung. 5. Februar.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Planck legte eine Abhandlung vor: »Zur Frage der Quantelung einatomiger Gase«.

In Verallgemeinerung und Vereinfachung einer früheren Untersuchung wird eine Methode entwickelt, um aus der physikalischen Struktur des Phasenraums eines Gases die sogenannte Zustandssumme und die thermodynamischen Eigenschaften des Gases abzuleiten. Bei tiefen Temperaturen und großen Dichten ergeben sich dann gewisse Entartungserscheinungen. Zum Schluß wird ein Vergleich mit der kürzlich an derselben Stelle von Hrn. Einstein veröffentlichten Theorie gezogen.

2. Hr. Haberlandt überreichte die 6. Auflage seines Werkes »Physiologische Pflanzenanatomie« (Leipzig 1924).

3. Das korrespondierende Mitglied Hr. Johannes von Kries in Freiburg i. B. feierte am 16. Januar sein fünfzigjähriges Doktorjubiläum. Die Akademie hat an den Jubilar eine Adresse gerichtet, die in diesem Stück abgedruckt ist.

Die Preußische Regierung hat durch Erlaß vom 16. Januar die Wahl der ordentlichen Professoren an der Universität Berlin, HH. Dr. Eduard Spranger und Dr. Hermann Abert, zu ordentlichen Mitgliedern der philosophisch-historischen Klasse und durch Erlaß vom 21. Januar die Wahl des ordentlichen Professors an der Technischen Hochschule in Charlottenburg, Hrn. Dr. Karl Andreas Hofmann, und des ordentlichen Professors an der Universität Berlin, Hrn. Dr. Max Bodenstein, zu ordentlichen Mitgliedern der physikalisch-mathematischen Klasse bestätigt.

Die Akademie hat in ihrer Sitzung am 5. Februar den ehemaligen italienischen Unterrichtsminister Hrn. Senatore Prof. Dr. Benedetto Croce in Neapel zum korrespondierenden Mitglied ihrer philosophisch-historischen Klasse und den ordentlichen Professor an der Universität Wien, Hrn. Dr. Wilhelm Wirtinger, sowie den ordentlichen Professor an der Universität Jena, Hrn. Dr. Paul Koebe, zu korrespondierenden Mitgliedern ihrer physikalisch-mathematischen Klasse gewählt.

Zur Frage der Quantelung einatomiger Gase.

Von MAX PLANCK.

Vor mehreren Jahren habe ich für die Quantenstatistik eines einatomigen Gases eine Theorie entwickelt[1], welche für hinreichend tiefe Temperaturen und große Dichten zu gewissen Entartungserscheinungen führt. Dieser Theorie war diejenige Fassung der Quantenhypothese zugrunde gelegt, nach welcher der Phasenraum eines physikalischen Gebildes überall stetig von den Phasenpunkten erfüllt wird, und nur die Dichte dieser Raumverteilung beim Übergang von einer Phasenzelle zu einer benachbarten einen Sprung erleidet. Seitdem durch die Versuche von O. STERN und W. GERLACH[2] direkt erwiesen ist, daß unter gewissen Umständen im Phasenraum nur ganz bestimmte Phasenbahnen vorkommen, ist jene Voraussetzung nicht mehr aufrechtzuerhalten, und es erhebt sich die Frage, wie sich nunmehr die Quantenstatistik und die daraus entspringenden Folgerungen gestalten. Der Untersuchung dieser Frage ist der nachfolgende Aufsatz gewidmet. Dabei konnte die ganze Betrachtungsweise gegen die frühere noch verallgemeinert und zugleich vereinfacht werden.

§ 1.

Das thermodynamische Verhalten eines Gases ist bestimmt durch den Ausdruck der freien Energie als Funktion der Temperatur T:

$$F = -kT \log \sum e^{-\frac{U}{kT}}, \qquad (1)$$

wo U die Energie des Gases in irgendeinem quantenmäßig möglichen Zustand bedeutet, und die Zustandssumme $\sum$ über alle verschiedenen derartigen Zustände zu erstrecken ist. Die Zahl der verschiedenen quantenmäßig möglichen Zustände eines physikalischen Gebildes von f Freiheitsgraden ist gleich der Anzahl der verschiedenen Elementargebiete oder Phasenzellen von der Größe h^f, welche der Phasenraum des Gebildes enthält.

Nun ist, wenn x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten, u die kinetische Energie, $d\Omega$ den unendlich kleinen räumlichen Öffnungswinkel der Geschwindigkeitsrichtung eines Moleküls von der Masse m bedeutet, das Differentialgebiet des Phasenraums eines Gases von N gleichartigen Molekülen:

$$\left.\begin{aligned} d\sigma = dx_1\, dy_1\, dz_1 \cdot \sqrt{2m^3 u_1} \cdot du_1\, d\Omega_1 \cdots\cdots \\ \cdots\cdots dx_N\, dy_N\, dz_N \sqrt{2m^3 u_N}\, du_N\, d\Omega_N \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

[1] Sitzungsber. d. Berl. Akad. d. Wiss. 8. Juni 1916.
[2] W. GERLACH und O. STERN, Zeitschr. f. Phys. **9**, p. 349, 1922.

und die Energie des Gases, bei Vernachlässigung der potentiellen Energie:

$$U = u_1 + u_2 + \cdots + u_N, \tag{3}$$

indem man sich die Moleküle einzeln numeriert denkt. Jedem Phasenpunkt entspricht ein bestimmter Zustand des Gases. Aber jedem bestimmten Zustand des Gases entspricht nicht ein bestimmter, sondern $N!$ verschiedene Phasenpunkte, weil mit dem Zustand des Gases nicht auch die Nummern der einzelnen Atome gegeben sind, oder weil zwei Phasenpunkte, die sich nur dadurch unterscheiden, daß 2 oder mehrere Atome ihre Koordinaten und Geschwindigkeitskomponenten vertauscht haben, den nämlichen Zustand des Gases bezeichnen. Ebenso wird jede Quantenzelle durch $N!$ miteinander kongruente Zellen im Phasenraum dargestellt, die ich hier der Kürze halber als »Urzellen« bezeichnen will. Wenn nun die Quantelung überhaupt einen physikalischen Sinn haben soll, so ist nicht der Rauminhalt aller miteinander kongruenter $N!$ Urzellen, sondern der Rauminhalt einer jeden einzelnen Urzelle gleich h^{3N} zu setzen.

Betrachten wir nun alle diejenigen Zustände des Gases, bei denen die Energie jedes Atoms zwischen 0 und einem bestimmten Wert u liegt, so ist die Anzahl der Quantenzellen, welche alle diese Zustände umfassen:

$$z = \frac{1}{h^{3N}} \cdot \frac{1}{N!} \cdot \int_0^u d\sigma, \tag{4}$$

wobei die Integration von $d\sigma$ für jedes der N Atome über alle Lagen im Volumen V, über alle Richtungen im Raumwinkel 4π und über alle Energien von 0 bis u zu erstrecken ist. Dies ergibt nach (2), mit Anwendung der Stirlingschen Formel für $N!$:

$$z = \frac{1}{h^{3N}} \cdot \left(\frac{e}{N}\right)^N \cdot V^N \cdot \left(\frac{4\pi}{3}\right)^N \cdot (2mu)^{\frac{3N}{2}}. \tag{5}$$

Nach der Definition der Zustandssumme ist diese Zahl z gleich der Anzahl der Summenglieder in der Zustandssumme des Gases für den betrachteten Zustandsbereich:

$$\sum e^{-\frac{U}{kT}} = \sum_0^u e^{-\frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_N}{kT}}. \tag{6}$$

Da bei der Summierung alle Moleküle in gleicher Weise beteiligt sind, so kann man hierfür auch schreiben:

$$\sum_0^u e^{-\frac{u_1}{kT}} \cdot \sum_0^u e^{-\frac{u_2}{kT}} \cdots \sum_0^u e^{-\frac{u_N}{kT}} = \left(\sum_0^u e^{-\frac{u}{kT}}\right)^N. \tag{7}$$

Die Summe rechts kann man als die Zustandssumme eines einzelnen Atoms bezeichnen, aber nicht im leeren, sondern im gaserfüllten Volumen V, weil die Anzahl ihrer Summenglieder nicht durch die Quantelung der Zustände eines einzigen Atoms im Volumen V, sondern durch die oben vorgenommene Quantelung der Zustände des Gases gegeben ist. Nennen wir nämlich diese An-

zahl n, so ergibt sich als die Gesamtzahl aller Summenglieder in der Zustandssumme des Gases der Betrag n^N, und diese Zahl gleich z gesetzt liefert die Beziehung:

$$u = \frac{h^2}{2m} \cdot \left(\frac{3N}{4\pi eV} \right)^{2/3} n^{2/3}, \tag{8}$$

welche eine bestimmte Quantelung der Energie eines Moleküls bedingt. Denn durch die Werte $n = 1, 2, 3, \cdots$ werden ganz bestimmte Energiegebiete abgegrenzt, deren jedes einen quantenmäßig möglichen Wert der Energie enthält.

Es fragt sich nun, an welcher Stelle eines solchen Gebiets diese Energie liegt. Darüber läßt sich von vornherein nichts Bestimmtes aussagen. Um eine gewisse Allgemeinheit zu wahren, wollen wir die quantenmäßig mögliche Energie u_n eines Moleküls setzen:

$$u_n = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3N}{4\pi eV} \right)^{2/3} (n-\alpha)^{2/3}, \tag{8a}$$

wo α einen konstanten positiven echten Bruch bezeichnet. Dann liegt die Energie des $n$ten Energiegebiets an einer gewissen Stelle zwischen den Werten, die sich aus (8) für $n-1$ und für n ergeben[1]. In den extremen Fällen $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ fällt die Energie zusammen mit einer der beiden Grenzen des Energiegebiets, im ersten Falle mit Nullpunktsenergie, da u_1 von Null verschieden ist, im zweiten Falle ohne Nullpunktsenergie, da $u_1 = 0$.

Die freie Energie des Gases ergibt sich aus (1), (6) und (7):

$$F = -kTN \log \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{u_n}{kT}},$$

wo u_n der Gleichung (8a) zu entnehmen ist.

Setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{h^2}{2mkT} \left(\frac{3N}{4\pi eV} \right)^{2/3} = \sigma, \tag{9}$$

so schreibt sich die freie Energie des Gases:

$$F = -kTN \cdot \log \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sigma (n-\alpha)^{2/3}}. \tag{10}$$

§ 2.

Auf die nämliche Art läßt sich der Fall erledigen, daß das Gas nicht aus N gleichartigen Molekülen, sondern aus einem Gemisch von $N, N', N'', \cdots$ Molekülen verschiedener Arten besteht. Dann wird jeder Zustand des Gases durch $N!\,N'!\,N''! \cdots$ verschiedene Punkte im Phasenraum dargestellt, und dementsprechend zerfällt z in so viel Faktoren, als Molekülarten vorhanden sind. Für jede Molekülart ergibt sich dann eine besondere Quantelung nach

[1] Hier bezieht sich der Index n in u_n natürlich nicht mehr auf die Nummer des Moleküls, sondern auf die Nummer des Energiegebiets.

dem Muster von (8), und die freie Energie des Gases wird einfach gleich der Summe der freien Energien der Einzelgase im nämlichen Volumen. Im folgenden werden wir uns auf die Voraussetzung einer einzigen Art von Molekülen beschränken.

§ 3.

Aus der freien Energie des Gases ergibt sich in bekannter Weise durch Differenziation der Druck:

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V}, \tag{11}$$

die Entropie:

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} \tag{12}$$

und die Energie:

$$U = F + TS = F - T\frac{\partial F}{\partial T}. \tag{13}$$

Berücksichtigt man, daß die funktionale Abhängigkeit der freien Energie von Volumen und Temperatur die Form besitzt:

$$F = T \cdot f(V \cdot T^{3/2}), \tag{14}$$

so erkennt man die Gültigkeit der folgenden Beziehung:

$$U = \frac{3}{2} pV. \tag{15}$$

§ 4.

Die für die Zustandsgleichung des Gases charakteristische Größe σ in (9) schreibt sich, wenn man statt des Molekulargewichts m das Molgewicht M einführt und das Molvolumen in Litern mißt:

$$\sigma = \frac{1{\cdot}339}{M T v^{2/3}}. \tag{15a}$$

Dies ist unter gewöhnlichen Bedingungen eine sehr kleine Zahl. Daher unterscheiden sich je zwei aufeinanderfolgende Glieder der Summe $\sum$ in (10) gewöhnlich nur sehr wenig voneinander, und man kann in erster Annäherung die Summe durch das Integral ersetzen, indem man jedes Summenglied mit dn multipliziert und die Variable n stetig von 1 bis ∞ wachsen läßt.

In besserer Annäherung kann man die Eulersche Summenformel benutzen, durch welche die Summe $\sum$ gleichgesetzt wird dem genannten Integral plus der Hälfte des ersten Summengliedes, also:

$$\sum = \int_1^\infty e^{-\sigma(n-\alpha)^{2/3}} dn + \frac{1}{2} e^{-\sigma(1-\alpha)^{2/3}}. \tag{16}$$

Eine einfache Ableitung dieser Formel ist die folgende. Daß die Summe $\sum$ größer ist als das Integral, erkennt man durch Vergleichung der einzelnen Summenglieder $n = 1, 2, 3$, usw. mit den einzelnen Teilintegralen von 1 bis 2, von 2 bis 3, von 3 bis 4, usw. Daß anderseits die Summe $\sum$ kleiner ist als das Integral plus dem ersten Summenglied, erkennt man durch Vergleichung der übrigen Summenglieder $n = 2, 3, 4$, usw. mit den nämlichen Teilintegralen. Setzt man nun die Summe $\sum$ gleich dem arithmetischen Mittel aus dem zu großen und dem zu kleinen Näherungswert, so resultiert die EULERsche Formel (16).

Das Integral rechts besitzt den Wert:

$$\frac{3}{2}\frac{1}{\sigma^{3/2}}\cdot\int_{\sigma(1-\alpha)^{2/3}}^{\infty} e^{-x}\sqrt{x}\,dx = \frac{3}{2}\frac{1}{\sigma^{3/2}}\cdot\left\{\int_0^{\infty} e^{-x}\sqrt{x}\,dx - \int_0^{\sigma(1-\alpha)^{2/3}} e^{-x}\sqrt{x}\,dx\right\}$$

$$= \frac{3}{2}\frac{1}{\sigma^{3/2}}\cdot\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{2}{3}(1-\alpha)\cdot\sigma^{3/2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\sigma^3}} - 1 + \alpha\,,$$

also ist die Zustandssumme (16) in entsprechender Annäherung:

$$\sum = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\sigma^3}} + \alpha - \frac{1}{2} \qquad (17)$$

und die freie Energie des Gases nach (10):

$$F = -NkT\cdot\left\{\log\frac{3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\sigma^3}} + \frac{4}{3}\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{\sigma^3}{\pi}}\right\}$$

$$= -NkT\cdot\left\{\log\frac{eV}{h^3N}(2\pi mkT)^{3/2} + \frac{\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)h^3N}{(2\pi mkT)^{3/2}eV}\right\}. \qquad (18)$$

Daraus der Druck p nach (11):

$$p = \frac{kTN}{V}\cdot\left\{1 - \frac{\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)h^3N}{(2\pi mkT)^{3/2}eV}\right\} \qquad (19)$$

und die Energie nach (15): $U = \frac{3}{2}pV$.

Für $\alpha = \frac{1}{2}$ werden die Entartungserscheinungen bei der hier betrachteten Annäherung verschwindend klein, für $\alpha = 0$ (Nullpunktsenergie) ist der Druck und die Energie größer als im idealen Gaszustand, für $\alpha = 1$ (keine Nullpunktsenergie) sind diese Größen kleiner als im idealen Zustand, wie leicht zu verstehen.

Um eine bequemere Anschauung von der Realisierungsmöglichkeit der Abweichungen von dem idealen Verhalten zu haben, wollen wir in dem Kor-

rektionsglied von (19) statt des Volumens V den Druck p einführen und erhalten dann in entsprechender Annäherung:

$$p = \frac{kTN}{V} \cdot \left\{ 1 - \frac{\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) h^3 p}{(2\pi m)^{3/2} (kT)^{5/2} e} \right\}. \tag{19a}$$

Mißt man den Druck p in Atmosphären und setzt für das Molekulargewicht m das Molgewicht M, für das Volumen V das Molvolumen v in Litern, so nehmen die Zustandsgleichungen (19) und (19a) die Formen an:

$$p = \frac{0.0821\, T}{v} \cdot \left\{ 1 - \frac{1.17 \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)}{M^{3/2}\, v\, T^{3/2}} \right\} \tag{20}$$

und:

$$p = \frac{0.0821\, T}{v} \cdot \left\{ 1 - \frac{14.2 \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) p}{M^{3/2}\, T^{5/2}} \right\}. \tag{21}$$

Die Entartung ist hier zwar nur gering, aber doch vielleicht unter günstigen Bedingungen meßbar.

§ 5.

Betrachten wir nun auch den entgegengesetzten Grenzfall, daß die Konstante σ in (10) einen großen Wert besitzt. Dann ist in erster Annäherung die freie Energie:

$$F = N \cdot (1 - \alpha)^{2/3} \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3N}{4\pi e V} \right)^{2/3} - NkTe^{-\sigma\beta}, \tag{22}$$

wobei gesetzt ist:

$$\beta = (2 - \alpha)^{2/3} - (1 - \alpha)^{2/3}, \qquad (0.5874 < \beta < 1) \tag{23}$$

ferner der Druck nach (11):

$$p = \frac{h^2}{3m} \left(\frac{3}{4\pi e} \right)^{2/3} \left(\frac{V}{N} \right)^{5/3} \cdot \left\{ (1 - \alpha)^{2/3} + \beta e^{-\sigma\beta} \right\}, \tag{24}$$

die Entropie nach (12):

$$S = Nk(1 + \beta\sigma) e^{-\beta\sigma} \tag{25}$$

und die Energie nach (13):

$$U = \frac{Nh^2}{2m} \left(\frac{3N}{4\pi e V} \right)^{2/3} \left\{ (1 - \alpha)^{2/3} + \beta e^{-\sigma\beta} \right\}. \tag{26}$$

Hieraus ergibt sich für $\sigma = \infty$ der Nullpunktsdruck und die Nullpunktsenergie, während die Entropie gemäß dem Nernstschen Wärmetheorem verschwindet.

§ 6.

In der vorstehenden Berechnung der thermodynamischen Funktionen eines Gases steckt noch eine gewisse Willkür, die hier der Vollständigkeit halber besprochen werden soll. Es ist nämlich bei der Ableitung der Gleichung (8) aus der Anzahl z der Glieder in der Zustandssumme des Gases die Voraussetzung gemacht worden, daß in der Zustandssumme eines Moleküls im gaserfüllten Volumen V jeder der n möglichen Energiewerte durch ein einziges Summenglied dargestellt wird, oder mit andern Worten, daß die n verschiedenen Energiewerte eines Moleküls, welche zwischen 0 und u liegen, alle mit dem nämlichen statistischen Gewicht 1 in die Zustandssumme eingehen. Dann ergibt sich in der Tat die Beziehung (8) und daraus die n Energiegebiete, welche die Quantelung der Energie eines Moleküls im gaserfüllten Volumen V bedingen. Nimmt man aber allgemeiner an, daß in der Zustandssumme eines Moleküls auf der rechten Seite der Gleichung (7) die verschiedenen Energien mit verschiedenen statistischen Gewichten auftreten, dann lautet die Zustandssumme des Gases statt (7):

$$\sum e^{-\frac{U}{kT}} = \left(\sum_0^u p \cdot e^{-\frac{u}{kT}}\right)^N, \tag{27}$$

wobei in den einzelnen Summengliedern für p die statistischen Gewichte p_1, $p_2, \cdots p_n$, für u die zwischen 0 und u liegenden Energien $u_1, u_2, \cdots u_n$ zu setzen sind. Dann ist die Gesamtzahl z der elementaren Urzellen im Phasenraum des Gases nicht, wie oben, gleich n^N, sondern es ist allgemeiner:

$$z = (p_1 + p_2 + \cdots + p_n)^N \tag{28}$$

und daraus nach (5):

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = \frac{1}{h^3} \cdot \frac{e}{N} \cdot V \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot (2mu)^{3/2}. \tag{29}$$

Durch diese Beziehung wird ganz allgemein die Bedingung erfüllt, daß für hohe Temperaturen die Zustandssumme des Gases die bekannte Stern-Tetrodesche Form annimmt.

Wenn sämtliche p gleich 1 sind, resultiert wieder die frühere Gleichung (8) für die Quantelung; doch läßt sich über die Werte der p von vornherein nichts mit Bestimmtheit behaupten. Einigermaßen nahe läge es, zu setzen:

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = n^3. \tag{30}$$

Denn bei diesem Ansatz sind die Quantenstufen der Geschwindigkeit konstant[1], während nach Gleichung (8) die Quantenstufen der Geschwindigkeit für höhere Ordnungszahlen n immer kleiner werden. Wir wollen daher die Rechnungen für diesen Fall noch etwas weiter durchführen. Zunächst ergibt sich dann aus (29):

$$u = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3N}{4\pi eV}\right)^{2/3} n^2 \tag{31}$$

[1] Ich habe ihn daher auch in meiner eingangs erwähnten Arbeit benutzt, a. a. O. Gl. (52).

und aus (30):

$$p_n = n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1\,. \tag{32}$$

Entsprechend den Betrachtungen, aus denen oben die Beziehung (8a) abgeleitet wurde, erhalten wir hier für die Energie des $n$ten Summengliedes:

$$u_n = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{3N}{4\pi eV}\right)^{2/3}(n-\alpha)^2 \tag{33}$$

und daher für die freie Energie aus (1), (27) und (32):

$$F = -kTN\cdot\log\sum_{n=1}^{\infty}(3n^2 - 3n + 1)\cdot e^{-\sigma(n-\alpha)^2}, \tag{34}$$

wo σ wieder die Bedeutung (9) hat.

Der Vergleich dieses Ausdrucks mit (10) zeigt den charakteristischen Unterschied gegen die früheren Voraussetzungen. Für verschwindend kleine Werte von σ werden die Zustandssummen vollkommen identisch, entsprechend der Theorie von Stern-Tetrode. Für kleine Werte von σ erhält man auf demselben Wege wie in § 4 als Wert der Zustandssumme (34) statt (17):

$$\sum = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\sigma^3}} + \frac{3}{\sigma}\left(\alpha - \frac{1}{2}\right), \tag{35}$$

woraus hervorgeht, daß die Entartungserscheinungen bei der hier benutzten Beziehung (31) in der nämlichen Richtung liegen, aber viel bedeutender sind als bei der früheren Beziehung (8).

§ 7.

Der Methode nach einigermaßen verwandt, aber sowohl dem Inhalt als auch den Resultaten nach grundverschieden ist eine kürzlich von A. Einstein[1] aufgestellte Theorie der Entartung einatomiger Gase. Für diese Theorie ist charakteristisch der Satz, daß die wahrscheinlichste Verteilung einer großen Anzahl von gleichartigen Molekülen auf eine große Anzahl von gleichartigen Phasenzellen keine gleichmäßige ist, sondern daß bei der wahrscheinlichsten Verteilung diejenigen Zellen am häufigsten vertreten sind, welche die wenigsten Moleküle besitzen, ähnlich wie bei der wahrscheinlichsten Energieverteilung auf ein System von linearen Oszillatoren diejenigen Oszillatoren, welche weniger Energie besitzen, häufiger vorkommen als diejenigen, welche mehr Energie besitzen. Dieses eigentümliche Resultat ist nur dann zu verstehen, wenn man annimmt, daß die einzelnen Moleküle nicht statistisch unabhängig voneinander sind, in der Weise, daß, wenn man die Moleküle nacheinander auf die Zellen verteilt, die Wahrscheinlichkeit, daß ein Molekül in eine bestimmte Zelle fällt, abhängig ist von der Anzahl der Moleküle, welche die Zelle bereits empfangen hat.

---

[1] A. Einstein, Sitzungsber. d. Berl. Akad. d. Wiss. 10. Juli 1924, S. 261.

Sollte sich diese Hypothese bewahrheiten, so würde dadurch eine grundsätzliche Modifizierung der gewöhnlichen Vorstellungen von der Natur und Wirkungsart der Moleküle notwendig werden. Die Entscheidung hierüber kann natürlich nur durch die Erfahrung geliefert werden. In dieser Beziehung empfiehlt sich eine Vergleichung der EINSTEINschen Formel[1] für die Energie bei schwacher Entartung:

$$\frac{U}{N} = \frac{3}{2} kT \left\{ 1 - 0.0318\, h^3 \frac{N}{V} (2\pi m k T)^{-3/2} \right\}$$

mit der aus den vorstehenden Gleichungen (15) und (19) entspringenden Formel:

$$\frac{U}{N} = \frac{3}{2} kT \left\{ 1 - \frac{\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \cdot h^3 N}{(2\pi m k T)^{3/2} e V} \right\}.$$

Der Unterschied erstreckt sich nur auf den Zahlenfaktor im zweiten Gliede. Er ist am größten, wenn man $\alpha = 0$ setzt, also eine große Nullpunktsenergie annimmt, er verschwindet ganz, wenn man setzt:

$$\alpha = \frac{1}{2} + 0.0318 \cdot e = 0.586\,.$$

Näheres kann nur eine eingehendere Untersuchung lehren.

[1] A. a. O. Gleichung (22a).

Adresse an Hrn. Johannes von Kries in Freiburg i. B. zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 16. Januar 1925.

Hochgeehrter Herr Kollege!

Zu dem 50jährigen Doktorjubiläum, das Sie heute feiern, sendet Ihnen die Preußische Akademie der Wissenschaften zu Berlin ihre herzlichsten Glückwünsche. Mit stolzer Genugtuung dürfen Sie diesen Festtag begehen als ein Forscher, der der wissenschaftlichen Welt Werte von grundlegender Bedeutung gegeben hat. Eine glückliche Fügung des Schicksals hat Sie im Beginn Ihrer Laufbahn mit den bedeutendsten Physiologen dieser Zeit, mit Helmholtz in Berlin und Carl Ludwig in Leipzig, zusammengeführt. Und was Sie von diesen Meistern empfangen haben, war außer reichem Wissen die Auslösung Ihrer eignen Denkrichtung und Naturauffassung. Im Fluge haben Sie die akademische Laufbahn bis zum Ordinariat durchmessen und in jungen Jahren eine eigne Arbeitsstätte für die wissenschaftliche Forschung erhalten. Was Sie hier geschaffen, war nicht Kleinarbeit, es trägt alles den Stempel einheitlicher klargelegter Ziele.

Wir danken Ihnen wertvolle Studien aus dem Gebiete der Muskel- und Nervenphysiologie, Beiträge zur Physiologie des Herzens und des Kreislaufs. Ihre experimentellen Untersuchungen haben wesentlich dazu beigetragen, die Lehre der Physiologie der Optik über das von Helmholtz selbst Geschaffene hinaus zu fördern. Ihre Neuherausgabe der physiologischen Optik von Helmholtz mit ergänzender kritischer Behandlung der neueren Forschung war nicht nur ein edler Akt dankbarer Erinnerung an Ihren Lehrer, sondern auch eine wissenschaftliche Leistung von größter Bedeutung. In unermüdlicher Forscherarbeit haben Sie als Erster die Doppelnatur der Netzhaut des Auges, das Farbensehen und Dämmerungssehen erkannt, eine Entdeckung von weittragendster Bedeutung, die grundlegend für das Verständnis des Sehens bleiben wird. Ihre eigenartige und seltene Veranlagung hat Sie weiterhin befähigt, sowohl auf das Gebiet der Psychologie wie auch auf das Gebiet der Philosophie und Mathematik überzugreifen. Ihr Buch »Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung« hat auch in dem Fachkreise der Mathematiker volle Anerkennung gefunden, und die »Grundzüge einer kritischen und formalen Urteilslehre« bieten gerade auch dem Naturforscher neue Anregungen und neue Ziele. Ein ungezähmter Arbeitswille und eine unerschöpfliche Arbeitskraft hat Sie bis heute durchs Leben begleitet. Noch im vergangenen Jahre haben Sie der

wissenschaftlichen Welt mit der besten zeitgenössischen Darstellung der allgemeinen Sinnesphysiologie, einem hochbedeutenden überragenden Werk, überrascht.

In voller Geistesfrische und als produktiver Gelehrter begehen Sie Ihr Jubiläum; wir sind überzeugt, daß die wissenschaftliche Welt noch manche Frucht Ihres abgeklärten Wissens und scharfen Denkens erwarten darf. Mögen Ihnen auch die physischen Kräfte und die Gesundheit erhalten bleiben, als einem Stamm, der noch viele Jahre zum Fällen nicht bestimmt ist.

Die Preußische Akademie der Wissenschaften.

Ausgegeben am 5. März.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1925

V. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 12. Februar.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

Hr. Schottky sprach über die Harmonie der Thetafunktionen. Zweite Mitteilung.

Es wird der Versuch gemacht, die Sätze, die zur Aufstellung der zwischen den Theta eines Systems bestehenden Gleichungen und zu ihrer Auflösung notwendig sind, ohne die Anwendung von Theta-Charakteristiken zu beweisen.

Beiträge zur Mendelistischen Anthropologie. I.

Quantitative Rassenanalyse auf Grund von statistischen Beobachtungen über den Klangcharakter der Singstimme.

Von Prof. Dr. Felix Bernstein
in Göttingen.

(Institut für mathematische Statistik der Universität Göttingen.)
(Vorgelegt von Hrn. Correns am 8. Januar 1925 [s. oben S. 1].)

In einer früheren Veröffentlichung (1) habe ich gezeigt, daß die bekannten Singstimmencharaktere Baß, Bariton, Tenor beim Manne und Sopran, Mezzosopran, Alt bei der Frau mendelnde Merkmale sind, denen ein Genpaar A, a zugrunde liegt. Die Genkonstitution AA erzeugt Baß beim Manne, Sopran bei der Frau; Aa Bariton bzw. Mezzosopran, aa Tenor bzw. Alt. Die kindliche Stimme der Knaben entspricht ihrer Genformel, so daß die späteren Bässe in der Jugend Soprane sind, die späteren Baritone Mezzosoprane und die späteren Tenöre Alte.

Die Unterschiede zwischen Baß, Bariton und Tenor ließen sich, wie Hr. Dr. O. Intrau experimentell untersuchte (vgl. F. Bernstein, Zur Statistik der sekundären Geschlechtsmerkmale beim Menschen; O. Intrau, Experimentell-statistische Singstimmenuntersuchungen, Diss. Göttingen 1924), mittels des Sprachschreibers von Rousselot objektiv feststellen. Um das Ergebnis darzustellen, erinnern wir daran, daß ein Vokalton, z. B. *a*, dadurch erzeugt wird, daß ein Partialton von bestimmter, charakteristischer Höhe, der sog. Formant, ausgezeichnet wird, unabhängig davon, wie hoch der Grundton des auf den Vokal *a* gesungenen Klanges ist. Als Hauptresultat kann folgendes gelten. Läßt man Versuchspersonen der drei Stimmgruppen den einfachen Vokal *a* singen, so ist die Verteilung der Energie der Partialtöne zwischen dem Formanten und den lediglich durch den musikalischen Klang bedingten Partialtönen bei den drei Stimmgruppen wesentlich verschieden. Der Anteil der musikalischen Töne ist bei Baß am geringsten, stärker bei Bariton und am bedeutendsten bei Tenor. Für den Anteil des Formanten ergaben sich im Mittel sämtlicher Versuche bei 14 Bässen, 35 Baritonen, 15 Tenören deutscher Herkunft die Zahlen:

Baß	83.27	1.22 %
Bariton . . .	49.03	2.27 %
Tenor	33.94	2.49 %.

Diese Versuche leiden an dem Umstand, daß das benutzte Instrument nicht absolut getreu wiedergibt, sondern in einer gewissen Verzerrung, deren Ursache darin liegt, daß die Schwingungsdauer, die hier etwa 1200/sec. betrug, nicht so weit außerhalb der in Betracht kommenden Schwingungszahlen gelegen ist, daß jeder Einfluß ausgeschaltet wäre. Jedoch dürfte dieser Fehler den Vergleich kaum wesentlich stören, weil die angegebenen Verhältniszahlen auch bei den niedersten Tönen ebenso wie bei den höchsten Tönen annähernd maßgebend sind. Versuche mit einem von Hrn. Dr. Trendlenburg angegebenen Apparat, der Schwingungen bis zu 5000/sec. zu registrieren gestattet (vgl. Dr. Trendlenburg, Zur Physik der Klänge, Die Nat.-Wiss. Bd. 12, Heft 33), sind beabsichtigt. Diese verschiedene Verteilung der Energien erfolgt nun im einzelnen so, daß bei Bariton ein stärkeres Nebenmaximum neben dem Formanten oberhalb desselben eintritt, und daß bei Tenor ein zweites Nebenmaximum unterhalb des Formanten gefunden wird.

Die biologische Formverschiedenheit des Stimmorgans, welche die verschiedenen Klangfarben verursacht, ist unbekannt. Um eine reine Größenverschiedenheit dürfte es sich nicht handeln, weil eine solche selten von einem Genpaar reguliert wird. Man hat vielmehr an ähnliche Verhältnisse zu denken, wie sie zuerst Adachi (3), später Loth in vielen Arbeiten festgestellt haben, nämlich an das rassenmäßige Vorhandensein oder vollständige bzw. teilweise Fehlen bestimmter Muskeln oder Muskelpartien.

Die statistische Verteilung der drei Klassen AA, Aa und aa ist unabhängig vom Geschlecht. Bezeichnet man mit p die relative Häufigkeit des Gens A in einer vollkommen durchgemischten Bevölkerung, so sind die Häufigkeiten der Klassen

	AA	Aa	aa
bezüglich	p^2	$2p(1-p)$	$(1-p)^2$.

Unter der Annahme, daß Heiratswahrscheinlichkeit und Fruchtbarkeitsziffer in einer Ehe von der Klassenzugehörigkeit unabhängig sind, erweist sich in einer vollkommen durchgemischten Bevölkerung die Zusammensetzung der Klassen als stationär. Ein Kriterium hierfür ist dann die identische Relation

$$\frac{Aa}{2} = \sqrt{AA \cdot aa}\,,$$

die sich auf Grund der Häufigkeiten ergibt, und die wir als Quadratwurzelgesetz bezeichnet haben.

In Göttingen und Trier ergab sich auf Grund der Beobachtungen von Frl. Zander als Wert für p:

Göttingen . . . . $p = 0.602 \pm 0.009$
Trier . . . . $p = 0.587 \pm 0.011$.

Die Fortsetzung unserer Untersuchungen knüpfte an die weitere Erforschung der Grundkonstanten p an. Wir hatten einen Unterschied zwischen Göttingen und Trier auffallenderweise nicht nachweisen können, trotzdem es von vornherein nicht wahrscheinlich war, daß die Mischung der Bevölkerung aus AA- und aa-Bestandteilen genau dieselbe sein sollte. Von der Erwartung

ausgehend, daß der protestantische Bestandteil in Trier der Hauptsache nach eingewandert, und zwar erst nach 1870 eingewandert sein dürfte, haben wir eine Trennung des protestantischen und katholischen Volksteils in Trier vorgenommen. Bei dieser Trennung ergaben sich folgende Zahlen:

	kath. Bestandteil		gemischt-konfess. Bestandteil	
Knaben	336	$p = 0.565$	227	$p = 0.623$
Mädchen	307	$p = 0.560$	158	$p = 0.636$
Knaben und Mädchen	643	$p = 0.563$	385	$p = 0.629$.

Dieser Unterschied ist kein rein zufälliger; denn er übertrifft die mittlere Schwankung, welche sich ergibt, wenn man die einzelnen Schulen betrachtet um das 2.5fache. Es ergab sich nämlich für den mittleren Fehler

bei den gemischt-konfessionellen Schulen .... $\pm$ 0.0225
bei den katholischen Schulen .... $\pm$ 0.0101
und für den mittleren Fehler der Differenz ..... $\pm$ 0.0247.

In Göttingen ist die Ausscheidung der Katholiken nicht berechtigt; denn die Katholiken, welche aus der Hildesheimer Gegend stammen, unterscheiden sich in der Rasse nicht von der übrigen südhannoverschen Bevölkerung; die Katholiken, welche aus dem Eichsfeld stammen, könnten eine Differenz aufweisen, sind aber an Zahl nicht groß genug, um den Gesamtwert wesentlich zu beeinflussen. Es bleibt daher der Gesamtwert auf 0.602 bestehen. Eine genauere Prüfung der Werte in den einzelnen Göttinger Schulen, die sich insbesondere auf die Stabilität des Wertes p vom Wahrscheinlichkeitsstandpunkt mit Hilfe der Lexisschen Dispersionstheorie erstreckt, wird in einer gesonderten Arbeit von Frl. Zander vorgenommen werden.

Das erzielte positive Resultat war die Veranlassung, weitere Beobachtungen mit größeren geographischen Distanzen vorzunehmen.

Hierbei war die Vermutung leitend, daß die Baß-Sopran-Rasse eine Beziehung zu der von A. Retzius (4) eingeführten nordischen Rasse haben könne, während die Alt-Tenor-Rasse irgendwie die übrigen europäischen Rassen in sich vereinen.

Zunächst sind Beobachtungen in Italien durchgeführt worden, über die wir unten berichten.

Weitere Untersuchungen in Deutschland wurden von uns mit Mitteln der Musikabteilung des Kultusministeriums an der Nord- und Ostseeküste durchgeführt. Hierbei wurde sorgfältig die Herkunft der Eltern der untersuchten Kinder festgestellt. Wir sind dann so vorgegangen, daß die Zahlen zunächst im ganzen (Tabelle I) und dann nochmals gesondert berechnet wurden für diejenigen Kinder, deren Eltern dem Orte selbst oder der Umgegend angehörten (Tabelle II).

Die Beobachtungen sind von Hrn. Musiklehrer Hecke (Göttingen) in dankenswerter Weise durchgeführt worden.

Der Gang der Werte läßt keinen Zweifel darüber zu, daß von Westen nach Osten eine Abnahme des p erfolgt, jedoch ist dieser Unterschied in der Hauptsache ein solcher zwischen der Nordseeküste und der Ostseeküste, und

Tabelle I.

	Sopran	S bis M	Mezzo	M bis A	Alt	?	S + M + A	$\frac{S+M}{2}$	p
Flensburg									
Knaben	43	3	85	1	27		155	85.5	0.552
Mädchen	44	3	100	2	41	1	185	94	0.508
	87	6	185	3	68	1	340	179.5	0.528
Schleswig									
Knaben	73	2	103	2	46	1	222	124.5	0.561
Mädchen	20	1	19		14	1	53	29.5	0.556
	93	3	122	2	60	2	275	154	0.560
Husum									
Knaben	45	1	49	5	16		110	69.5	0.632
Mädchen	35	2	44		15		94	57	0.607
	80	3	93	5	31		204	126.5	0.620
Rendsburg									
Knaben	34	1	45	1	24		103	56.5	0.549
Mädchen	34		37	1	12		83	52.5	0.633
	68	1	82	2	36		186	109	0.586
Stolp									
Knaben	89		109	1	54		252	143.5	0.569
Mädchen	56		86		35		177	99	0.560
	145		195	1	89		429	242.5	0.565
Schivelbein									
Knaben	16	1	35	1	12	1	63	33.5	0.532
Mädchen	45	1	71	2	28	1	144	80.5	0.560
	61	2	106	3	40	2	207	114	0.551

längs der Ostseeküste ergibt sich kein wesentlicher Unterschied der gewonnenen Zahlen mehr. Ein Vergleich der beobachteten Zahlen mit den von Frl. Zander in Göttingen und Trier bestimmten würde Göttingen zwischen Husum und der Ostseeküste einreihen; dieses Resultat bedarf allerdings insofern noch der Nachprüfung, als zwar in Göttingen zwischen den Bestimmungen von Frl. Zander und Hrn. Heuke, soweit sie verglichen wurden, ein Unterschied sich nicht ergab, es aber doch, solange nicht objektive Vergleichsmöglichkeiten[1] geschaffen werden, noch immer denkbar bleibt, daß bei zeitlich und räumlich getrennten Bestimmungen Unterschiede der Klassifikation vorgenommen werden. Soweit wir selbst Anlaß hatten, solche zu argwöhnen, liegen sie in der Richtung, daß der Beobachter unwillkürlich dazu neigt, die Anforderungen an die Zugehörigkeit zur stärker besetzten Klasse zu erhöhen. Bei den Bestimmungen in Husum (Nordseeküste) traten Sopranstimmen zutage von einem so hellen Timbre, wie sie in Göttingen durch Hrn. Heuke noch

[1] Inzwischen ist durch eine andersartige Untersuchung (5) das in Rede stehende Resultat des Vergleichs der Ergebnisse von Göttingen und der Nordseeküste mit Sicherheit bestätigt worden. Auch Virchow (8 u. 9), kommt zu dem Ergebnis, daß das Gebiet der (hellfarbigen) Friesen überall an ihren Südgrenzen durch Bezirke mit mehr brünetter Bevölkerung begrenzt wird, sowie daß hinter derselben wieder hellfarbigere Bevölkerung auftaucht (Sachsen). Die Pigmentierung wird uns noch beschäftigen.

Tabelle II.

	Sopran	S bis M	Mezzo	M bis A	Alt	?	S + M + A	$\frac{S+M}{2}$	p
Flensburg									
Knaben	30	3	65	1	20		115	62.5	0.544
Mädchen	33	2	72	2	28	1	133	69	0.514
	63	5	137	3	48	1	248	131.5	0.530
Schleswig									
Knaben	58	2	82	2	36	1	176	99	0.563
Mädchen	17		17		12	1	46	25.5	0.554
	75	2	99	2	48	2	222	124.5	0.561
Husum									
Knaben	41	1	42	3	16		99	62	0.627
Mädchen	30	1	38		13		81	49	0.605
	71	2	80	3	29		180	111	0.617
Rendsburg									
Knaben	21	1	37	1	20		78	39.5	0.506
Mädchen	29		30	1	10		69	44	0.638
	50	1	67	2	30		147	83.5	0.568
Stolp									
Knaben	76		97	1	49		222	124.5	0.561
Mädchen	48		71		29		148	83.5	0.564
	124		168	1	78		370	208	0.562
Schivelbein									
Knaben	14	1	32		11	1	57	30	0.526
Mädchen	40	1	59	2	25	1	124	69.5	0.560
	54	2	91	2	36	2	181	99.5	0.550

nicht beobachtet waren. Es wäre also hypothetisch denkbar, daß dort die Anforderungen an Sopranzugehörigkeit etwas verstärkt wurden und die an Altzugehörigkeit etwas nachließen. Dieser von uns für denkbar gehaltene, in der Subjektivität der Beobachtungsmethode liegende Fehler hat, wie die Erfüllung des Quadratwurzelgesetzes zeigt, eine begrenzte Wirkung, hindert aber möglicherweise eine vollkommene Vergleichbarkeit von Untersuchungen, die längere Zeit auseinander liegen und von verschiedenen Beobachtern angestellt worden sind. Freilich gibt es historische Gründe, welche einen Abfall der p nach Osten in Schleswig-Holstein erklären würden. Es ist historisch bekannt, daß das Vordringen der Friesen in Schleswig-Holstein von der Westküste nach der Ostküste erfolgt ist, und daß sie bei diesem Vordringen vorher dort wohnhafte slawische Stämme verdrängt haben. Während jedoch die historische Überlieferung von einer vollständigen Verdrängung spricht und von einer Einwanderung der Friesen in die von den Slawen verlassenen Gebiete berichtet, zeigt unsere Untersuchung, daß entweder Bestandteile der *aa*-Rasse seinerzeit zurückgeblieben oder rückgewandert sind und sich mit der einwandernden *AA*-Rasse zu einer andersartigen Mischung verschmolzen haben. In dieser Mischung ist die *AA*-Rasse an der Ostküste von Schleswig-Holstein durchweg in einem geringeren Prozentsatz vertreten, als dies an der Westküste und sogar in Südhannover der Fall ist.

Die Beobachtungen in Sizilien, welche von Edith Bernstein angestellt wurden, boten zunächst gegenüber den deutschen Beobachtungen die Besonderheit, daß die Knabenstimmen infolge der frühen Mutation sich einer befriedigenden Bestimmung entziehen. In einem Alter von 9 Jahren fanden wir schon Stimmen, die in Mutation begriffen waren. Man hört dann z. B. in der Tiefe noch deutliche kindliche Kontraalttöne, während die Stimme in der Höhe schon die Kraft und den Klang der männlichen Tenorstimme besitzt. Sie hat dann freilich oft einen schrillen Beiklang, der für unser Ohr unschön wirkt. Wir mußten deshalb unsere Untersuchungen in der Hauptsache auf Mädchen beschränken. Auch hier sind einige Bemerkungen über den Charakter der Stimme vorauszuschicken. Die Mädchen haben im Alter von 8 bis 12 Jahren häufig schon einen ganz bedeutenden Stimmumfang. Wie die Statistik noch näher zeigen wird, sind es überwiegend Altstimmen. In der Höhe sind diese Altstimmen häufig kräftig, haben jedoch eine gewisse schnarrende und schneidende Härte. Der Ausdruck dafür ist Stridulo. Inwieweit dieser eigentümliche Beiklang Naturanlage oder lediglich eine dem Volksgeschmack entsprechende Angewöhnung ist, ist schwer zu entscheiden. Auch bei uns hört man die niederen Gesangsgattungen (Kabarette, Bänkelsänger) mit einem vergleichsweise ähnlichen Beiklang gesungen, ohne daß er der Naturanlage in Deutschland entsprechen dürfte. In Sizilien möchten wir jedoch eine Naturanlage annehmen, weil wir diese Art des Stridulo ganz isoliert in Messina und Reggio wiedergefunden haben, und überhaupt den Eindruck haben, als ob hier eine Beimischung arabischer Elemente die mögliche Ursache bilden könnte. Leider haben wir statistische Beobachtungen über diese Erscheinung, die wohl lohnend sein würden, nicht ausgeführt. Statistische Beobachtungen über das nach den Untersuchungen von Haecker und Ziehen (6) erbliche Merkmal der musikalischen Begabung haben wir nicht angestellt. Eine auffallende Tatsache ist uns entgegengetreten, der wir doch Erwähnung tun wollen. Die nur durch den schmalen Meeresarm der Straße von Messina getrennten Städte Messina und Reggio zeigten einen eklatanten Unterschied in der musikalischen Begabung der Schulkinder zugunsten von Messina. Die Tatsache wurde uns von Hrn. Prof. Perrone Grande in Reggio, welcher sowohl in Reggio als auch in Messina unterrichtlich tätig gewesen ist, auf das bestimmteste bestätigt. Zugleich zeigt die Bevölkerung von Messina einen heiteren und aufgeschlosseneren, die von Reggio einen ernsteren und zurückhaltenderen Charakter. Über die Technik der Beobachtungen ist zu sagen, daß wir stets eine bestimmte Auswahl von Liedern hatten, die allen Kindern bekannt waren, und die wir deshalb immer wieder singen ließen. Die Bestimmung des Klangcharakters war in den weitaus meisten Fällen eine leichtere als in Deutschland, da über den Altcharakter in den meisten Fällen nach wenigen Tönen gar kein Zweifel sein konnte. Das Altersintervall, das wir untersuchten, wird durch die Häufigkeitstabelle S. 67 ersichtlich. Oberhalb des von uns untersuchten Alters treten die Mädchen in eine Art Stimmwechsel ein, der in der Hauptsache bewirkt, daß die Stimme in den höheren Lagen kräftiger wird. Sache der Ausbildung ist es dann, dort die fehlende Weichheit der Töne zu erreichen, damit dann diese Altstimmen imstande

Altersverteilung der untersuchten Kinder; in Prozenten.

	6 Jahre	7 Jahre	8 Jahre	9 Jahre	10 Jahre	11 Jahre	12 Jahre	13 Jahre	14 Jahre	15 Jahre	16 Jahre	17 Jahre	18 Jahre	19 Jahre	
Pisa	0.43	3.83	5.53	10.64	17.88	16.39	22.96	11.07	7.44	1.70	1.49	0.43	0.21		100.00
Palermo			11.89	17.30	29.74	20.00	15.66	4.87	0.54						100.00
Messina			9.09	14.15	22.23	26.24	19.20	9.09							100.00
Reggio					5.56	8.33	25.00	13.88	8.33	25.00	2.78	2.78	2.78	5.56	100.00

sind, Sopranpartien zu übernehmen, was bei dem Fehlen natürlicher Soprane eine Notwendigkeit wird. In derselben Weise werden auch Tenorstimmen als Baritonisten und Baritonisten als Bassisten ausgebildet. Die Bässe sind in Sizilien so selten, daß der Baß das höchstbesoldete Fach in der Oper ist.

Bei der Klassifikation wurde so vorgegangen, daß als Altstimmen ohne weiteres diejenigen gerechnet wurden, welche in der Tiefe die Resonanz aufweisen, welche man als charakteristisch für Alt anzusehen pflegt. Wenn diese Resonanz nicht vorhanden war, und statt dessen die Mitteltöne am klangvollsten erschienen, so wurde die Stimme als Mezzo bezeichnet. Soprane, die in der Höhe jenen eigentümlichen, glockenhaften Klang haben, der den deutschen Sopranen eigen ist, haben wir an den untersuchten Kindern mit statistisch verschwindenden Ausnahmen nicht gehört. Andererseits muß noch hervorgehoben werden, daß eine solch ausgesprochene Resonanz, wie wir sie bei den italienischen Mädchenstimmen gefunden haben, in Deutschland ebenfalls zu den statistischen Seltenheiten gehört. Der Unterschied zwischen Alt und Mezzosopran, den wir bei den italienischen Beobachtungen gemacht haben, war an sich ein ganz unzweifelhafter und nicht weniger scharf als zwischen den deutschen Stimmgruppen. Die Frage jedoch, ob die von uns als Mezzosopran bezeichnete Klasse in Italien mit der in Deutschland bezeichneten Klasse genau übereinstimmt, kann noch nicht als endgültig entschieden betrachtet werden. Es ist möglich, daß wir einige Stimmen, die in Deutschland als Altstimmen imponieren, in Italien in die Mezzosoprangruppe eingereiht haben. Die Ergebnisse der Beobachtung sind in nachstehender Tabelle zusammengestellt.

	p	Alt		Mezzo		Sopran	
		beob.	theoret.	beob.	theoret.	beob.	theoret.
Pisa	0.1663 ± 0.0187	269	276 ± 9.2	124	110 ± 8.9	4	11 ± 3.2
Palermo	0.1235 ± 0.025	132	134 ± 5.6	41	38 ± 5.4	1	3 ± 1.6
Messina	0.125 ± 0.037	61	61 ± 3.8	18	18 ± 3.7	1	1 ± 1.1
Reggio	0.138 ± 0.064	21	22 ± 2.3	8	7 ± 2.3	—	1 ± 0.8

Wir haben zunächst die Berechnung der p in der früheren Weise unter Zugrundelegung eines monohybriden Schemas vorgenommen. (Vgl. »Zur Statistik der sekundären Geschlechtsmerkmale beim Menschen« von Felix Bernstein, Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, math.-

phys. Klasse 1923.) Das Ergebnis zeigt die obige Tabelle, wo wir bei der Berechnung die zweifelhaften Fälle fortgelassen haben. Die gute Übereinstimmung zwischen beobachteten und theoretischen Zahlen läßt das monohybride Schema als zulässig erscheinen. Jedoch ist die Empfindlichkeit einer solchen Übereinstimmung als Kriterium für Monohybridie um so geringer, je kleiner das p ist, weil naturgemäß die Soprangruppe bei kleinen zu erwartenden Beobachtungszahlen von allen Beobachtungszahlen, die gering sind, um weniger als den mittleren Fehler abweicht. Es ist deshalb auf die gefundene Übereinstimmung kein besonderer Wert zu legen. Hiernach dürfte es erlaubt sein, folgendes Resultat zu formulieren:

Die Bevölkerung in Palermo, Messina, Reggio, Pisa weist eine Mischung auf zwischen einem Kontraalttypus und einem helleren Stimmtypus in den folgenden Prozentverhältnissen:

Palermo	Kontraalt (tiefer Alt)	:	hellem	Stimmtypus	(Sopran)	= 87.65 %	: 12.35 %
Messina	» »	» :	»	»	»	= 87.50 %	: 12.50 %
Reggio	» »	» :	»	»	»	= 86.20 %	: 13.80 %
Pisa	» »	» :	»	»	»	= 83.37 %	: 16.63 %

Es entsteht nun die Frage, inwieweit diese Ergebnisse wiederum mit den historischen Aufklärungen sowie mit den sonstigen bekannten anthropologischen Rassenverhältnissen in Italien in Übereinstimmung stehen. Sprechen wir zunächst von den historischen Angaben, so steht ja außer Zweifel, daß auf der Insel Sizilien sowohl wie in der Toskana in historischer Zeit sehr verschiedene Rassenelemente ihren Sitz genommen haben. In Palermo waren in historischer Zeit die Normannen einerseits, die Araber andererseits. In der Toskana sind Einwanderer nicht nur aus dem alpinen Gebiet, sondern darüber hinaus aus Gallien und Germanien sicher bezeugt und auch ein schwacher Einschlag arabischer Elemente bezeugt. Auf starke Verschiedenheiten innerhalb verhältnismäßig kleiner Distanzen muß man schon deshalb immer gefaßt sein, weil in der Regel Eroberer und Einwanderer sich zunächst geschlossen niederlassen und erst ganz allmählich mit den Voreinwohnern zu einer homogenen Mischung verschmelzen, ein Prozeß, der selbst heute, wo die Erinnerung an die Invasionen längst verschwunden ist, an vielen Stellen Europas, namentlich auf ländlichem Gebiet, noch unvollkommen vollzogen ist, während die Städte, insbesondere die Großstädte, diesen Prozeß in den letzten 50 Jahren erheblich gefördert haben. Da wir ausschließlich in Städten untersucht haben, so mußten wir in der Regel homogene Mischungen vorfinden, und das erklärt, warum wir das Quadratwurzelgesetz durchweg so vorzüglich bestätigt gefunden haben, zumal sich diese gesetzmäßige Verteilung bei monohybridem Schema bereits in der ersten Bastardgeneration einstellt. Die historische Deutung in Palermo dürfte nun hypothetisch zunächst dahin zu geben sein, daß die Kontraaltrasse wohl zugleich den europäischen Mittelmeerbestandteil, d. h. also die schon prähistorisch vorhandene und nahezu völlig die in historischer Zeit eingedrungene griechische Bevölkerung umfaßt, ferner auch den arabischen Bestandteil. Inwieweit diese Einwanderer, besonders die Griechen, mittelmeerfremde Bestandteile enthielten, bleibe dahingestellt. Auf der andern Seite möchten wir den hellen Stimmtypus dem Eindringen der Normannen zuschreiben. Bei dieser Auffassung würde also der normannische Be-

standteil in Palermo, Messina und Reggio mit durchschnittlich 1.2—13 °/₀ anzunehmen sein.

In Pisa ist wohl ohne Zweifel ein gewisser Prozentsatz des alpinen Typus vorhanden. Wir müssen uns daher in bezug auf Pisa vorsichtiger dahin ausdrücken, daß wir den Anteil von 16.63 °/₀ (s. oben S. 68) auf die alpine und nordische Rasse zu verteilen haben, während der Restbestandteil von 83.37 °/₀ auf die Mittelmeerrasse in Pisa entfällt. Vergleicht man mit den historischen Daten, so möchte es auffallend erscheinen, daß in Pisa der Einschlag der alpinen und nordischen Rasse nicht stärker gefunden wurde. Andererseits sind aber die gefundenen Zahlen in hohem Maße historisch und kulturhistorisch interessant, weil sie aufs deutlichste zeigen, daß sowohl die normannische Invasion in Unteritalien wie die lombardische Invasion in Oberitalien selbst zur Zeit ihrer stärksten Entwicklung Volksmassen des Mittelmeertypus gegenübergestanden haben müssen, die an Gesamtzahl gewaltig überlegen waren, wenn wir nicht eine ganz abnorm hohe differentielle Sterblichkeit zuungunsten des ersteren Bestandteils annehmen wollen, wobei man in gewissem Umfange an die Malaria denken könnte. Wie die Bastardierung auf die Immunität wirkt, ist ja leider noch gänzlich unbekannt. Für eine solche Auffassung würde es immerhin sprechen, daß Sardinien einerseits die reinste Provinz der Mittelmeerrasse ist, sowohl nach Dolichozephalie als nach Körpergröße und Pigmentierung (vgl. Livi, 7); andererseits aber Sardinien auch heute noch eins der am stärksten malariaverseuchten Gebiete Italiens ist. Man muß übrigens noch in Rücksicht ziehen, daß die historisch bekannten Einwanderungen nordischer Elemente nicht die ersten gewesen sind, so daß auch ein gewisser Prozentsatz nordischer und alpiner Rasse bereits von den Einwanderern vorgefunden wurde. Der Prozentsatz der Einwanderer gegenüber den eingesessenen Elementen war also noch geringer, als es den obigen Zahlen entspricht. Berücksichtigt man freilich, daß sie selbst Mittelmeerrasse besaßen, so erscheint er wieder etwas größer, aber sicher nicht in einem entsprechend ins Gewicht fallenden Maße. Auf die relativ geringe Zahl der Normannen weisen auch historische Angaben hin, und es wird auf diesen Umstand zurückgeführt, daß die Normannen — ähnlich den Engländern in Indien — sehr bald dazu übergingen, ihre Herrschaft weniger auf Gewalt als auf diplomatische Vermittlung zwischen den rivalisierenden Kräften der Insel zu stellen. Auch in der Toskana muß die numerische Unterlegenheit der erobernden nordischen und alpinen Einwanderer für den Gang der historischen Entwicklung ausschlaggebende Bedeutung besessen haben. Die Hochblüte der Kultur wird hier wie in Sizilien immer in den Epochen erreicht, in denen die Vermischung anscheinend schon in der Hauptsache im Gange ist, aber das Mischungsverhältnis noch nicht den definitiven Grad erreicht hat. Daß der anthropologischen Mischung ein Anteil an der eigentümlichen Kulturblüte der Renaissance zukommt, ist naheliegend, wenn man überlegt, daß ja die ungemischten Elemente vorher für sich zu ähnlicher Hervorbringung nicht gelangt sind. Man kann freilich im Zweifel darüber sein, ob es die Tatsache der physischen oder der kulturellen Mischung gewesen ist, welche bei dem beobachteten Kulturaufschwung ausschlaggebend wurde. Das Beispiel der englischen Herrschaft in Indien lehrt, daß auch eine reine Symbiose,

wenn nur die richtige Ergänzung fehlender Eigenschaften stattfindet, ohne physische Vermischung einen großen Kulturaufschwung bewirken kann. Immerhin ist es naheliegend, zu vermuten, daß in der Renaissancekultur die physische Mischung nicht bedeutungslos gewesen ist, sondern vielmehr den eigentümlichen Charakter derselben wesentlich beeinflußt habe.

Dieser eigentümliche Charakter ist nach Jakob Burckhardt im Gegensatz zu den historisch vorangehenden Epochen ein ausgeprägter Individualismus. Daß sich ein solcher bei den Bastarden der beiden sich hier mischenden Rassen einstellt, ist sowohl aus der physischen wie aus der kulturellen Mischung, die nach beiden Richtungen die Tradition bricht, leicht zu begreifen. Im übrigen liegt die Vermutung nahe, daß das damalige Mischungsverhältnis, das ja bei den Bastarden erster Generation 1 : 1 ist, nicht ungünstig für das Hervorbringen besonderer Leistungen unter Vereinigung der Vorzüge beider Rassen gewesen ist.

Über weitere Untersuchungen im Gebiete der alpinen Rasse wird später berichtet werden. Blickt man auf die Ergebnisse in Italien und Deutschland, so wird man sagen dürfen, daß die Singstimmenstatistik die Möglichkeit bietet, eine Analyse vorzunehmen, welche die Stärke der wichtigen Gruppen rezenter Rassen erkennen läßt. Insbesondere scheint in Italien die Mittelmeerrasse, in Deutschland die nordische Rasse quantitativ in ihren heutigen Prozentsätzen bestimmt. Und es läßt sich in ganz Europa anscheinend der Bestandteil der nordischen Rasse mit dieser Methode abschätzend begrenzen. Bis zu einem gewissen Grade gestatten diese Resultate Rückschlüsse auf den Vorgang der letzten historisch bezeugten Mischungsvorgänge.

Für die Unterstützung der neuen deutschen Untersuchungen beehre ich mich dem preußischen Ministerium für Wissenschaft, Kunst und Volksbildung meinen aufrichtigen Dank auszusprechen. Ferner gilt mein Dank all den Behörden und Personen des Inlandes und Auslandes, welche uns durch Entgegenkommen und freundliche Unterstützung die Untersuchungen ermöglicht haben; insbesondere gilt dieser Dank dem Provveditore agli Studi per la Sicilia, Sig. Prof. Comm. Donato Gravino für die Erlaubniserteilung zu Untersuchungen in Sizilien, Hrn. Prof. Dr. Michele de Francis für freundliche kollegiale Unterstützung; ferner Hrn. Prof. Dr. Averardo de Negri in Pisa für sein liebenswürdiges Interesse und Entgegenkommen.

Literaturnachweis.

1. F. Bernstein, Zur Statistik der sekundären Geschlechtsmerkmale beim Menschen, Göttinger Nachrichten, math.-phys. Klasse 1923.
2. O. Intrau, Experimentell-statistische Singstimmenuntersuchung, Diss. Göttingen, 1924.
3. Adachi, Beiträge zur Anatomie der Japaner, Zeitschrift f. Morphologie und Anthropologie Bd. II, 1900, S. 221.
4. A. Retzius, Om formen of Nordboernes Cranier, 1842.
5. F. Bernstein, Beiträge zur Mendelistischen Anthropologie II.
6. V. Haecker u. Th. Ziehen, Über die Erblichkeit der musikalischen Begabung, Ztschr. f. Psych. u. Phys. d. Sinnesorgane, Abt. I, Bd. 88, 89, 1922/23.
7. R. Livi, Anthropometria militare, Rom 1896.
8. R. Virchow, Farbe der Haut, Haare und Augen der Schulkinder Deutschlands. Archiv f. Anthropologie, Bd. 16, 1886, S. 275—475.
9. R. Virchow, Beiträge zur physischen Anthropologie der Deutschen mit besonderer Berücksichtigung der Friesen. Abh. d. Kgl. Akad. d. Wiss. Berlin, 1876 (ersch. 1877), S. 1—388.

Beiträge zur Mendelistischen Anthropologie. II.

Quantitative Rassenanalyse auf Grund von statistischen Beobachtungen über den Drehsinn des Kopfhaarwirbels.

Von Prof. Dr. Felix Bernstein
in Göttingen.

(Institut für mathematische Statistik der Universität Göttingen.)
(Vorgelegt von Hrn. Correns am 8. Januar 1925 [s. oben S. 2].)

Die Bedeutung mendelnder Merkmale für die menschliche Rassenforschung besteht darin, daß es durch die statistische Auszählung derselben möglich erscheint, die Rassengemische, welche wir allenthalben antreffen, in ihre ursprünglichen Bestandteile zu zerlegen. Die theoretischen Hilfsmittel, welche für diese Zerlegung benötigt werden, sind von mir in zwei Abhandlungen entwickelt. Die erste (1) betrifft das Merkmal der Klangfarbencharaktere der Singstimme (Baß, Bariton, Tenor bzw. Sopran, Mezzosopran, Alt). Die Fortsetzung der Untersuchungen, welche an verschiedenen Stellen zwischen Sizilien und der Nordsee durchgeführt wurden, ergab, daß das hier vorliegende, einfach mendelnde Merkmal eine erste quantitative Analyse der rezenten europäischen Rassen ermöglicht. Der Baß-Sopran-Charakter erweist sich als ein Charakter der nordeuropäischen Rassen und ist geeignet, eine scharfe Definition des Hauptbestandteils derselben zu geben. Eine solche hatte bereits A. Retzius (2) im Auge, als er seinen dolichozephalen, blonden und blauäugigen Typus der nordischen Rasse aufstellte. Diese Definition, obgleich wohl grundsätzlich richtig, führte infolge der komplizierten Vererbungsweise dieser Merkmale nicht zu einer einwandfreien Abgrenzung bei Rassengemischen, so daß wir eine unbedingte Identität mit unserer neuen Bestimmung der Natur der Sache entsprechend nicht behaupten können, wenngleich wir meinen, daß unsere Bestimmung dem entspricht, worauf A. Retzius hinzielte. Wo Verwechslungen ausgeschlossen sind, werden wir für die Baß-Sopran-Rasse den eingebürgerten Namen der nordischen Rasse gebrauchen. Die ausführliche Publikation der Gesamtresultate findet sich in Teil I der Beiträge zur Mendelistischen Anthropologie.

Die zweite Untersuchung betrifft das von Landsteiner (3) zuerst entdeckte Phänomen der Blutgruppen, deren Erblichkeit v. Dungern und Hirschfeld (4) zuerst bewiesen haben. Nachdem L. und H. Hirschfeld (5) durch Untersuchungen innerhalb der Entente-Armee in Saloniki gezeigt haben, daß die verschiedenen Menschenrassen sich hinsichtlich der statistischen Zusammensetzung der Blutgruppen weitgehend unterscheiden, ist rasch ein großes Material in allen Teilen der Erde von verschiedenen Forschern beigebracht worden; die Verarbeitung desselben zu einer quantitativen Rassenanalyse ist von mir vorgenommen worden, wobei die richtige Genhypothese sich erst

bei Gelegenheit dieser Analyse herausstellte (6, 7). Es hat sich dabei das Vorhandensein dreier multipler Allelomorphe entsprechend den Vorstellungen von Morgan, Nilsson-Ehle und Baur zwingend erwiesen.

Das Studium der Synthese mendelistischer Populationen ist ein weiteres Hilfsmittel der quantitativen Rassenanalyse und verdient daher hier Erwähnung. Der Mischungsvorgang zweier homozygotischer Stämme mit monohybridem, dihybridem und allgemeiner polyhybridem Charakter ohne und mit Koppelung ist wohl zuerst von W. Weinberg (8) systematisch in Angriff genommen. In den letzten Jahren sind wichtige Arbeiten von S. Bernstein (9) und Tietze (10) über diesen Gegenstand erschienen. Auf einem neuen und sehr übersichtlichen Wege hat J. v. Behr (11) in einer unter meiner Leitung entstandenen Dissertation den Gegenstand behandelt. Die nachfolgende Mitteilung betrifft ein weiteres mendelndes Merkmal des Menschen, nämlich den Drehsinn des hinteren Kopfhaarwirbels.

Das in Rede stehende Merkmal war bei einem Embryo im 5. Monat deutlich erkennbar. Wieweit die Entstehung des Wirbels zurückreicht, habe ich nicht festgestellt. In den Spirituspräparaten, welche wir gesehen haben, erschien das haarlose, kreisförmige Zentrum des Wirbels als eine kleine Hauteinsenkung, so daß möglicherweise dort die Haut eine etwas veränderte Zellbeschaffenheit besitzt. Daß anatomisch die Wirbelbildung auf der verschieden gerichteten Schiefe des Einwachsens der Haarwurzel in die Kopfhaut beruht, ist ohne weiteres erkennbar. Neuere Untersuchungen von anatomischer Seite fehlen[1]. Vom entwicklungsmechanischen Standpunkt ist anzunehmen, daß das Zentrum des Wirbels im Sinne von Spemann (12) organisierend wirkt, da man leicht beobachtet, daß der Einfluß des Wirbels auf die Richtung des Kopfhaares innerhalb einer Fläche variiert, die ausgesprochene Tendenz zur Kreisform besitzt und die von etwa $^1/_2$ cm Radius angefangen bis zu Radienlängen schwankt, die nur überhaupt mit der hinteren Kopfform verträglich sind. Noch deutlicher ist der lokale Charakter der Wirbelbildung bei dem gleichfalls nicht seltenen Auftreten von Stirnwirbeln ausgesprochen. Diese sind immer deutlich von der übrigen Strichrichtung abgegrenzt, sobald ihr Zentrum dem Haarfelde selbst angehört — was nicht immer der Fall ist. Die Spiralen, welche dem Auge so deutlich entgegentreten, sind nichts morphologisch Wirkliches, sondern die rein durch optischen Eindruck entstehenden Kurvenscharen, deren Tangenten die durch die schiefe Richtung des Haaransatzes gegebenen orientierten Geraden sind. Einen je größeren Winkel diese mit den vom Mittelpunkt gezogenen Radien bilden, um so größer ist ceteris paribus die Anzahl der scheinbaren spiraligen Umkreisungen des Wirbelmittelpunktes. Der Winkel der Wachstumsrichtung mit den vom Mittelpunkt ausgehenden Radien ist übrigens nicht in allen Fällen konstant oder konstant wachsend bzw. abnehmend, sondern schwankt häufig zwischen Wachstum und Abnahme.

---

[1] G. Schwalbe hat in »Menschenaffen« (Selenka, Heft 15, 1911) 93 Affenembryonen untersucht. Er findet schon vor dem Durchbruch der Haare durch die Epidermis einen deutlichen —Scheitelwirbel bei Macacus cynomolgus. Seine Annahme, daß die Doppelwirbel der Menschen infolge der Haarrichtung (Stirnteil: stirnwärts; Nackenteil: nackenwärts) notwendig lediglich von — + Form seien, widerspricht den Beobachtungen der 3 anderen Kombinationen, und damit fällt auch seine Anschauung der Bedingtheit des Wirbeldrehsinns durch die allgemeine Kopfhaarrichtung. Beide sind vielmehr selbständig verursacht. — Frühere Literatur ebenda.

Eine nähere Darlegung, die ich mir vorbehalte, würde an dieser Stelle zu weit führen. Wir wollen hier einzig und allein die beiden Fälle unterscheiden, daß der Winkel so beschaffen ist, daß die Spiralen in der Umgebung des Zentrums rechts- bzw. linksgewunden sind. Der Unterschied ist deshalb rein alternativ, weil in nächster Nähe des Zentrums die Wachstumsrichtung auf dem Radius nahezu senkrecht steht, so daß die Spirale fast tangential an dem kleinen, haarlosen Kreise des Zentrums in der einen oder anderen Richtung anhebt. Daß in der Nähe des Zentrums die in der Entwicklung zumeist vom Organisationszentrum beeinflußte und daher am meisten ungestörte Wirkung vorliegt, ist anzunehmen, und deshalb war hier auch nach den der entwicklungsgeschichtlichen Vererbungsregel von V. Haecker (13) am ehesten rein alternativ mendelnde Vererbungsweise zu erwarten.

Die Kopfhaarwirbel treten bei beiden Geschlechtern in vollkommen gleicher Weise und mit ähnlichen Modifikationen auf. Der Nachweis der statistischen Gleichheit wird weiter unten besprochen. Den Drehsinn der einfachen Wirbel werden wir im folgenden als negativ (—) bezeichnen, wenn die Richtungen in der Nähe des Zentrums einen Umlauf im Urzeigersinn bestimmen, und als positiv (+) im entgegengesetzten Falle. Für dieses rein alternative Merkmal behaupten wir nun in der Tat den streng monohybriden Mendelismus. Die Lage des Wirbelzentrums insbesondere zur Symmetrieebene haben wir gleichfalls eingehend studiert; auch hier tritt eine rassenmäßige Verschiedenheit zutage; da es sich aber um ein stetig variierendes Merkmal handelt, war ein einfacher Erbgang nicht zu erwarten, wenngleich Anzeichen für alternative Vererbung vorliegen. Wir werden darauf näher an anderer Stelle eingehen. Eine häufige Modifikation bildet das Auftreten von Doppelwirbeln. Wir bezeichnen nach dem Drehsinn und der Lage diese als — —, + —, — + und + +, wobei das erste Zeichen den Drehsinn des links gelegenen Wirbels angibt. Die Doppelwirbel kommen sowohl symmetrisch zur Medianebene wie asymmetrisch vor und liegen auch zuweilen auf derselben Seite der Medianebene. Bei den — + und + — Doppelwirbeln kann man insofern von einer gewissen Zusammengehörigkeit sprechen, als ihre kreisförmigen Einflußflächen im allgemeinen nicht getrennt liegen, sondern vielmehr unter Abänderung der ursprünglichen Richtungen und Entstehen eines deutlichen Indifferenzpunktes übereinandergreifen. Wir bezeichnen diese beiden Formen als polare Doppelwirbel. In zwei Fällen von insgesamt etwa 3500 Beobachtungen wurden drei hintere Kopfhaarwirbel gefunden, deren Zentren in gleichen Abständen ungefähr geradlinig senkrecht zur Medianebene angeordnet waren. Die Wirbel waren in beiden Fällen gleich stark und der Drehsinn von links nach rechts + + — bzw. + — —. Im ersteren Falle lag der mittlere Wirbel in der Medianebene, im zweiten Falle lag die Medianebene in der Mitte der beiden letzten Wirbel. Der letztere Fall betraf einen Zwilling, der sicher zweieiig war, da der andere Zwilling weiblichen Geschlechtes war.

Eine andere Besonderheit, die wir anführen möchten, betrifft einen Fall von 6 Wirbeln: 2 Stirnwirbeln, einem Doppelwirbel — —, dessen Zentren beide auf der rechten hinteren Kopfhälfte lagen, und zwei Wirbeln im Nacken links.

Ein nächstes Interesse stellt die Frage nach der Abhängigkeit oder Unabhängigkeit der Wirbelbildung vom Geschlecht dar. Die Bestimmung des Wirbels im Frauenkopfhaar bietet Schwierigkeiten, wenn das Haar sehr voll und schwer ist. Sie wurde in den meisten Fällen mit Hilfe von Friseuren vorgenommen. Der Sitz des Wirbels kann, sobald das Haar über denselben hinweg in einer Richtung gekämmt ist, mit den Fingerspitzen immer gefühlt werden, weil das Haar sich beim Kämmen in der der Strichrichtung entgegengesetzten Richtung hebt. Der Richtungssinn ist ebenfalls dadurch sicher, daß die sich hebenden Teile beim entgegengesetzten Kämmen auf die andere Seite des Wirbels rücken müssen. Entgehen kann dem ungeübten Beobachter ein Doppelwirbel. Es ist daher auf das Vorhandensein eines solchen besonders aufzupassen. Daß die Bestimmungen richtig sind, dafür bürgt im gewissen Sinne auch der Umstand, daß die beobachteten Prozentsätze der unterschiedenen Gruppen bei den Frauen, soweit sich das erwarten läßt, den bei dem großen Knabenmaterial der Schulkinder beobachteten Prozentsätzen folgen. Es ergab sich folgende Tabelle:

	—	+	Doppelwirbel	insgesamt
Frauen	117	31	8	156
in Prozenten	75	19.9	5.1	100
Knabenbeobachtungen in Schulen	2502	636	234	3372
in Prozenten	74.2	18.9	6.9	100

Aus dieser Tabelle tritt die Unabhängigkeit der Wirbelbildung vom Geschlecht deutlich hervor.

Die Feststellung des Erbganges geht aus den Familienbeobachtungen hervor, deren Ergebnisse wir in der Tabelle S. 75 aufführen.

Die Beobachtungen legen die Hypothese nahe, daß der negative Drehsinn dominant, der positive Drehsinn rezessiv ist. Prüfen wir von diesem Standpunkt aus diejenigen Familien, in denen beide Eltern den negativen Drehsinn aufweisen, während bei den Kindern auch der positive Drehsinn auftritt! Wir bezeichnen das dominante Minus-Gen mit R, das rezessive mit r. Diese Ehen können nur von der Form $Rr \times Rr$ sein. Wegen der Kleinheit der Kinderzahl sind diejenigen Familien durch Auslese ausgefallen, bei welchen infolge Zufalls keine Kinder rr aufgetreten sind. Um diese Auslesewirkung zu korrigieren, legen wir die durchschnittliche Kinderzahl von $s = 3.5$, welche sich bei diesen Familien ergibt, zugrunde. Die Wahrscheinlichkeit des Auftretens einer Ehe mit nur Minus-Kindern beträgt dann $(\frac{3}{4})^s = (\frac{3}{4})^{3.5} = 0.36$, so daß $1 - (\frac{3}{4})^{3.5} = 0.64$ die Wahrscheinlichkeit des Auftretens der wirklich beobachteten Ehen ist. Die wirklich unter Risiko stehende Ehen- bzw. Kinderzahl erhält man danach, indem man die beobachtete Kinderzahl $K = 28$ mit

$$\frac{1}{1 - (\frac{3}{4})^{3.5}} = \frac{1}{0.64} = 1.563$$

erweitert. Unter diesen $28 \cdot 1.563 = 43.76$ Kindern sind $\frac{1}{4} = 10.94$ + Kinder zu erwarten, während die Beobachtung 10 Kinder ergibt.

Nr.	Vater	Mutter	Kinder			Nr.	Vater	Mutter	Kinder		
			–	+	2				–	+	2
1	–	–	3				Übertrag ...		53	10	
2	–	–	2			22	–	–	2		1
3	–	–	3			23	–	–	3	2	2
4	–	–	1			24	–	+	2		
5	–	–	6			25	–	+	2	1	
6	–	–	3			26	–	+	1	1	
7	–	–	2			27	–	+	2	1	
8	–	–	1			28	–	+	2	2	
9	–	–	3			29	–	+	8		1
10	–	–	3			30	–	+	2		1
11	–	–	2			31	–	+	3		1
12	–	–	1			32	–	+	2		1
13	–	–	5			33	+	–	2		
14	–	–	3	1		34	+	–	2		
15	–	–	2	1		35	+	–	2	2	
16	–	–		2		36	+	–	2		1*
17	–	–	1	1		37	+	–		1	1*
18	–	–	2	1		38	+	+		3	
19	–	–	4	1		39	+	+	3	5	
20	–	–	1	1		40	2	–			1
21	–	–	5	2		41	–	2**	2		1
			53	10					95	28	11

* + –; ** – –; die übrigen – +.

Die Prüfung der Übereinstimmung der Ergebnisse bei den Ehen zwischen — und + Eltern mit dem monohybriden Schema läßt sich auf folgende Weise durchführen. Die genannten Ehen sind entweder von der Form $RR \times rr$ oder $Rr \times rr$. Das Zahlenverhältnis zwischen beiden Ehen haben wir zu berechnen aus dem durchschnittlichen Verhältnis der Gene R und r in der Gesamtbevölkerung. Die Berechnung des letzteren erfordert die Zugrundelegung der Genhypothese des monohybriden Schemas, wie es soeben bewiesen worden ist. Es muß aber, wenn man dieses zugrunde legt, die Beobachtung in den zur Diskussion stehenden Familien mit dem monohybriden Schema des weiteren quantitativ übereinstimmen, falls nicht in den Voraussetzungen ein Irrtum vorlag. Diese Bestätigung ergibt sich nun auch im folgenden. In der Tat ist die Erwartung der Kinder in den Ehen von der Form $RR \times rr$ ausschließlich auf Rr, d. h. — Kinder gerichtet. In den Ehen $Rr \times rr$ erwarten wir gleich viel — Kinder und + Kinder. Nach der später anzuführenden Bevölkerungsanalyse ist das Verhältnis der Anzahl von R zu der Anzahl von r im Mittel (Iserlohn und Göttingen) $R : r = 0.572 : 0.428$. Die Individuen von den Formeln RR, Rr und rr sind daher mit folgenden bezüglichen Häufigkeiten zu erwarten:

RR	Rr	rr
0.328	0.489	0.183

Bei vollkommen zufälliger Verteilung der Ehen, wobei wir annehmen, daß der Drehsinn des Kopfhaarwirbels auf die Gattenwahl keinen Einfluß

ausübt, ergeben sich die erwartungsgemäßen Prozentsätze der Ehen nach folgendem quadratischen Schema:

	RR	*Rr*	*rr*
RR....	10.75	16.05	6.00
Rr	16.05	23.90	8.95
rr.....	6.00	8.95	3.35

Hiernach ist das Verhältnis der Zahl der Ehen von der Form $RR \times rr$ zu der Zahl der Ehen von der Form $Rr \times rr$ gleich 6.00%: 8.95%. Setzt man daher die Erwartungen der — Kinder in allen Ehen der Form $- \times +$ in diesem Verhältnis zusammen, so ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von

$$\frac{6.00 \cdot 1 + 8.95 \cdot 0.5}{6.00 + 8.95} = 0.701.$$

Die Gesamtzahl der Kinder war 22, so daß die Erwartung 15.42 Kinder beträgt. Die beobachtete Zahl der — Kinder betrug 15, so daß eine vorzügliche Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung besteht. Hiernach erscheint das monohybride Mendelsche Schema für den Wirbeldrehsinn völlig erwiesen.

Man kann danach fragen, ob die von uns hypothetisch angenommene, vollkommen zufällige Verteilung der Ehen, die wir soeben benutzt haben, um zwischen den Ehen der Form $RR \times rr$ und $Rr \times rr$ zu unterscheiden, sich auch in den Zahlenverhältnissen manifestiert, welche der Beobachtung zugänglich sind. Da die Zahl der Ehen nur klein ist (41), so sind allerdings beträchtliche Fehler zu erwarten; dementsprechend lohnen sich die Prüfungen feinerer Klasseneinteilungen nicht. In der Tat stimmt zunächst der Prozentsatz der Ehefrauen vom + bzw. — Charakter nicht sehr scharf mit der allgemeinen Bevölkerung. Wir fanden nämlich:

	—	+
Ehefrauen.......	28 = 71.9 %	11 = 28.1 %
Ehemänner......	32 = 82.1 %	7 = 17.9 %
Gesamtmaterial...	79.7 %	20.3 %.

Auf Grund des letzten Verhältnisses war für die Ehegatten folgende theoretische Verteilung zu erwarten:

—	+
31.9 ± 2.41	7.1 ± 2.41.

Wie man sieht, ist diese Übereinstimmung bei den Frauen nicht innerhalb des mittleren Fehlers gelegen.

In den Prozentsätzen der Ehefrauen muß auch die erwartungsgemäße Zahl der — — Familien von der beobachteten Zahl abweichen. Die erstere beträgt:

$$(10.75 + 2 \cdot 16.05 + 23.9)\,\% \text{ von } 39 = 0.6675 \cdot 39$$
$$= 26.05 \text{ mit einem mittleren Fehler von } \pm 2.94$$

gegen eine beobachtete Zahl von 23, also auch hier eine Differenz.

Eine weitere Prüfung der Erblichkeit, die freilich auch weniger scharf ist als die früheren, ergibt der Vergleich der Anzahl der Familien mit 2 — Eltern und ausschließlich — Kindern mit ihrer erwartungsgemäßen Anzahl.

Die Anzahl der Familien mit 2 — Eltern, welche nur — Kinder ergeben haben, beträgt 13. Für die erwartungsgemäße Anzahl dieser Familien ergibt sich auf Grund des obigen Eheschemas

$$\frac{10.75 \cdot 1 + 32.1 \cdot 1 + 23.9 \cdot (\frac{3}{4})^3}{100} \cdot N,$$

wenn wir mit N die Gesamtzahl der beobachteten Familien bezeichnen. Wir finden also:

beobachtet 13
theoretisch . . . . 16.65 ± 1.87.

Diejenigen Ehen, in denen die Eltern beide den Plus-Charakter haben, dürfen nur Kinder vom Plus-Charakter liefern. Da nur 3.35 % solcher Ehen zu erwarten sind, hatten wir in unserem Material nur eine Ehe dieser Art zu erwarten, die sich auch eingestellt hat. Diese Ehe hatte 3 + Kinder. Außerdem wurde uns aber noch eine zweite Ehe dieser Art mitgeteilt, in welcher 5 + und 3 — Kinder aufgetreten sein sollen. Der Zweifel richtet sich hier gegen die Bestimmung des Wirbels der Frau, der auf der rechten Seite angegeben ist, wodurch die Vermutung nahe liegt, daß ein — Wirbel auf der linken Seite übersehen worden ist, so daß in Wahrheit ein Doppelwirbel — + vorlag[1]. Da die — + Wirbel an Zahl die + — und — — Wirbel übertreffen, so liegt die Annahme nahe, daß den Doppelwirbeln von dieser Form in bezug auf das R-Gen die Formel RR zukommt.

Bei dieser Prüfung sind zunächst alle Familien fortgelassen worden, in denen Doppelwirbel aufgetreten sind. Das sind im ganzen 10 Familien des Materials von 41 Familien. In dem Falle, daß etwa die Eigenschaft der Doppelwirbelbildung mit einer der beiden Arten des — oder + Wirbels gekoppelt sei, würde eine Auslese vorliegen, welche die Zahlenverhältnisse, die wir geprüft haben, beeinflussen würde. Nach einem fundamentalen Satz der Populationslehre (vgl. Diss. v. Behr (11)) wirken diese Koppelungen allerdings nicht auf die statistischen Massenverhältnisse ein, sobald diese durch Panmixie ausgeglichen sind.

Die Familienbeobachtungen geben nun an sich Aufschluß darüber, daß auch die Doppelwirbelanlage nach einem monohybriden Schema vererbt wird. In der Tat haben wir 8 Familien mit Eltern ohne Doppelwirbel mit 34 Kindern, unter denen solche mit Doppelwirbel auftreten (vgl. Nr. 22, 23, 29, 30, 31, 32, 36, 37 der Tabelle auf S. 75). Die Anzahl der Kinder mit Doppelwirbeln beträgt 9, was mit der, nach analoger Rechnung wie oben S. 74, erwartungsgemäßen Zahl 12.4 ± 3.06 gut übereinstimmt. In der Tabelle S. 75 treten nur in 2 Familien der Form — × — Kinder mit Doppelwirbeln auf.

[1] Die Familie war unserer direkten Beobachtung nicht zugänglich. Eine Nachuntersuchung, bei der wir den vom ersten Resultat uninformierten Untersucher gebeten hatten, die Mutter besonders sorgfältig zu untersuchen und speziell auf die Möglichkeit eines Doppelwirbels zu achten, ergab, daß die Mutter nur einen Wirbel, 1/2 cm rechts von der Medianebene, und zwar im Gegensatz zur ersen Untersuchung einen — Wirbel besäße. Die Aufklärung eines kritischen Beobachtungsfalles zugunsten der Theorie ist befriedigend, gibt aber andererseits Veranlassung, nochmals zu betonen, daß wir nicht jedes einzelne Bestimmungsresultat in bezug auf die Ehefrauen, insbesondere wo wir nicht selbst die Beobachter waren, verbürgen können.

Die infolgedessen naheliegende Frage, ob *RRdd*-Individuen vielleicht den Doppelwirbel nicht zeigen, ist noch zu klären.

Unter den Doppelwirbeln beobachten wir folgende Lageverhältnisse, indem wir mit l die linke, r die rechte Wirbelkomponente bezeichnen:

	—	—	—	+	+	—
	l	r	l	r	l	r
cm links der Mitte (durchschnittl.)	0.74		1.34		1.76	
cm rechts der Mitte (»)		2.33		1.37		1.83
Anzahl links der Mitte	5	/	83	7	17	/
Anzahl rechts der Mitte	5	11	8	88	2	19
Anzahl in der Mitte	2	1	7	3	/	/

Aus diesen Zahlen geht mit Deutlichkeit hervor, daß die Doppelwirbel mit entgegengesetztem Drehsinn eine ausgesprochene Tendenz zu symmetrischer Lage aufweisen, so daß wir berechtigt sind, die Abweichungen als Störungen aufzufassen. Anders die gleichsinnigen Doppelwirbel, bei welchen eine Beziehung zur Symmetrieebene nicht mehr hervortritt. Hiernach sind die ungleichsinnigen oder polar gebildeten Doppelwirbel eine Gattung für sich. Wir möchten die beiden Formen — + und + — als die alternativ verschiedenen, symmetrischen Urformen des Kopfhaarwirbels ansehen.

Das Gen, welches Doppelwirbelanlage erzeugt, wollen wir mit d (duplex) bezeichnen, während das alternative Fehlen dieses Gens mit D bezeichnet werde. In Wahrheit möchte ich annehmen, daß ein Gen für Doppelwirbelanlage stets vorhanden ist, daß aber in den meisten Fällen der Sekretionsablauf in ein Embryonalstadium zurückgewichen ist, welches vor der Ausbildung des sichtbaren Kopfhaarwirbels liegt, und daß es nur in einem gewissen Prozentsatz der Fälle noch in einem solchen Stadium Sekretion erzeugt, in dem eine Erscheinung des Doppelwirbels möglich wird. Die einfachen Wirbel sind nach dieser Auffassung die entwicklungsmäßig spätere, asymmetrisch gewordene Form des polaren, symmetrischen Doppelwirbels. In der Tat findet eine scharfe Relation zwischen den beiden Arten des polaren Doppelwirbels und den beiden Arten des einfachen Wirbels statt. Es ergeben sich nämlich die folgenden Prozentsätze:

$$\frac{\text{Anzahl der einfachen — Wirbel}}{\text{Anzahl der einfachen + Wirbel}} = \frac{79.73\,\%}{20.27\,\%},$$

$$\frac{\text{Anzahl der — + Doppelwirbel}}{\text{Anzahl der + — Doppelwirbel}} = \frac{80.97\,\%}{19.03\,\%}.$$

Hiernach ergibt sich also das merkwürdige Resultat, daß die — + Wirbel in die — Form, die + — Wirbel in die + Form übergehen. Danach sind also die Erbformeln für die Doppelwirbel folgende:

— + Doppelwirbel: *RRdd* und *Rrdd*
+ — Doppelwirbel: *rrdd*.

Das Merkwürdige in der Erscheinung liegt darin, daß anscheinend der Drehsinn des linksgelegenen Wirbels allein persistiert, sofern die Doppelwirbel-

anlage nicht zur Ausbildung kommt. Es tritt hier also noch eine Asymmetrieerscheinung des Wachstums hinzu. Die weitere Eigentümlichkeit, die noch ergänzend hinzutritt, ist nun die, daß der persistierende links gelegene Wirbel statistisch nach rechts wandert und im Durchschnitt 0.63 cm rechts von der Medianebene sich fixiert. Wir finden nämlich für den Durchschnitt der Lage folgende Zahlen:

	– Wirbel	Anzahl	+ Wirbel	Anzahl
Iserlohn	0.48 cm rechts	946	0.48 cm rechts	242
Göttingen und Langensalza	0.98 cm rechts	458	0.73 cm rechts	105.

Es ist keineswegs unmöglich, daß ein Doppelwirbel bei jedem Individuum in einem bestimmten Embryonalstadium irgendwie nachzuweisen ist, und daß die Wanderung des persistierenden linken Wirbels, die durch die statistischen Ergebnisse entwicklungsgeschichtlich nahe gelegt wird, auch tatsächlich ontogenetisch bei Embryonen nachweisbar ist.

Wir haben auch bei einer ganzen Anzahl von Familien die Lage des Wirbels zur Symmetrieebene gemessen. Das Material ist an sich jedoch nicht umfangreich genug, um eine Entscheidung über den Erbgang zu fällen, zumal da eine einfache Klasseneinteilung nicht ersichtlich ist. Ein Versuch, eine Klasseneinteilung links — Mitte — rechts vorzunehmen, hat sich nicht bewährt, vielmehr liegt ein zunächst stetig veränderliches Merkmal vor, für dessen Vererbungsweise die Annahme eines monohybriden Schemas wahrscheinlicherweise nicht ausreicht.

In unserer Mitteilung über die Singstimmen, Beiträge zur Mendelistischen Anthropologie I, haben wir gezeigt, wie sich die statistische Verteilung eines auf monohybridem Schema beruhenden Mendelschen Merkmals zur quantitativen Rassenanalyse verwenden läßt. Wir gehen nun hinsichtlich der Haarwirbel in gleicher Weise vor. Die bisher beobachteten statistischen Zahlen sind in folgender Tabelle dargestellt:

Gesamtmaterial.

	+	–	Doppelwirbel					An-zahl
			– +	+ –	– –	+ +	ohne nähere Angabe	
Göttingen	45	239	10	3	2	/	2	301
Mühlhausen i. Th.	63	234	8	7	1	/	2	315
Langensalza	77	282	12	2	/	/	/	373
Kissingen	48	174	12	3	/	/	/	237
Iserlohn	254	939	79	14	10	1	/	1297
Flensburg	27	110					7	144
Schleswig	39	170					9	218
Husum	16	86					13	115
Rendsburg	7	47					5	59
Stolp	45	181					23	249
Schivelbein	15	40					9	64
	636	2502	121	29	13	1	70	3372

Die Beobachtungen wurden von F. Bernstein, W. Heuke, W. Schwarzburg, O. C. Siepmann durchgeführt.

Beschränkt man sich auf diejenigen Kinder des Materials, deren Eltern beide aus den genannten Orten oder ihrer näheren Umgebung stammen, so reduzieren sich die Beobachtungszahlen auf folgende Tabelle:

Ortsansässige Kinder.

	+	—	Doppelwirbel					Anzahl
			— +	+ —	— —	+ +	ohne nähere Angabe	
Mühlhausen	38	157	5	5	1	/	1	207
Langensalza	54	209	8	2				273
Kissingen	18	49	6	2				75
Iserlohn	147	538	50	7	7	1		750
Flensburg	17	87					5	109
Schleswig	31	140					7	178
Husum	13	77					12	102
Rendsburg	4	35					2	41
Stolp	42	157					22	221
Schivelbein	12	36					9	57
	376	1485	69	16	8	1	58	2013

Um nun aus diesen Zahlen die Prozentsätze der Gene R und r in der Bevölkerung zu berechnen, sind zunächst die Klassen — und — + einerseits und andererseits die Klassen + und + — zusammenzufassen. Hinsichtlich der Klassen — — und + + würden wir uns im Zweifel befinden, wie wir sie auf die eben genannten Klassen zu verteilen hätten. Glücklicherweise ist jedoch der Einfluß dieser Klassen numerisch nicht mehr ins Gewicht fallend. Wir wollen sie deshalb bei der Berechnung ausschalten. Bei den Untersuchungen in Flensburg, Schleswig, Husum, Rendsburg, Stolp und Schivelbein sind die beiden Arten der Doppelwirbel nicht unterschieden. Infolgedessen sind sie gänzlich auszuscheiden. Bei dieser Verkleinerung des Materials kann nach dem oben (S. 78) Gesagten nur eine unwesentliche Verschiebung des Prozentverhältnisses erfolgen. Aus den so berechneten Prozentsätzen für die Individuen der Erbformel RR und Rr einerseits und rr andererseits ergibt sich nun der Prozentsatz der r-Gene als Quadratwurzel aus dem Prozentsatz der rr-Individuen. Wir geben diese Klassenprozentsätze und die Werte für R und r in folgender Tabelle, getrennt nach Einheimischen und Gesamtbevölkerung:

	Gesamtbevölkerung					Ortsansässige				
	$RR+Rr$	rr	R	r	Anzahl	$RR+Rr$	rr	R	r	Anzahl
Göttingen	83.8	16.2	59.8	40.2	301					
Mühlhausen	77.6	22.4	52.7	47.3	315	79.0	21.0	54.2	45.8	207
Langensalza	78.8	21.2	54.0	46.0	373	79.5	20.5	54.7	45.3	273
Kissingen	78.5	21.5	53.6	46.4	237	73.3	26.7	48.4	51.6	75
Iserlohn	79.2	20.8	54.3	45.7	1297	79.3	20.7	54.5	45.5	750
Flensburg	80.3	19.7	55.6	44.4	144	83.6	16.4	59.5	40.5	109
Schleswig	81.3	18.7	56.8	43.2	218	81.9	18.1	57.5	42.5	178
Husum	84.3	15.7	60.4	39.6	115	85.6	14.4	62.0	38.0	102
Rendsburg	87.0	13.0	63.9	36.1	59	89.7	10.3	67.9	32.1	41
Stolp	80.1	19.9	55.4	44.6	249	78.9	21.1	54.1	45.9	221
Schivelbein	72.7	27.3	47.8	52.2	64	75.0	25.0	50.0	50.0	57

Die Trennung des Materials nach Ortsansässigen und Gesamtbevölkerung läßt einen gewissen Rückschluß zu auf den in der letzten Generation erfolgten Rassenausgleich. Wir haben Zunahme der r-Rasse in sämtlichen Orten mit Ausnahme von Kissingen und Stolp. Die durchschnittliche prozentische Zunahme beträgt in den übrigen Orten 1.85 %, im Maximum 4% in Rendsburg, im Minimum 0.2% in Iserlohn. Hierbei ist zu beachten, daß die untersuchten Orte mit Ausnahme von Kissingen, Mühlhausen und Langensalza in Norddeutschland gelegen sind, so daß bei ihnen eine Zuwanderung aus Süddeutschland zu erwarten ist mit der Tendenz, den Prozentsatz von r an das allgemeine deutsche Mittel anzugleichen. Umgekehrt hat Kissingen, ein ausgesprochen süddeutscher Ort, wie zu erwarten war, eine beträchtliche Zunahme von R-Rasse aufzuweisen[1].

Der Vergleich zwischen den Zahlen der R- bzw. r-Rasse und den in der Arbeit über Singstimmen gegebenen Zahlenwerten läßt eine große Übereinstimmung zwischen dem Prozentsatz p der Baß-Sopran-Rasse und dem Prozentsatz der r-Rasse erkennen, wie aus folgender Zusammenstellung hervorgeht:

	Gesamtbevölkerung				Ortsansässige			
	Anzahl	p	R	Anzahl	Anzahl	p	R	Anzahl
Göttingen	1804	0.602	0.598	301				
Flensburg	340	0.528	0.556	144	248	0.530	0.595	109
Schleswig	275	0.560	0.568	218	222	0.561	0.575	178
Husum	204	0.620	0.604	115	180	0.617	0.620	102
Rendsburg	186	0.586	0.639	59	147	0.568	0.679	41
Stolp	429	0.565	0.554	249	370	0.562	0.541	221
Schivelbein	207	0.551	0.478	64	181	0.550	0.500	57

Dieses Resultat legt die Vermutung nahe, daß die R-Rasse mit der Baß-Sopran-Rasse identisch ist. Da wir nun andererseits in der Baß-Sopran-Rasse wesentlich das zu erblicken haben, was A. Retzius als nordische Rasse charakterisiert, so würde sich ergeben, daß der — Drehsinn des Haarwirbels ein dominantes Merkmal der nordischen Rasse ist, und daß wir in der Auszählung desselben eine Methode besitzen, den Prozentgehalt der nordischen Rasse an jeder Stelle exakt zu bestimmen. Freilich besitzen wir noch kein Material über den Drehsinn des Haarwirbels in Italien, und deshalb müssen wir noch die Möglichkeit offen lassen, daß es sich um ein nur zufälliges Zusammentreffen der beiden Prozentsätze in den genannten deutschen Orten handelt.

Für die Richtigkeit unserer Gesamtauffassung spricht besonders der Umstand, daß auch hier die Nordseeküste das Maximum der R-Rasse zeigt, und daß dieses entsprechend der Abnahme des nordischen Bestandteils nach Osten und Süden abklingt. Das entspricht dem stufenweisen Vordringen der Germanen, insbesondere der Friesen, von Westen nach Osten. Andererseits er-

[1] Für eine differentielle Auslese der R- und r-Rasse, bzw. Baß-Sopran- und Alt-Tenor-Rasse haben sich keine Anhaltspunkte ergeben.

klärt sich die relativ hohe Ziffer des *R* in Göttingen ebenfalls aus der alten Besiedlung dieses Gebiets durch die Cherusker und späteren Sachsen, zu der erst nach den Gräberfunden etwa seit dem Jahre 1000 eine solche durch brachyzephale Rasse hinzugetreten ist (vgl. 14).

Literaturnachweis.

1. F. Bernstein, Zur Statistik der sekundären Geschlechtsmerkmale beim Menschen, Göttinger Nachrichten, math.-phys. Klasse 1923.

2. A. Retzius, Om formen of Nordboernes Cranier, 1842.

3. Landsteiner, Über Agglutinationserscheinungen des normalen menschlichen Blutes, Wiener Klin. Wochenschr. 1901, 26.

4. v. Dungern u. Hirschfeld, Über gruppenspezifische Strukturen; Über Vererbung gruppenspezifischer Strukturen des menschlichen Blutes usw., Zeitschr. f. Immunitätsforschung 1909, 1910, 1911.

5. L. u. H. Hirschfeld, Serological difference between the blood of different races, Lancet, Oktober 1919.

6. F. Bernstein, Zusammenfassende Betrachtungen über die erblichen Blutstrukturen des Menschen, Zeitschr. f. ind. Abst. u. Vererbungslehre (noch nicht erschienen).

7. F. Bernstein, Ergebnisse einer biostatistischen zusammenfassenden Betrachtung über die erblichen Blutstrukturen des Menschen, Klin. Wochenschr. 1924, Nr. 33, S. 1495—97.

8. Weinberg, Archiv f. Rass. u. Gesellschaftsbiologie Bd. 7, 1910, S. 35.

9. S. Bernstein, Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences 1923, Heft 12.

10. Tietze, Zeitschr. f. angewandte Mathematik und Mechanik 1923.

11. v. Behr, Zur Theorie Mendelistischer Massenerscheinungen. Diss., Göttingen 1924.

12. Spemann in zahlreichen Arbeiten (vgl. auch Literaturangaben in Selbstreferaten in »Naturwissenschaften«, 1924).

13. V. Haecker, Methoden der Vererbungsforschung beim Menschen, in Abderhaldens Handbuch der biologischen Arbeitsmethoden, 1924.

14. M. W. Hauschild, Die Göttinger Gräberschädel, Zeitschr. für Morphologie und Anthropologie Bd. 21, 1919—21.

15. G. Schwalbe, Über die Richtung der Haare bei den Affenembryonen, in Studien über Entwicklungsgeschichte der Tiere von Emil Selenka, Heft 15, Menschenaffen, 1911.

Spektralphotometrische Untersuchungen über die Sonnenkorona.

Von H. Ludendorff.

(Vorgetragen am 27. November 1924 [s. Jahrg. 1924 S. 323].)

1. Einleitung.

Zu Anfang des Jahres 1923 richtete die Regierung der Vereinigten Staaten von Mexiko an die deutsche Reichsregierung eine Einladung, sie möge eine Expedition von deutschen Astronomen zur Beobachtung der totalen Sonnenfinsternis vom 10. September des genannten Jahres nach Mexiko entsenden; die mexikanische Regierung erklärte sich dabei in großherziger Weise bereit, die gesamten Kosten der Expedition vom Heimathafen an bis wieder dahin zurück zu tragen. Mit der Organisation des Unternehmens wurde ich betraut; als Teilnehmer gewann ich Prof. R. Schorr und Prof. F. Dolberg von der Hamburger Sternwarte in Bergedorf sowie Dr. A. Kohlschütter und Obermechaniker W. Herrmann vom Astrophysikalischen Observatorium in Potsdam. Wir sind der mexikanischen Regierung, den Behörden und vielen Privatpersonen, die uns während der Expedition mit Rat und Tat unterstützt haben, zu tiefstem Danke verpflichtet.

Über den Verlauf der Expedition und das Arbeitsprogramm habe ich ganz kurz in den Astronomischen Nachrichten, Bd. 220, S. 77, berichtet. Unser Beobachtungsort war das Dorf Pasaje im Staate Durango ($\varphi = +24°$ $56'$, $\lambda = 103° 49'$ westl. v. Gr., Meereshöhe 1600 m). Unsere Beobachtungen wurden vom Wetter außerordentlich begünstigt. Während der 3^m währenden Totalität war der Himmel in weitem Umkreise um die Sonne vollkommen klar und die Luft von der größten Durchsichtigkeit. Im Gegensatz dazu hatten die zahlreichen, großartig ausgerüsteten Expeditionen, die in Nieder-Kalifornien und auf den Kalifornien vorgelagerten Inseln stationiert waren, völlig trüben Himmel. Die mexikanische und die nordamerikanische Expedition, die südlich von Pasaje in Yerbanis ihre Lager aufgeschlagen hatten, wurden während der ersten Hälfte der Totalität in ihren Beobachtungen durch Wolken gestört; eine zweite mexikanische Expedition in Laguna Seca (im Staate San Luis Potosí) hatte verschleierten Himmel. Völlig klar hatte es außer der unsrigen nur die kleine Expedition der University of Arizona, welche in Puerto Libertad (im Staate Sonora) beobachtete.

In der vorliegenden Abhandlung berichte ich lediglich über die Resultate der von mir persönlich unternommenen Arbeit. Es handelt sich um eine Untersuchung des Verlaufes der Intensitätskurve des kontinuierlichen Korona-

spektrums in verschiedenen Höhenschichten, eine Untersuchung, die bisher in auch nur angenähert strenger Weise noch nicht durchgeführt war, und die von großem Interesse für die Beurteilung der Natur der Sonnenkorona ist.

Ehe ich auf die Ableitung meiner eigenen Ergebnisse eingehe, möchte ich kurz die bisherigen Resultate und Vermutungen über die Intensitätskurve des Koronaspektrums zusammenstellen. Ich bin nicht ganz sicher, ob diese Zusammenstellung wirklich vollständig ist, denn die Literatur über die totalen Sonnenfinsternisse ist äußerst umfangreich und verstreut, so daß sie nicht einmal in der reichen Bibliothek des Astrophysikalischen Observatoriums lückenlos vorhanden ist. Zudem ist diese Literatur in hohem Grade unübersichtlich, da vielfach die für die Wissenschaft ganz belanglosen Berichte über die Reisen und äußere Ereignisse alles andere überwuchern.

2. Frühere Untersuchungen über die Intensitätsverteilung im kontinuierlichen Spektrum der Korona.

Der erste, der eine Mitteilung über die Intensitätsverteilung im Koronaspektrum gemacht hat, ist A. Schuster[1]. Aus einer mit einem Spaltspektrographen gewonnenen Aufnahme dieses Spektrums bei der Finsternis vom 29. August 1886 schließt er, daß »the maximum of actinic intensity of the coronal light was decidedly more towards the red end of the spectrum than that of Sun light«. Eine zweite, bei derselben Finsternis gewonnene, sehr stark unterbelichtete Platte bestätigte diese Erscheinung, die nach Schusters Ansicht zeigt, daß das kontinuierliche Spektrum hauptsächlich von glühender Materie herrührt, die niedrigere Temperatur als die Sonne selbst besitzt. Ein Teil des Koronalichtes muß freilich, sagt er, zurückgeworfenes Sonnenlicht sein, wie die Polarisationsbeobachtungen und das Vorhandensein Fraunhoferscher Linien beweisen, aber es kann sich dabei nur um einen kleinen Teil des Gesamtlichtes handeln, da sonst durch die Streuung des Lichtes das Intensitätsmaximum nach Violett verschoben sein müßte, wie bei dem diffusen Himmelslichte.

Hervorzuheben ist, daß die hier in Betracht kommenden Aufnahmen eine Störung dadurch erlitten haben, daß während eines Teiles der Totalität eine Wolke vor der Sonne stand. Dadurch kann die Qualität des Lichtes geändert worden sein, so daß das obige Resultat anfechtbar ist. Über die Art und Weise, wie das Vergleichspektrum gewonnen ist, wird nichts gesagt.

Bei der Finsternis vom 16. April 1893 machte H. Deslandres[2] eine ähnliche Wahrnehmung wie Schuster bei der von 1886. Deslandres folgert aus seiner Aufnahme, daß die Sonnenkorona relativ reicher an Licht großer Wellenlängen ist als die Sonnenscheibe, und er glaubt sogar feststellen zu können, daß die Verschiebung des Intensitätsmaximums nach Rot mit wachsender Höhe in der Korona zunimmt. Die Aufnahme ist aber durch Cirren hindurch

---

[1] L. Darwin, A. Schuster, E. W. Maunder, On the Total Solar Eclipse of August 29, 1886. (Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A. Vol. 180, 1890, S. 326, 331.)

[2] H. Deslandres, Observations de l'éclipse total du soleil du 16 avril 1893. (Annales du Bureau des Longitudes, V, 1897, S. C 40.)

gemacht, und außerdem scheint die Luft voller Staub gewesen zu sein; man kann dieser Beobachtung also wohl kein großes Gewicht beilegen.

Bei der Finsternis vom 21.—22. Januar 1898 konstatierte der indische Astronom Naegamvala[1] wiederum, daß das Intensitätsmaximum im Koronaspektrum »is much displaced towards the red« gegen das »ordinary solar spectrum«. Über die Herstellung des Vergleichspektrums ist ebensowenig gesagt wie in den vorangehenden Fällen. Der Zustand des Himmels war einwandfrei.

Durch bolometrische Messungen fand C. G. Abbot[2] gelegentlich der Finsternis vom 28. Mai 1900, daß das Koronalicht sehr arm an infraroten Strahlen sei; im Gegensatz dazu glaubte H. Deslandres[3] auf Grund von Messungen mit einer Mellonischen Thermosäule bei derselben Finsternis behaupten zu dürfen, das Licht der Korona sei sehr reich an solchen Strahlen.

S. A. Mitchell[4] plante bei der Finsternis vom 30. August 1905 eine etwas genauere Untersuchung der Intensitätskurve des kontinuierlichen Koronaspektrums. Neben das Koronaspektrum wurden zum Vergleich Aufnahmen des Sonnenspektrums mit verschiedenen Expositionszeiten gemacht. Die Aufnahme des Koronaspektrums mißriet jedoch.

Bei derselben Finsternis verglich Millochau[5] nach einer mir nicht verständlichen Methode das Spektrum der Korona mit dem des diffusen Himmelslichtes, und er macht auch einige angenäherte Zahlenangaben darüber. Sollten diese Beobachtungen von Interesse sein, so mußte offenbar noch der Vergleich mit dem Spektrum der Sonne selbst gemacht werden, dessen Intensitätskurve von der des Spektrums des Himmelslichtes bekanntlich stark abweicht; dieser Vergleich fehlt aber.

Wichtig sind dagegen K. Schwarzschilds Untersuchungen bei derselben Finsternis[6]. Sie beruhen auf Aufnahmen mit einer Prismenkamera, die eigentlich für den vorliegenden Zweck wenig geeignet ist, da sie keine reinen Spektren liefert. Für die Einzelheiten der Untersuchung muß auf Schwarzschilds ausführliche Publikation verwiesen werden; er faßt seine Resultate in folgende Worte zusammen: »Im Wellenlängengebiet 350—500 $\mu\mu$ stimmt die Intensitätsverteilung im Koronaspektrum mit der im Sonnenspektrum nahe überein. Betrachtet man die Unterschiede näher . . ., so erscheint die Korona im Ultraviolett schwächer als die Sonne, das Intensitätsmaximum in der Korona gegen das der Sonne nach längeren Wellenlängen zu verlegt.« Aus verschiedenen Gründen betrachtet Schwarzschild aber seine Ergebnisse als nicht völlig einwandfrei, und namentlich sieht er diejenigen, die die Unterschiede zwischen Korona- und Sonnenspektrum betreffen, als »in sich noch nicht fest begründet« an.

---

[1] K. D. Naegamvala, Report of the Total Solar Eclipse of January 21—22, 1898, as Observed at Jeur in Western India. (Publications of the Maharaja Takhtasingji Observatory, Poona, Vol. 1, 1902, S. 37.)

[2] Astrophysical Journal, Vol. XII, 1900, S. 73.

[3] Ebenda S. 289.

[4] Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. 66, 1905—06, S. 326.

[5] Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris, Vol. 141, 1905, S. 818.

[6] K. Schwarzschild, Über die totale Sonnenfinsternis vom 30. August 1905. (Astronomische Mitteilungen der Kgl. Sternwarte zu Göttingen. Dreizehnter Teil. 1906. S. 18ff. und 59ff.)

Bei der Finsternis vom 3. Januar 1908 glaubten W. W. Campbell und E. P. Lewis[1] wiederum eine Rotverschiebung des Intensitätsmaximums des Koronaspektrums feststellen zu können; ersterer gibt die Lage dieses Maximums auf seiner Platte zu $\lambda = 4675$ Å. E. an. Die Platten sind aber durch Wolken hindurch aufgenommen — es hatte erst wenige Sekunden vor der Totalität aufgehört zu regnen — und sind daher für spektralphotometrische Schlüsse nicht geeignet.

Bei der gleichen Finsternis machte C. G. Abbot[2] wieder bolometrische Untersuchungen über die Korona; sein Ergebnis ist, daß »the coronal radiation proves to be almost, but not quite, as rich in visible light as the ordinary solar radiation coming from points 0.7 radius from the center of the Sun's disk«. Seine Resultate vom Jahre 1900 zieht Abbot bei dieser Gelegenheit selbst in Zweifel.

Bei der Sonnenfinsternis vom 21. August 1914 stellte R. Witting[3] visuelle spektralphotometrische Messungen an der Korona an. Als Vergleichslicht benutzte er eine elektrische Glühlampe, deren Spektrum er andererseits an das des Mondes und an das des Hefnerlichtes anschloß. Er findet, daß, mit dem Mondlichte verglichen, das Koronalicht im Rot etwas intensiver als im Blau-Grün ist. Bei der Kürze der totalen Phase (132^s) können die Beobachtungen (es sind 9 Stellen im Spektrum gemessen) nicht sehr zuverlässig gewesen sein, was sich auch meines Erachtens in dem Gange der Zahlen ausspricht.

Ricco erhielt bei derselben Finsternis mit einer Prismenkamera auf farbenempfindlichen Platten Aufnahmen des kontinuierlichen Koronaspektrums. Indem er das Aussehen des Koronaspektrums mit dem des Spektrums der Photosphäre (ohne photometrische Messungen) verglich, schloß er, daß im weniger brechbaren Teile (bis weit ins Rot) die Intensitätskurven beider Spektren ungefähr gleich verlaufen, daß aber das Spektrum der Korona im Violett und Ultraviolett schwächer ist als das der Photosphäre[4].

Weitere Angaben über die Intensitätsverteilung im Koronaspektrum sind mir nicht bekanntgeworden. Man wird nach den oben zusammengestellten Beobachtungsergebnissen den Eindruck gewinnen, daß das Intensitätsmaximum im Koronaspektrum gegen das im Sonnenspektrum wahrscheinlich etwas nach Rot verschoben sei, und dieses Resultat erwartete ich auch zu finden, als ich eine Festlegung der Intensitätskurve des Koronaspektrums gelegentlich der Finsternis vom 21. August 1914 plante. Das Astrophysikalische Observatorium entsandte damals eine Expedition nach Feodosia in der Krim. Der Ausbruch des Krieges zwang uns jedoch, Feodosia vorzeitig zu verlassen. Unsere Instrumente mußten wir zurücklassen; sie wurden, ebenso wie die der anderen deutschen Expeditionen, von den russischen Behörden nach Odessa geschafft. Ende 1922 reiste Prof. Schorr, Direktor der Hamburger Sternwarte in Bergedorf, dorthin, und es gelang ihm, außer den Instrumenten seines Observatoriums

[1] Lick Observatory Bulletins, Vol. V, S. 12 und 14.

[2] Ebenda S. 19.

[3] R. Witting, Sur l'éclat spectral de la couronne solaire intérieure. (Festskrift tillegnad Anders Donner på hans sextioårsdag. Helsingfors 1915.)

[4] Memorie della Società degli Spettroscopisti Italiani. Anno 1917, S. 9f.

auch die übrigen frei zu bekommen. Im Januar 1923 langten unsere Instrumente wieder in Potsdam an. Wir sind Prof. Schorr für seine Bemühungen zu aufrichtigem Danke verpflichtet.

Durch die Einladung der mexikanischen Regierung wurde es mir möglich, mein für die Finsternis des Jahres 1914 aufgestelltes Arbeitsprogramm nunmehr bei der Finsternis vom 10. September 1923 zur Durchführung zu bringen.

3. Beschreibung des Instruments und der Methode.

Die Aufgabe, die ich mir gestellt hatte, war, die Intensitätskurve des kontinuierlichen Koronaspektrums mit der des mittleren Sonnenspektrums photographisch-photometrisch zu vergleichen. Die Hauptschwierigkeit dieser Aufgabe liegt in dem Umstande, daß hier die Spektra zweier Lichtquellen von ganz ungeheuer verschiedenen Intensitäten miteinander verglichen werden sollen. Das Sonnenspektrum muß um enorme Beträge abgeschwächt werden, um dem Koronaspektrum an Intensität ungefähr gleichgemacht zu werden. Dabei darf die Qualität des Sonnenlichtes gegenüber der des Lichtes der Korona nicht oder höchstens nur in bestimmt angebbarer Weise geändert werden.

Am nächsten liegt der Gedanke, die Abschwächung durch Abkürzung der Belichtungszeiten für das Sonnenspektrum und durch Abblendungen in dem optischen Apparat zu bewirken. Beide Wege sind unzulässig. Bei strengen photographisch-photometrischen Untersuchungen sind bekanntlich verschiedene Belichtungszeiten für die zu vergleichenden Objekte durchaus zu vermeiden; sie erzeugen erhebliche Schwierigkeiten. Abblendungen im Apparat bei Aufnahme des Sonnenspektrums hätten bewirkt, daß das Sonnenlicht einen andern optischen Weg zurückgelegt hätte als das Licht der Korona. Dadurch wäre die Qualität des Sonnenlichtes gegenüber der des Koronalichtes geändert worden.

Es boten sich nun aber zwei andere einwandfreie und bei einer Finsternisexpedition gangbare Wege zur Abschwächung des Sonnenlichtes dar. Ich konnte erstens das Sonnenlicht, bevor es auf das Objektiv des Apparates fiel, durch eine weiße Kreideplatte reflektieren lassen, wodurch es sehr erheblich an Intensität einbüßt, und ich konnte eine weitere Schwächung dadurch erzeugen, daß ich das Sonnenlicht durch geschwärzte Gitter aus Kupferdrahttuch gehen ließ. Diese Gitter konnten gleichzeitig zur Herstellung einer photometrischen Skala dienen, wie ich später näher darlegen werde. Zu diesen beiden Methoden der Abschwächung ist folgendes zu bemerken:

Die Abhängigkeit des Reflexionskoeffizienten der Kreide von der Wellenlänge des Lichtes ist von J. Wilsing[1] in Potsdam genau untersucht worden. Diese Abhängigkeit ist ziemlich gering, und die relativen Werte der Reflexionskoeffizienten sind zudem unabhängig von dem Einfalls- und Emissionswinkel

[1] J. Wilsing, Über die Helligkeitsverteilung im Sonnenspektrum nach Messungen an Spektrogrammen. [Publikationen des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam, Nr. 66 (1913), S. 29ff.]

der Strahlen. Die durch die Reflexion des Sonnenlichtes an der Kreideplatte entstehenden Fehler können also zahlenmäßig berücksichtigt werden.

Geschwärzte Absorptionsgitter aus Kupferdrahttuch ändern die Qualität des durchgehenden Lichtes nicht in nachweisbarem Grade. Es liegen darüber eingehende, noch nicht veröffentlichte Untersuchungen von G. Eberhard in Potsdam vor, die sich auf Gitter mit Absorptionskoeffizienten bis zu 5 Größenklassen erstrecken.

Nach diesen prinzipiellen Vorbemerkungen gehe ich nunmehr zur Beschreibung der Apparatur über.

a) Beschreibung des Instrumentes zur Aufnahme des Koronaspektrums. Um das Bild der Korona auf den Spalt des Spektrographen zu entwerfen, diente ein zweiteiliges Zeißsches photographisch-astronomisches Fernrohrobjektiv von $A = 100$ mm freier Öffnung und $F = 750$ mm Brennweite, chromatisch korrigiert für die Wellenlänge 405—486 $\mu\mu$. Auf dem Spalt entspricht einem Winkel von $10'$ die Strecke von 2.2 mm.

Spalt, Kollimator, Prisma und Prismengehäuse wurden dem alten Spektrographen I des Potsdamer Observatoriums[1] entnommen. Das Kollimatorobjektiv hat eine Öffnung von $a = 35.3$ mm und eine Brennweite von $f = 530$ mm, das Flintglasprisma einen brechenden Winkel von 60°, eine Höhe von 45 mm und eine Seitenlänge von 61 mm. Das Kameraobjektiv ist ein Zeißsches Tessar von 46.7 mm Öffnung und 210 mm Brennweite (Öffnungsverhältnis 1 : 4.5). Auf der Platte ist 1 mm = 11'.6. Alle Rohre usw. sind innen geschwärzt, um diffuses Licht unschädlich zu machen. Die Kamera ist mit einer Schiebekassette versehen, so daß eine ganze Reihe von Spektren nebeneinander aufgenommen werden kann; das Plattenformat ist 6 × 13 cm.

Das ganze Instrument war auf einer alten parallaktischen, mit einem Uhrwerk versehenen Montierung angebracht. Ein kleines Sucherfernrohr ermöglichte das »Halten« während der Aufnahme. Der Spalt wurde bei der Aufnahme quer über das Bild der Sonne durch deren Mitte gelegt und war parallel der täglichen Bewegung justiert; da die Finsternis am 10. September stattfand, so fiel die Richtung der täglichen Bewegung sehr nahe mit der des Sonnenäquators zusammen[2]. Ich erhielt auf diese Weise zwei Spektra der Korona, das eine von den Teilen der Korona östlich, das andere von denen westlich der Sonne. Um den beiden Spektren eine verschiedene Expositionszeit geben zu können, ist dicht vor dem Spalt eine Klappe angebracht, mit der man diejenige Hälfte des Spaltes zudecken kann, auf die das Bild der Korona westlich der Sonne fällt, während die andere Hälfte freibleibt.

Damit die photometrischen Messungen des Koronaspektrums in verschiedenen Höhenschichten der Korona einwandfrei sind, müssen die von den einzelnen Punkten der Korona herkommenden Strahlen denselben optischen Weg zurücklegen, wie die Strahlen, die das Vergleichspektrum erzeugen. Es muß also vor allem die Bedingung erfüllt sein, daß die Strahlen der einzelnen

[1] H. C. Vogel, Description of the Spectrographs for the Great Refractor at Potsdam. (Astrophysical Journal, Vol. XI, 1900, S. 393.)

[2] Vgl. die graphische Darstellung in Newcomb-Engelmann, Populäre Astronomie, 7. Auflage, Leipzig 1922, S. 319.

Punkte der Korona (ebenso wie die das Vergleichspektrum erzeugenden Sonnenstrahlen) das Kollimatorobjektiv voll ausfüllen. Bezeichnet ϕ den äußersten Winkelabstand von der Spaltmitte, für welchen diese Bedingung noch erfüllt ist, so sieht man leicht durch geometrisch-optische Betrachtungen, daß ϕ zu berechnen ist aus der Gleichung:

$$2 \operatorname{tang} \phi \left\{ 1 + \frac{F}{f} \right\} = \frac{A}{F} - \frac{a}{f},$$

wo A und F Öffnung und Brennweite des Fernrohrobjektivs, a und f dieselben Größen für das Kollimatorobjektiv sind. Mit den angegebenen Zahlenwerten findet man

$$\phi = 47',$$

d. h. wenn die Mitte des Sonnenbildes auf die Mitte des Spaltes fällt, so füllen die Koronastrahlen, die von Punkten bis zu $47'$ Abstand von der Sonnenmitte kommen, das Kollimatorobjektiv voll aus. Diese Grenze ist bei meinen Messungen nicht erreicht worden.

Es ist freilich unvermeidlich, daß nicht alle Strahlen, die, von einem bestimmten Punkte des dem Spalte entsprechenden Schnittes durch die Korona ausgehend, das Fernrohrobjektiv durchdringen, bis auf die Platte gelangen. Vielmehr kommen für die verschiedenen Punkte verschiedene Teile des Fernrohrobjektivs zur Benutzung, und zwar, wie die Rechnung zeigt, immer Kreise von 50 mm Durchmesser. Für $\phi = 47'$ kommt z. B. ein kreisförmiger Teil des Objektivs zur Benutzung, dessen Umfang durch die Mitte des Objektivs geht und dessen Rand berührt. Bei der Aufnahme der Vergleichspektren wird dagegen, wie wir sehen werden, das ganze Objektiv benutzt. Auf die durch diese Ungleichmäßigkeit entstehenden Fehler komme ich noch zurück; es sei hier nur erwähnt, daß sie zu vernachlässigen sind.

Die nähere Betrachtung lehrt weiter, daß zwischen Spalt und Platte keine Fehlerquelle vorhanden ist, die das Licht der Korona anders beeinflußt wie das der Sonne, solange man sich auf $\phi < 47'$ beschränkt. Auch in bezug auf diesen Punkt habe ich übrigens Messungen angestellt, die diese Überlegungen bestätigen.

b) Beschreibung des Hilfsapparates zur Herstellung der Vergleichspektren. Wie schon oben auseinandergesetzt, wurde die notwendige Abschwächung des Sonnenlichtes bei den Aufnahmen der Vergleichspektren dadurch bewirkt, daß das Sonnenlicht durch Absorptionsgitter geschickt und außerdem von einer Kreidefläche reflektiert wurde. Die hierzu nötige instrumentelle Vorrichtung ist folgende:

Vor das Fernrohrobjektiv kann ein rechtwinklig geknicktes Rohr gesetzt werden, dessen lichte Öffnung etwas größer als die des Objektivs ist. In der Knickung ist unter 45° Neigung gegen die Achse des Rohres eine Kreideplatte befestigt. Vor das offene Ende des Rohres kann ein Absorptionsgitter aus Kupferdrahttuch (im folgenden Hauptgitter genannt) gesetzt werden. Zwischen diesem und der Kreideplatte und ziemlich dicht vor letzterer hat das Rohr zwei enge Schlitze, durch die zwei weitere Gitter eingeschoben werden können, die ich als Skalengitter bezeichnen will. Bei der Aufnahme der Vergleich-

spektren wird das freie Ende des geknickten Rohres direkt auf die Sonne gerichtet; um dies bequem zu ermöglichen, trägt das Rohr einen kleinen Sucher, der mit einer Mattscheibe versehen ist, auf deren Mitte sich das Sonnenbild projiziert. Der Weg des Sonnenlichtes ist also folgender: Es tritt zunächst durch das Hauptgitter in das Rohr, geht dann durch die beiden Skalengitter und fällt auf die Kreideplatte. Diese reflektiert es diffus auf das Fernrohrobjektiv, durch das es hindurchgeht; der Spalt wird gleichmäßig diffus beleuchtet. Dabei kommt, wie schon erwähnt, das ganze Fernrohrobjektiv zur Benutzung. Das geknickte Rohr ist inwendig schwarz.

Die Absorptionsgitter müssen nun so gewählt werden, daß die Vergleichspektren unter Anwendung der für die Korona in Frage kommenden Belichtungszeiten eine passende Intensität erhalten. Die totale Phase der Finsternis dauerte der Rechnung nach 186^s. Da erfahrungsgemäß eine derartige Zahlenangabe um mehrere Sekunden unsicher ist, und da anzunehmen war, daß die Belichtung erst einige Sekunden nach Beginn der Totalität anfangen würde, so setzte ich die Belichtungszeit der Korona auf 150^s fest, um ganz sicher zu sein, daß nicht bei dem Ende der Totalität direktes Sonnenlicht die Aufnahme verdürbe. Ich habe bereits erwähnt, daß das Bild der westlichen Hälfte der Korona auf dem Spalt durch eine Klappe verdeckt werden konnte. Ich entschied mich dahin, diese Klappe nach einer Belichtungsdauer von 50^s zu schließen, um so zwei verschieden lang exponierte Spektren der Korona zur Verfügung zu haben. Hiernach mußte ich also zwei Serien von Vergleichspektren herstellen, die eine mit 150^s, die andere mit 50^s Belichtungsdauer. Die passende Auswahl der Gitter geschah zunächst durch Probieren, und die Absorptionskoeffizienten k der gewählten Gitter wurden alsdann von Dr. G. Schnauder photometrisch bestimmt. Die Gitter, die schließlich zur Verwendung kamen, waren folgende:

A. Hauptgitter		
	α	$k = \overset{M}{3}.4$
	β	2.4.

Diese Zahlen werden für die Reduktion der photometrischen Messungen nicht gebraucht und sind daher nur genähert bestimmt. Die beiden Hauptgitter bestehen aus mehreren Lagen von Kupferdrahttuch, die zwischen zwei Messingplatten mit kreisförmigem Ausschnitt gepreßt sind.

B. Skalengitter				
	a	$k = \overset{M}{3}.76$	d	$k = \overset{M}{0}.79$
	b	2.58	e	0.45
	c	1.00	f	0.00.

Die Skalengitter bestehen aus je einem oder mehreren Stücken von Kupferdrahttuch, die auf einen Rahmen mit kreisförmigem Ausschnitt aufgelötet sind; f ist lediglich ein leerer Rahmen. Den Absorptionskoeffizienten von e habe ich auch durch Messung der Drahtdicken und der Abstände der Drähte bestimmt; es ergab sich auf diese Weise $k = \overset{M}{0}.46$ in fast genauer Übereinstimmung mit dem photometrisch bestimmten Wert, der weiterhin benutzt wird.

Wie schon erwähnt, lassen sich je zwei der Skalengitter hintereinander schalten; auf diese Weise läßt sich folgende photometrische Skala herstellen:

		$k =$	D
		$\overset{M}{}\quad\overset{M}{}\quad\overset{M}{}$	M
1.	$a + c$	$3.76 + 1.00 = 4.76$	
			0.55
2.	$a + e$	$3.76 + 0.45 = 4.21$	
			0.45
3.	$a + f$	$3.76 + 0.00 = 3.76$	
			0.73
4.	$b + e$	$2.58 + 0.45 = 3.03$	
			0.45
5.	$b + f$	$2.58 + 0.00 = 2.58$	
			0.79
6.	$c + d$	$1.00 + 0.79 = 1.79$	
			0.55
7.	$d + e$	$0.79 + 0.45 = 1.24$	
			0.45
8.	$d + f$	$0.79 + 0.00 = 0.79$	
			0.34
9.	$e + f$	$0.45 + 0.00 = 0.45$	
			0.45
10.	f	$0.00 = 0.00$	

Für die eigentliche Reduktion der Messungen werden nur die Differenzen D der Absorptionskoeffizienten gebraucht. Es wäre natürlich am schönsten, wenn die D alle untereinander gleich wären; das ließ sich aber mit den vorhandenen Proben von Drahttuch nicht erreichen, und praktisch genügt die obige Skala vollkommen.

Die Gitter sind so gewählt, daß, wenn $\alpha + a + c$ vorgeschaltet werden, bei 150^s Belichtung und bei der für die Korona-Aufnahme gewählten Spaltweite gerade noch ein schwaches Sonnenspektrum auf der Platte erscheint. Schaltet man bei einer zweiten Aufnahme $\alpha + a + e$, bei einer dritten $\alpha + a + f$, usw. vor, so werden die Sonnenspektren immer stärker. Mit der letzten Kombination $(\alpha + f)$ erhält man schon ein stark überexponiertes Sonnenspektrum. Die ganze Serie von 10 Vergleichspektren kann auf einer Platte aufgenommen werden, da das Instrument mit einer Schiebekassette versehen ist. Eine zweite Serie von Vergleichspektren wird auf eine andere Platte mit je 50^s Exposition aufgenommen; dabei ist alles unverändert, nur ist das Hauptgitter α durch das Hauptgitter β ersetzt.

Die stärkste Gitterabsorption, die bei der ersten Serie von Vergleichspektren in Betracht kommt, ist $\alpha + a + c = \overset{M}{3}.4 + \overset{M}{4}.8 = \overset{M}{8}.2$, bei der zweiten Serie $\beta + a + c = \overset{M}{2}.4 + \overset{M}{4}.8 = \overset{M}{7}.2$. Bei der Ausmessung der Spektren kamen aber die entsprechenden Sonnenspektren nicht mehr zur Verwendung, da sie zu schwach waren. Die schwächsten wirklich benutzten Spektren entsprechen vielmehr den Gitterkombinationen $\alpha + a + f = \overset{M}{3}.4 + \overset{M}{3}.8 = \overset{M}{7}.2$ bzw. $\beta + b + e = \overset{M}{2}.4 + \overset{M}{3}.0 = \overset{M}{5}.4$. Die erwähnten Untersuchungen von Eberhard über den Einfluß der Absorptionsgitter auf die Qualität des Lichtes erstrecken sich nur

bis zu Absorptionskoeffizienten von 5 Größenklassen. Es ist von vornherein nicht zu befürchten, daß bei Überschreitung dieser Grenze merklich schädigende Einflüsse auftreten, und auch der Verlauf der von mir gemessenen, den stärksten Absorptionen entsprechenden Intensitätskurven läßt erkennen, daß solche Einflüsse nicht statthaben. Zudem umfassen die Vergleichspektren, die mit Absorptionen von wesentlich mehr als 5^M erhalten sind, nur einen kurzen Wellenlängenbereich, da sie bereits schwach sind.

4. Die Aufnahmen in Pasaje.

a) Die Aufnahme des Koronaspektrums. Am Morgen des Finsternistages zeigte es sich, daß im Halterohr ein Faden des Fadennetzes, wohl infolge der großen Luftfeuchtigkeit der letzten Tage vor der Finsternis, gerissen war. Das Fadennetz war dadurch etwas deformiert, und die Folge ist gewesen, daß bei der Aufnahme die Mitte der Sonne im Sinne der täglichen Bewegung nicht genau mit der Mitte des Spaltes zusammengefallen ist; sie ist gegen letztere auf der Platte um 0.25 mm = 2!9 verschoben. Das kürzer exponierte der beiden Koronaspektren liegt der Spaltmitte etwas näher als das länger exponierte. Irgendwelcher Nachteil ist daraus nicht entstanden, und in allen anderen Beziehungen hat das Instrument tadellos funktioniert. Die atmosphärischen Bedingungen waren, wie schon erwähnt, ideal.

Nach einer Berechnung von Kohlschütter fand der Beginn der Totalität um $2^h 38^m 41^s$ mittlere Ortzeit Pasaje statt, die berechnete Dauer der Totalität betrug 186^s. Die Belichtung der Platte begann schätzungsweise 3^s nach Eintritt der Totalität. Nach 50^s wurde dem Programm entsprechend das Bild der westlichen Koronahälfte durch die erwähnte Klappe abgedeckt, nach weiteren 100^s wurde auch die Belichtung der östlichen Koronahälfte beendet. Die Sekunden konnte ich, da die allgemeine Helligkeit recht groß war, ohne jede Schwierigkeit von meiner Taschenuhr ablesen, so daß die für die Ablesung vorgesehene elektrische Taschenlampe nicht zur Verwendung kam.

b) Die Aufnahme der Vergleichspektren. Es war meine Absicht gewesen, die Vergleichspektren am Vormittage des Finsternistages bei dem für die Zeit der Totalität geltenden Zenitabstand der Sonne aufzunehmen. Die Aufnahme des Koronaspektrums sollte alsdann auf eine der beiden Platten mit Vergleichspektren erfolgen. Dieser Plan wurde dadurch vereitelt, daß es am Vormittage noch wolkig war. Darauf faßte ich den Entschluß, die Vergleichsaufnahmen an einem der folgenden Tage zu der der Totalität entsprechenden Zeit zu machen, und zwar, da ich die Finsternisplatte nicht der Gefahr einer neuen Belichtung aussetzen wollte, auf andere Platten. Da aber die Nachmittage stets wolkig waren und die Zeit zur Abreise drängte, so machte ich die Aufnahmen schließlich am Vormittage des 14. September, als endlich wieder klarer Himmel eintrat. Die Aufnahmen der beiden photometrischen Skalen von Vergleichspektren (10 Spektren mit je 150^s und 10 mit je 50^s Belichtung) nahm die Zeit von $9^h 25^m$ bis $10^h 15^m$ mittlere Ortszeit Pasaje in Anspruch; die Arbeit wurde durch das Vorüberziehen einer kleinen, scharf umrissenen Wolke vor der Sonne auf einige Minuten unterbrochen. Im übrigen

war der Himmel während der angegebenen Zeit um die Sonne herum durchaus klar und die Atmosphäre, wie bei der Finsternis, von größter Durchsichtigkeit. Für die Mitte der Finsternis und für den Beginn und das Ende der Vergleichsaufnahmen ergeben sich folgende Zenitdistanzen z_0, z_1, z_2 der Sonne:

$$z_0 = 43\overset{\circ}{.}8 \qquad z_1 = 42\overset{\circ}{.}3 \qquad z_2 = 32\overset{\circ}{.}5 .$$

z_0 liegt also etwas außerhalb des Intervalles von z_1 bis z_2, während eigentlich, um die Wirkungen der atmosphärischen Extinktion möglichst unschädlich zu machen, $z_0 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ sein sollte. Es war leider nicht möglich, mit den Vergleichsaufnahmen etwas früher zu beginnen, da der Himmel noch nicht klar war. Die in den spektralphotometrischen Messungen durch die Verschiedenheit der Zenitdistanzen entstehenden Fehler werde ich später näher diskutieren.

Die drei Platten (Finsternisplatte und zwei Vergleichsplatten) entstammen derselben Packung (Schleußners Spezial-Rapidplatten, Tropenemulsion) und wurden zusammen mit Rodinal (1 : 20) entwickelt. Für die Entwicklung stand in Pasaje gutes, reines Quellwasser zur Verfügung; da dieses jedoch eine Mindesttemperatur von 22° C hatte, so mußte es mit Eis gekühlt werden. Die drei Platten sind bei derselben Fokuseinstellung und mit derselben Spaltweite (0.08 mm) gewonnen worden.

5. Beschreibung der Aufnahme des Koronaspektrums.

Die Platte mit den beiden Spektren der westlichen und der östlichen Koronahälfte ist wohlgelungen. Sie ist um so wertvoller, als sie nach den vorliegenden Berichten von den anderen Expeditionen die einzige Aufnahme des Koronaspektrums ist, die man bei dieser Finsternis erhalten hat.

Bei der gewählten Fokuseinstellung sind die Spektrallinien auf den Platten scharf von etwas kleineren Wellenlängen als der von *K* an bis kurz vor *F*. Aber auch außerhalb dieser Grenzen ist die Schärfe noch ganz leidlich. Die Länge des Spektrums von *K* bis *F* beträgt 10.2 mm.

a) Das Spektrum des westlichen Teiles der Korona. Obwohl die Belichtungsdauer nur 50^s betrug, ist das Bild doch sehr kräftig, und wenn ich die Aufnahme noch einmal machen könnte, so würde ich die Expositionszeit bedeutend kürzer als 50^s wählen, um den Unterschied gegen das 150^s exponierte Bild des östlichen Teiles der Korona noch zu vergrößern. Von den Emissionslinien der Korona sind nur zu sehen die grüne Koronalinie λ 5303 Å.E., die aber schon stark außerhalb des Bereiches der scharfen Abbildung liegt und sehr kurz ist (die Platte war für grünes Licht sehr wenig empfindlich), und eine weitere Linie, deren Wellenlänge ich durch Anschluß an die nachher zu erwähnenden hellen Chromosphärenlinien zu 3987 Å.E. bestimmt habe. Es ist dies eine bekannte Emissionslinie der Korona, deren genaue Wellenlänge zu 3986.9 Å.E. angenommen wird[1]. Die Linie ist scharf und erstreckt sich bis zu einer Höhe von etwa 7' in der Korona. In ihrem unteren Teile hebt sie sich nur wenig von dem starken kontinuierlichen Koronaspektrum ab. Es

[1] Vgl. Lick Observatory Bulletins, Vol. X, S. 11.

ist sehr wohl möglich, daß letzteres weitere Emissionslinien der Korona vollkommen verdeckt. Das kontinuierliche Koronaspektrum erstreckt sich in seinem stärksten Spektralbezirke bis zu einer Höhe von mehr als 15′ vom Sonnenrande. Es ist nicht anzunehmen, daß das Spektrum des Himmelslichtes diese Zahl merklich verfälscht, denn die dem Ende des Spaltes entsprechenden Teile der Platte sind vollkommen klar. Im äußeren Teile des Koronaspektrums sieht man zahlreiche Absorptionslinien, das Spektrum ist hier ein Abbild des Sonnenspektrums. Die stärksten von diesen Absorptionslinien erstrecken sich bis auf etwa 4′ bis 5′ an den Sonnenrand heran. Zwischen dem Sonnenrande und dieser Grenze ist dagegen keine Spur von Absorptionslinien vorhanden. Man kann sich davon sehr gut, namentlich mit Hilfe der schwach geschwärzten, ultravioletten Teile des Koronaspektrums, überzeugen, wenn man zum Vergleich ebenso stark belichtete Sonnenspektren benutzt, die in diesen Spektralbezirken unzählige Absorptionslinien aufweisen.

b) Das Spektrum des östlichen Teiles der Korona. Infolge der längeren Belichtung (150^s) ist das Bild dieses Spektrums noch stärker als das soeben beschriebene des westlichen Teiles der Korona, und zwar ist es in denjenigen Teilen, für die die Platte am empfindlichsten war, nahe dem Sonnenrande stark überexponiert. Es erstreckt sich in Höhe bis an das Ende des Spaltes (38′ über dem Sonnenrande). In den höchsten Partien ist es natürlich äußerst schwach, und ohne Zweifel ist dort bereits das Spektrum des diffusen Himmelslichtes mit in Wirksamkeit getreten. Man kann dies daraus schließen, daß der der Mondscheibe entsprechende Teil der Platte, soweit er nicht nach 50^s durch die Klappe abgedeckt, sondern volle 150^s belichtet worden ist, zwischen K und F einen leichten Schleier zeigt, der von dem diffusen Himmelslicht herrührt. Irgendwelche Absorptionslinien lassen sich aber in diesem Schleier nicht erkennen.

Die stärksten Absorptionslinien des Spektrums der Korona lassen sich bis auf 5′—6′ an den Sonnenrand heran verfolgen, also nahezu ebenso weit wie in dem schwächer exponierten Spektrum des westlichen Teiles der Korona. Nahe dem Sonnenrande sieht man keine Spur von Absorptionslinien mehr.

Was die hellen Koronalinien angeht, so ist von der Linie λ 5303 Å. E. höchstens eine schwache Spur zu sehen, während man eigentlich infolge der längeren Exposition eine größere Intensität des Bildes als am westlichen Sonnenrand erwarten sollte (das kontinuierliche Spektrum ist bei dieser Wellenlänge bereits schwach). Die grüne Koronalinie ist also am Ostrande der Sonne bedeutend schwächer gewesen als am Westrande. Die am Westrande beobachtete Koronalinie λ 3987 Å. E. ist am Ostrande ohne Frage auch vorhanden, sie wird hier aber durch das stärkere kontinuierliche Spektrum fast verdeckt. Andere Emissionslinien der Korona sind am Ostrande gleichfalls nicht zu finden, wohl aber eine Anzahl von Emissionslinien der Chromosphäre. Daß diese am Ostrande zum Vorschein gekommen sind, am Westrande aber nicht, ist leicht erklärlich. Die Belichtung begann nämlich gleich nach dem zweiten Kontakt, als am Ostrande die höchsten Schichten der Chromosphäre noch nicht vom Monde bedeckt waren, während letzterer am Westrande noch die ganze Chromosphäre bedeckte; letzteres war auch immer

noch der Fall, als nach 50^s der westliche Teil des Bildes durch die Klappe abgedeckt wurde. Die Chromosphäre am Westrande der Sonne konnte also für die Aufnahme überhaupt nicht zur Geltung kommen.

Von den Chromosphärenlinien sind *H* und *K* die auffälligsten auf der Platte; sie sind außerordentlich hell gewesen, denn infolge der Diffusion des Lichtes in unserer Atmosphäre erstrecken sie sich vom östlichen Sonnenrande einerseits bis fast an das Ende des Spaltes und andererseits quer über den der Fläche des Mondes entsprechenden Teil der Platte bis fast an das Spektrum des westlichen Teiles der Korona heran[1]. Die Wasserstofflinien $H\beta$, $H\gamma$, $H\delta$ sind fast nur vor dem Monde zu sehen (aber nicht über die ganze Fläche desselben hinweg), im übrigen werden sie durch das Spektrum der Korona verdeckt. $H\varepsilon$ fällt bei der geringen Dispersion mit *H* zusammen. Von *K* aus weiter ins Ultraviolett gehend, erblickt man dann noch die Linien $H\zeta$ bis $H\nu$ und die Eisenlinie *L* (sehr schwach). Über $H\nu$ hinaus sind noch fünf Linien vorhanden, deren Identifizierung Schwierigkeiten bereitet. Alle diese Linien, die kleinere Wellenlängen als *K* haben, ragen nicht in die Fläche des Mondes hinein, sondern sind auf das kontinuierliche Koronaspektrum projiziert; ihre Höhe ist etwa 3'. Sie sind stark gekrümmt, wohl infolge von Doppler-Effekten (übrigens ist die Abbildung in diesem Teile des Spektrums nicht mehr ganz scharf). Vielleicht hat sich an diesem Punkte des Sonnenrandes gerade eine Protuberanz befunden.

In betreff der Absorptionslinien im Spektrum der äußeren Korona ist noch folgendes zu bemerken: J. H. Moore hat an Aufnahmen des Koronaspektrums bei der Finsternis vom 21. September 1922 die Wahrnehmung gemacht, »that the lines of the outer corona are broader and hazier than those of the sky spectrum«[2]. Eine genaue Vergleichung meiner Aufnahme des Koronaspektrums mit gleich stark geschwärzten Sonnenspektren auf den Vergleichsplatten zeigt, daß im vorliegenden Falle die Absorptionslinien der Korona nicht breiter sind als die der Sonne. Wohl aber ist der Kontrast zwischen den Absorptionslinien und den umgebenden kontinuierlichen Teilen des Spektrums im Koronaspektrum geringer als in dem der Sonne, die Absorptionslinien der Korona sind »flauer« als die der Sonne.

Das Studium der Koronaplatte hat also zu folgenden Ergebnissen geführt, die lediglich als Nebenresultate der vorliegenden Arbeit zu betrachten sind:

1. Von Emissionslinien der Korona sind nur die Linien λ 5303 Å. E. und λ 3987 Å. E. sichtbar; erstere ist an den beiden Sonnenrändern verschieden stark.

2. Das Koronaspektrum enthält bis zu etwa 4'—5' Höhe keine Absorptionslinien.

3. Die Absorptionslinien der äußeren Korona sind flauer als die entsprechenden Linien des Sonnenspektrums.

---

[1] Man ersieht hieraus, wie vorsichtig man sein muß, wenn man aus der Länge solcher Linien auf die Höhe schließen will, bis zu der sich die betreffenden Gase erheben.

[2] Publications of the Astronomical Society of the Pacific, Vol. 35 (1923), S. 333.

Daß die Intensitäten der Emissionslinien bei verschiedenen Finsternissen und an verschiedenen Stellen der Korona verschieden sind, ist nichts Neues. Ebenso ist die unter 2. angeführte Erscheinung wohl bekannt.

6. Die photometrische Ausmessung der Platten.

Die Vermessung der Platten geschah mit einem Hartmannschen Mikrophotometer des Potsdamer Observatoriums[1]. Es bezeichnet im folgenden stets r die um 100 verminderte Ablesung an der Millimeterskala des Instruments. Die Spektralaufnahmen wurden stets so in den Apparat gelegt, daß der Linie K der Wert $r = 15.0$ entsprach; es war dann für $H\gamma$ $r =$ rund 20.5, für $H\delta$ $r =$ rund 25.2. Zur Umwandlung der Ablesungen r in Ångströmsche Einheiten wurde auf graphischem Wege die folgende Tabelle hergeleitet, die auf Messungen der Chromosphärenlinien und von Absorptionslinien im Sonnenspektrum beruht:

r	λ	r	λ
$r = 13.0$	$\lambda = 3818$ Å. E.	$r = 20.0$	$\lambda = 4288$ Å. E.
14.0	3875	21.0	4380
15.0	3934	22.0	4481
16.0	3996	23.0	4591
17.0	4061	24.0	4711
18.0	4130	25.0	4840
19.0	4205	26.0	4979

Die die Stärke der Schwärzung charakterisierende Ablesung der Stellung des Photometerkeiles wird mit s bezeichnet; je größer s ist, desto größer ist die Schwärzung. Die mit r als Abszisse und s als Ordinate gezeichnete Kurve ist die Schwärzungskurve.

a) Ausmessung der Vergleichspektren. Bei der photometrischen Vermessung der zum Vergleich dienenden Aufnahmen des Sonnenspektrums mußte besonders darauf achtgegeben werden, daß die photometrierten Stellen frei von Absorptionslinien waren. Diese Forderung war wegen der kleinen Dispersion der Spektren nicht immer ganz leicht zu erfüllen. Die Vergleichspektren sind ungefähr $3^1/_2$ mm hoch, und die Messungen geschahen immer in der Mitte der Höhenerstreckung der Spektren. Auf jeder der beiden Vergleichsplatten (mit 50^s bzw. 150^s Exposition) sind die Spektren numeriert entsprechend der Numerierung der für das betreffende Spektrum in Betracht gekommenen Kombination von Skalengittern (vgl. S. 91), Spektrum 10 ist also die Aufnahme mit Skalengitter f, Spektrum 9 die mit Skalengitter $e+f$ usw. Bei der Reduktion der Messungen der Korona werden die Messungen der 50^s exponierten Spektren 1 und 2 und die des 150^s exponierten Spektrums 1 nicht gebraucht; diese Messungen gebe ich daher hier auch nicht wieder.

Die Messungen der Vergleichspektren mit 50^s Exposition lauten wie folgt (bei dem zu allererst vermessenen Spektrum 10 sind einige Punkte weniger photometriert als bei den folgenden; die Spektren werden mit abnehmender Nummer immer schwächer und daher allmählich kürzer):

---

[1] Vgl. Zeitschrift für Instrumentenkunde, Bd. 19 (1899), S. 97. Gegenüber dem an dieser Stelle beschriebenen Instrument weist das im vorliegenden Falle benutzte mancherlei Verbesserungen auf.

Messungen der 50^s belichteten Vergleichspektren.

Nr. 10		Nr. 9		Nr. 8		Nr. 7		Nr. 6		Nr. 5		Nr. 4		Nr. 3	
r	*s*	*r*	*s*	*r*	*s*	*r*	*s*	*r*	*s*	*r*	*s*	*r*	*s*	*r*	*s*
11.7	34.6	11.7	31.2	11.7	29.5										
12.3	36.6	12.3	33.7	12.3	31.0	12.3	29.0								
12.9	37.2	12.8	34.0	12.8	32.0	12.8	29.2	12.8	26.7						
13.5	38.7	13.5	35.2	13.5	32.5	13.7	30.4	13.7	27.1						
		14.4	38.9	14.3	36.1	14.4	32.8	14.4	30.3						
14.8	43.5	14.8	40.2	14.7	38.2	14.8	35.1	14.8	31.6						
								14.9	30.8	14.9	26.3				
16.3	46.8	16.4	44.6	16.3	42.6	16.3	40.0	16.4	37.0	16.4	31.7	16.4	28.2		
17.0	47.9	17.0	45.8	16.9	43.4	17.0	41.0	17.0	38.0	16.9	32.6	17.0	29.2		
		17.5	46.1	17.5	44.0	17.5	41.8	17.5	38.8	17.5	33.9	17.6	30.6	17.6	26.7
		18.0	46.2	18.1	44.8	18.2	42.3	18.2	39.8	18.2	35.0	18.2	31.0		
18.5	49.0	18.5	46.4	18.4	45.0	18.5	42.4	18.5	39.8	18.5	35.2	18.6	31.8	18.6	27.6
19.1	49.1	19.1	46.8	19.1	45.1	19.2	42.9	19.2	40.3	19.2	35.5	19.3	32.0	19.2	29.0
19.9	49.2	19.8	46.9	19.7	45.2	19.8	43.4	19.8	40.4	19.8	35.8	19.9	32.4	20.1	28.9
20.5	49.9	20.5	47.7	20.5	46.2	20.5	44.0	20.5	41.1	20.5	36.8	20.6	33.4	20.6	29.8
		21.2	47.2	21.2	45.8	21.2	44.0	21.2	41.4	21.2	37.1	21.3	33.7		
21.5	50.3	21.6	48.0	21.7	46.6	22.0	44.3	22.0	42.4	22.0	38.0	21.9	34.2	21.5	29.8
22.3	50.9	22.3	48.4	22.3	47.0	22.4	45.2	22.4	43.0	22.4	38.5	22.4	35.2	22.3	31.6
22.9	50.7	22.9	48.4	22.9	47.1	22.9	45.0	22.9	43.0	22.9	38.6	23.0	35.4	23.0	31.1
23.3	50.8	23.3	48.3	23.3	46.8	23.3	45.0	23.3	43.0	23.4	38.4	23.5	35.1	23.5	30.9
		23.9	47.9	23.9	47.0	23.9	44.8	23.9	42.1	23.9	37.8	24.0	35.0	24.0	30.6
24.1	50.4	24.1	47.9	24.1	46.4	24.1	44.7	24.2	42.1	24.2	37.5	24.3	34.8		
24.6	49.3	24.8	47.0	24.8	45.6	24.9	43.1	24.9	40.4	24.8	36.0	24.8	33.2	24.7	29.7
25.3	48.0	25.3	45.4	25.3	43.7	25.5	40.7	25.5	37.9	25.5	32.0	25.4	29.9	25.1	27.8
25.8	46.4	25.8	43.9	25.8	41.6	25.8	39.1	25.8	35.8	25.7	31.0	25.9	27.6		
26.5	42.2	26.5	40.3	26.4	37.8	26.4	34.0	26.5	29.8						
27.0	38.0	27.0	35.1	27.1	30.2	27.1	27.9	26.9	26.7						
27.3	34.2	27.4	30.3												

r	S_{10}	Δ_{10}	S_9	Δ_9	S_8	Δ_8	S_7	Δ_7	S_6	Δ_6	S_5	Δ_5	S_4	Δ_4	S_3
12.0	35.3	3.0	32.3	2.3	30.0										
13.0	37.9	3.2	34.7	2.6	32.1	2.5	29.6								
14.0	40.5	3.0	37.5	2.4	35.1	3.1	32.0	3.1	28.9						
15.0	43.7	3.0	40.7	2.1	38.6	3.2	35.4	3.5	31.9	5.3	26.6				
16.0	46.4	2.7	43.7	2.0	41.7	2.9	38.8	3.4	35.4	5.2	30.2				
17.0	47.9	2.3	45.6	2.1	43.5	2.2	41.3	3.1	38.2	5.2	33.0	3.7	29.3		
18.0	48.7	2.4	46.3	1.6	44.7	2.5	42.2	2.7	39.5	4.8	34.7	3.8	30.9	3.8	27.1
19.0	49.2	2.5	46.7	1.5	45.2	2.4	42.8	2.6	40.2	4.7	35.5	3.5	32.0	3.8	28.2
20.0	49.5	2.3	47.2	1.6	45.6	2.1	43.5	2.7	40.8	4.7	36.1	3.3	32.8	3.5	29.3
21.0	49.9	2.3	47.6	1.5	46.1	2.0	44.1	2.6	41.5	4.6	36.9	3.3	33.6	3.5	30.1
22.0	50.6	2.4	48.2	1.4	46.8	2.0	44.8	2.3	42.5	4.5	38.0	3.6	34.4	3.6	30.8
23.0	50.8	2.4	48.4	1.4	47.0	2.0	45.0	2.0	43.0	4.4	38.6	3.2	35.4	4.3	31.1
24.0	50.5	2.6	47.9	1.1	46.8	2.1	44.7	2.4	42.3	4.4	37.9	2.8	35.1	4.5	30.6
25.0	48.6	2.1	46.5	1.4	45.1	2.4	42.7	2.7	40.0	5.2	34.8	2.7	32.1	3.5	28.6
26.0	45.5	2.6	42.9	2.2	40.7	3.0	37.7	3.2	34.5						
27.0	38.0	2.9	35.1	3.1	32.0	3.7	28.3								

Die Zahlen r und s wurden auf Millimeterpapier eingezeichnet und durch Kurven ausgeglichen. Da die Messungen im allgemeinen sehr sicher sind außer bei den geringen Schwärzungen, so ist der Verlauf dieser Kurven sicher festgelegt, und die Abweichungen der beobachteten Punkte von ihnen sind nur sehr gering. Aus diesen definitiven Schwärzungskurven wurden die in der zweiten Tabelle auf der vorigen Seite wiedergegebenen, die Schwärzungen darstellenden Ordinaten S_n abgelesen (Δ_n bezeichnet die Differenz $S_n - S_{n-1}$).

Es folgen nun die

Messungen der 150^s belichteten Vergleichspektren.

Nr. 10		Nr. 9		Nr. 8		Nr. 7		Nr. 6		Nr. 5		Nr. 4		Nr. 3		Nr. 2	
r	s	r	s	r	s	r	s	r	s	r	s	r	s	r	s	r	s
11.3	32.2	11.3	30.2	11.3	28.2												
11.7	34.0	11.6	31.6	11.6	30.0	11.7	27.6										
12.6	37.0	12.6	33.8	12.6	31.6	12.7	29.0										
13.4	38.8	13.4	35.0			13.5	30.7	13.4	27.4								
14.7	43.7	14.7	40.4	14.7	38.2	14.7	35.4	14.6	31.2	14.7	27.1						
16.4	47.8	16.3	44.8	16.3	43.0	16.2	40.1	16.3	36.9	16.3	31.8	16.3	29.0				
16.6	48.3	16.6	46.0	16.6	44.1	16.5	40.6	16.9	38.4	16.9	33.4	16.9	30.0	17.0	27.0		
17.4	49.5	17.4	46.7	17.4	44.6	17.5	42.4	17.4	39.0	17.4	34.0	17.4	30.8	17.5	27.1		
18.1	49.2	18.1	46.8	18.1	45.0	18.2	42.9	18.1	40.2	18.1	35.1	18.2	31.8	18.2	28.2		
18.4	49.9	18.4	46.8	18.4	45.4	18.5	43.2	18.4	40.0	18.4	35.2	18.5	31.9	18.5	28.3		
19.1	50.0	19.2	47.2	19.2	46.0	19.2	43.1	19.2	40.9	19.2	35.6	19.2	32.7	19.2	28.4		
19.9	50.0	19.9	47.0	20.1	45.8											20.3	26.9
20.6	50.1	20.6	48.0	20.5	46.8	20.5	44.4	20.4	41.9	20.4	37.0	20.5	33.6	20.5	29.7	20.5	27.0
21.3	50.5	21.3	48.1	21.2	46.6	21.2	44.6	21.1	41.6	21.2	36.7	21.2	34.0	21.2	30.0	21.1	26.9
21.6	50.8	21.7	48.6	21.7	47.2	21.7	44.8	21.6	42.2	21.7	37.8	21.7	35.0	21.7	30.2	21.6	27.7
22.3	51.0	22.4	48.8	22.4	47.5	22.5	45.1	22.5	42.5	22.6	38.6	22.6	35.2	22.6	30.3	22.6	28.2
22.9	50.3	22.9	48.2	23.0	47.4	23.0	45.1	23.1	42.6	23.2	38.4	23.2	35.2	23.2	30.6	23.2	28.2
23.3	50.7	23.4	48.4	23.4	47.0	23.5	45.0	23.6	42.4	23.6	37.9	23.6	35.0	23.6	30.4	23.6	27.8
24.0	50.1	24.0	48.0	24.1	46.7	24.1	44.6	24.1	42.2	24.1	37.5	24.1	34.1	24.1	29.4	24.0	27.1
24.8	49.0	24.9	47.0	24.9	45.6	24.9	42.8	24.9	40.2	24.9	35.2	24.9	32.1	24.9	28.2		
25.4	47.6	25.5	45.2	25.5	43.0	25.5	40.4	25.4	37.7	25.4	32.0	25.4	29.2				
25.8	45.2	25.8	42.7	25.9	40.9	25.9	37.6	25.9	33.8	25.9	29.4						
26.5	40.7	26.5	38.2	26.5	36.7	26.5	33.8	26.4	30.0								
27.1	34.8	27.0	33.0	27.0	31.2	27.1	29.1										
27.5	31.9	27.5	30.4	27.5	28.5												

Hieraus wurden genau wie oben durch graphische Ausgleichung die Werte S'_n der Schwärzungen abgeleitet (s. Tabelle S. 99).

b) Ausmessung der Koronaspektren. Die beiden Koronaspektren (westlicher Teil der Korona 50^s, östlicher 150^s exponiert) wurden in verschiedenen Abständen vom Sonnenrande, die mit Hilfe einer am Mikrophotometer angebrachten Teilung leicht ermittelt werden konnten, durchphotometriert. Es wurde darauf geachtet, daß nicht die Emissionslinien der Korona und der Chromosphäre sowie die Absorptionslinien in den höheren Schichten der ersteren die Messungen verfälschen. Die Höhenschichten, in denen gemessen wurde, wurden so gewählt, daß die Maximalschwärzung jeder gewählten

r	S'_{10}	Δ'_{10}	S'_9	Δ'_9	S'_8	Δ'_8	S'_7	Δ'_7	S'_6	Δ'_6	S'_5	Δ'_5	S'_4	Δ'_4	S'_3	Δ'_3	S'_2
12.0	35.0	2.8	32.2	1.9	30.3	2.6	27.7										
13.0	38.0	3.5	34.5	1.7	32.8	3.0	29.8										
14.0	41.3	3.7	37.6	1.8	35.8	3.1	32.7	3.5	29.2								
15.0	44.7	3.3	41.4	2.0	39.4	3.2	36.2	3.9	32.3	4.1	28.2						
16.0	47.1	2.5	44.6	2.0	42.6	3.0	39.6	3.7	35.9	4.8	31.1						
17.0	48.7	2.5	46.2	2.0	44.2	2.5	41.7	3.1	38.6	5.3	33.3	3.2	30.1	3.3	26.8		
18.0	49.7	3.0	46.7	1.6	45.1	2.2	42.9	3.0	39.9	5.1	34.8	3.4	31.4	3.7	27.7		
19.0	50.0	3.0	47.0	1.4	45.6	2.1	43.5	2.7	40.8	5.1	35.7	3.3	32.4	3.9	28.5		
20.0	50.2	2.8	47.4	1.2	46.2	2.2	44.0	2.6	41.4	5.0	36.4	3.1	33.3	4.1	29.2	2.7	26.5
21.0	50.4	2.4	48.0	1.4	46.6	2.1	44.5	2.6	41.9	4.7	37.2	3.0	34.2	4.2	30.0	2.8	27.2
22.0	50.7	2.2	48.5	1.3	47.2	2.2	45.0	2.6	42.4	4.3	38.1	3.3	34.8	4.5	30.3	2.4	27.9
23.0	50.7	2.2	48.5	1.1	47.4	2.3	45.1	2.5	42.6	4.1	38.5	3.3	35.2	4.8	30.4	2.2	28.2
24.0	50.1	2.1	48.0	1.2	46.8	2.1	44.7	2.4	42.3	4.8	37.5	3.0	34.5	4.6	29.9	2.8	27.1
25.0	48.5	1.8	46.7	1.6	45.1	2.6	42.5	2.7	39.8	5.0	34.8	3.1	31.7	4.2	27.5		
26.0	44.0	2.4	41.6	1.5	40.1	3.1	37.0	3.5	33.5	4.7	28.8						
27.0	36.0	2.8	33.2	1.6	31.6	1.8	29.8										

Schicht möglichst gleich der Maximalschwärzung eines der Vergleichspektren ist. Bei dem schwächer exponierten Koronaspektrum ist dies jedoch nicht ganz erreicht, namentlich weil an einer Stelle eine durch ein Staubkorn auf dem Spalt erzeugte horizontale Linie im Spektrum die Messung in der betreffenden Höhenschicht unmöglich machte.

Die untersten Schichten der Korona sind, namentlich bei der 150^s-Aufnahme, stark überbelichtet. Da die photometrische Messung so starker Schwärzungen an sich schwierig und ungenau ist, und da außerdem die Reduktion dieser Messungen Schwierigkeiten geboten hätte, weil an den betreffenden Stellen die Schwärzung größer ist als bei den stärksten Vergleichspektren, so wurde auf die photometrische Vermessung der untersten Schichten der Korona verzichtet. Immerhin konnte bei der 50^s-Aufnahme $1\!'\!.7$ über dem Sonnenrande mit den Messungen begonnen werden, bei der 150^s-Aufnahme $5'$ über dem Sonnenrande.

Die Messungen wurden auf das Intervall $r = 13.0$ ($\lambda = 3818$ Å. E.) bis $r = 26.0$ ($\lambda = 4979$ Å. E.) beschränkt. Darüber hinaus ist das Bild schon zu stark aus dem Fokus, und die nähere Überlegung zeigt, daß die Messungen in diesem Falle nicht mehr einwandfrei sind.

Da die Messungen in verschiedenen Höhen der Spektren angestellt sind, so muß die Linienkrümmung beachtet werden. Dies geschah bei der Messung der 150^s-Aufnahme in der Weise, daß in jeder Höhenschicht die das ganze Spektrum durchziehende Emissionslinie K der Chromosphäre auf die Ablesung $r = 15.0$ gebracht wurde. Die Unterschiede der Linienkrümmung für verschiedene Wellenlängen wären leicht anzubringen gewesen, können aber im vorliegenden Falle vernachlässigt werden.

Mehr Schwierigkeit schien zunächst die Berücksichtigung der Linienkrümmung bei der Messung des 50^s-Spektrums zu bereiten, da dieses die Emissionslinie K nicht enthält und auch die flauen Absorptionslinien wenig

für eine genaue Einstellung geeignet sind. Die K-Linie der Chromosphäre reicht aber, wie erwähnt, infolge Diffusion in der Luft bis dicht an das 50^s-Spektrum heran, und für die unterste Schicht desselben konnte daher die richtige Einstellung ($r = 15.0$ für K) bewirkt werden. Nun erstrecken sich die Messungen in dem 50^s-Spektrum nur bis zur einer Höhe von 12', und bis dahin ist die Linienkrümmung sehr gering, so daß sie vernachlässigt werden konnte. Eine große Genauigkeit ist ja für die r nicht nötig, Fehler von 0.05 mm und etwas darüber sind völlig unschädlich. (Der Gesamtbetrag der Linienkrümmung erreicht in 45' Abstand von der optischen Achse nicht ganz den Wert von 0.08 mm.)

Ich lasse nun die Resultate der Messungen folgen. h bedeutet den Abstand der betreffenden Schicht vom Sonnenrande. Die gemessenen Schichten sind von X an abwärts numeriert, Schicht X hat ungefähr dieselbe Maximalschwärzung wie das Vergleichspektrum 10.

Messungen des Spektrums des westlichen Teiles der Korona (Belichtung 50^s).

	X. $h = 1'.7$	IX. $h = 2'.3$	VIII. $h = 3'.5$	VII. $h = 5'.2$	VI. $h = 7'.0$	V. $h = 8'.7$	IV. $h = 11'.6$
r	s	s	s	s	s	s	s
13.0	34.4	31.8	28.4				
13.5	37.0	32.6	30.2	27.2			
14.0	38.8	35.1	31.0	28.2			
14.5	40.8	36.4	33.1	30.6			
15.0	41.9	37.6	34.6	31.2	27.0		
15.5	43.3	39.6	36.1	33.3	28.5		
16.0	44.8	41.8	38.0	35.0	30.2	28.2	
16.5	46.3	42.6	40.0	36.2	31.8	29.6	
17.0	47.0	43.3	40.4	37.1	32.1	30.5	28.2
17.5	47.2	43.9	41.6	37.9	32.8	30.7	28.9
18.0	47.5	44.1	41.4	38.8	33.4	31.5	29.6
18.5	47.9	45.0	42.0	39.0	34.5	31.6	29.8
19.0	48.0	45.0	42.5	39.4	35.0	32.0	29.9
19.5	48.3	45.0	42.6	40.0	35.0	32.6	30.2
20.0	49.0	46.0	42.9	40.1	35.5	33.0	31.1
20.5	48.9	46.8	44.0	41.1	35.8	34.0	31.0
21.0	49.3	46.6	44.1	41.3	36.5	34.7	32.0
21.5	49.5	47.0	44.8	41.8	37.1	35.0	32.2
22.0	50.4	47.2	44.4	42.2	37.8	35.1	32.7
22.5	50.3	47.4	45.0	42.2	38.1	35.6	32.9
23.0	50.2	47.5	45.2	42.5	38.1	35.8	33.2
23.5	50.2	47.3	44.7	42.3	37.6	35.5	33.3
24.0	49.9	46.8	44.4	41.9	37.1	34.8	32.0
24.5	48.5	45.8	43.9	40.4	35.5	33.4	31.1
25.0	47.4	44.4	41.6	38.0	33.4	32.0	29.7
25.5	45.1	41.5	38.5	34.9	30.1	29.0	27.5
26.0	41.1	39.0	34.1	31.6			

Genau ebenso wie bei den Vergleichspektren wurden aus diesen Messungen durch graphische Ausgleichung die definitiven Werte K_n der Schwärzungen abgeleitet.

r	X. $h = 1'.7$ K_{10}	IX. $h = 2'.3$ K_9	VIII. $h = 3'.5$ K_8	VII. $h = 5'.2$ K_7	VI. $h = 7'.0$ K_6	V. $h = 8'.7$ K_5	IV. $h = 11'.6$ K_4
13.0	35.1	31.8	28.4				
14.0	38.7	34.9	31.5	28.7			
15.0	42.1	37.9	34.7	32.1	27.0		
16.0	44.8	41.5	38.0	34.9	30.1	28.5	
17.0	47.0	43.3	40.7	37.1	32.2	30.1	28.2
18.0	47.5	44.3	41.6	38.7	33.7	31.3	29.3
19.0	48.0	45.0	42.4	39.5	34.9	32.2	30.1
20.0	48.6	45.8	43.2	40.4	35.5	33.3	30.9
21.0	49.3	46.6	44.2	41.3	36.5	34.6	31.7
22.0	50.1	47.2	44.8	42.2	37.8	35.4	32.6
23.0	50.2	47.6	45.2	42.5	38.1	35.8	33.3
24.0	49.9	46.8	44.5	41.9	37.1	34.9	32.4
25.0	47.3	44.4	41.6	38.0	33.4	31.6	29.7
26.0	40.7	38.1	34.1	31.4			

In größeren Höhen h wird das Spektrum zu schwach für die Messung. Es folgen nun die

Messungen des Spektrums des östlichen Teiles der Korona (Belichtung 150^s).

r	X. $h = 5'.2$ s	IX. $h = 5'.8$ s	VIII. $h = 7'.2$ s	VII. $h = 8'.1$ s	VI. $h = 10'.4$ s	V. $h = 13'.3$ s	IV. $h = 17'.4$ s	III. $h = 22'.6$ s
13.0	37.9	34.3	30.4	28.6				
13.5	39.8	36.0	32.0	30.0				
14.0	40.2	38.0	32.7	31.8	28.1			
14.5	42.1	39.0	35.3	34.0	30.8			
15.1	44.1	41.8	37.6	35.6	31.6	28.8		
15.7	45.6	43.1	39.2	37.7	33.4	30.3		
16.1	46.6	44.2	40.8	39.2	35.7	31.7	28.2	
16.5	47.6	45.1	42.0	39.8	36.4	32.1	29.0	
17.0	47.6	45.8	42.8	40.4	37.2	33.0	29.2	
17.5	48.4	46.2	43.3	41.3	38.6	34.0	29.8	27.0
18.0	49.2	46.6	43.8	42.0	38.5	35.2	30.2	27.2
18.5	49.0	47.0	44.3	42.7	39.2	35.2	30.5	27.0
19.0	49.4	47.0	44.4	43.0	39.8	35.6	31.1	27.5
19.5	49.2	47.5	44.8	43.0	40.0	35.8	31.6	28.2
20.0	50.0	47.4	45.0	43.2	40.0	36.3	31.8	28.2
20.5	50.2	47.9	45.5	43.9	41.1	37.0	32.7	29.1
21.0	50.1	48.0	45.8	44.0	41.6	37.7	32.8	29.5
21.5	50.2	48.7	46.5	45.0	42.2	38.1	34.0	30.1
22.0	50.8	48.6	46.5	45.2	42.6	38.8	34.2	30.0
22.5	50.5	49.2	46.6	45.0	42.4	39.0	34.5	30.3
23.0	50.9	48.9	46.9	45.3	42.3	39.4	34.6	30.4
23.5	50.9	48.6	46.8	45.0	42.2	38.7	34.0	30.2
24.0	50.0	48.2	45.7	44.8	41.9	38.0	33.8	29.8
24.5	49.6	47.4	45.1	43.2	40.8	36.6	32.0	28.4
25.0	48.6	46.0	43.4	41.2	38.9	34.9	30.1	27.4
25.5	46.7	44.0	40.2	38.2	35.6	31.1	28.2	
26.0	42.6	40.0	36.8	35.0	32.0	28.2		

Hieraus ergeben sich durch graphische Ausgleichung die folgenden definitiven Werte K'_n der Schwärzungen:

r	X. $h = 5^{h}.2$ K'_{10}	IX. $h = 5^{h}.8$ K'_9	VIII. $h = 7^{h}.2$ K'_8	VII. $h = 8^{h}.1$ K'_7	VI. $h = 10^{h}.4$ K'_6	V. $h = 13^{h}.3$ K'_5	IV. $h = 17^{h}.4$ K'_4	III. $h = 22^{h}.6$ K'_3
13.0	38.3	34.7	30.4	28.6				
14.0	40.9	37.7	33.2	31.7	28.6			
15.0	43.7	41.1	36.9	35.1	31.8	28.6		
16.0	46.4	44.0	40.4	38.7	34.8	31.1	28.0	
17.0	48.1	45.9	42.8	40.6	37.3	33.1	29.2	
18.0	48.9	46.7	43.9	42.0	38.8	34.7	30.2	26.9
19.0	49.3	47.2	44.4	42.9	39.7	35.6	31.0	27.5
20.0	49.8	47.6	45.0	43.4	40.5	36.4	31.9	28.3
21.0	50.2	48.2	45.8	44.2	41.5	37.7	33.1	29.5
22.0	50.5	48.8	46.5	45.0	42.4	38.7	34.2	30.2
23.0	50.8	48.9	46.8	45.2	42.4	39.2	34.6	30.4
24.0	50.2	48.2	46.1	44.7	41.9	38.0	33.4	29.8
25.0	48.2	46.0	43.4	41.2	38.9	34.7	30.1	27.3
26.0	42.4	40.0	36.2	34.5	32.0	28.0		

In bezug auf die photometrischen Messungen des Koronaspektrums ist noch folgendes zu bemerken: Der Helligkeitsabfall der Korona in Richtung senkrecht zum Sonnenrande ist so stark, daß in gewissen Höhenschichten der Korona das kleine Stückchen des Spektrums, welches man beim Messen im Mikrophotometer überblickt, nicht mehr gleichmäßig geschwärzt ist. Dadurch werden die Messungen etwas unsicherer als die des Sonnenspektrums. Es zeigte sich aber, daß nach einiger Übung die Einstellungen doch sehr gut untereinander stimmten, und daß die Abweichungen der einzelnen gemessenen Punkte von der ausgleichenden Kurve nur sehr klein waren. Jede gemessene Schwärzung s beruht (sowohl bei den Vergleichsplatten wie bei den Spektren der Korona) auf vier Einzeleinstellungen.

7. Die Reduktion der Messungen.

Mit Hilfe der definitiven Schwärzungskurven (S_n, S'_n, K_n, K'_n) läßt sich nun leicht entscheiden, ob das Intensitätsmaximum des Koronaspektrums wirklich gegen das des Sonnenspektrums nach Rot verschoben ist. Aus den Kurven liest man die Lage dieses Maximums ab, wie folgt:

Belichtung 50^s				Belichtung 150^s			
Korona		Sonne		Korona		Sonne	
K_{10}	$r = 23.0$	S_{10}	$r = 22.9$	K'_{10}	$r = 23.25$	S'_{10}	$r = 22.7$
K_9	23.0	S_9	22.8	K'_9	22.75	S'_9	22.7
K_8	23.0	S_8	23.0	K'_8	23.1	S'_8	22.75
K_7	23.0	S_7	23.0	K'_7	22.75	S'_7	23.0
K_6	22.75	S_6	23.1	K'_6	22.50	S'_6	23.1
K_5	23.0	S_5	22.9	K'_5	23.0	S'_5	22.75
K_4	23.25	S_4	23.25	K'_4	22.75	S'_4	23.0
		S_3	22.9	K'_3	22.9	S'_3	23.2
						S'_2	22.9
Mittel	23.00		22.98		22.88		22.90
λ	4591 Å. E.		4589 Å. E.		4578 Å. E.		4580 Å. E.
Korona—Sonne	+ 2 Å. E.				— 2 Å. E.		

Es ist zu bemerken, daß die Bestimmung der Maxima bei den stark geschwärzten Spektren ziemlich unsicher ist, da bei diesen die Schwärzungskurven um das Maximum herum sehr flach sind.

Es folgt nun aus obiger Tabelle:

1. Die Lage des Schwärzungsmaximums im Sonnenspektrum ist innerhalb der Genauigkeit ihrer Bestimmung unabhängig von der Belichtungsdauer und von der Stärke der Schwärzung[1], wie zu erwarten war.
2. Die Lage des Schwärzungsmaximums im Koronaspektrum ist innerhalb ihrer Genauigkeitsgrenzen unabhängig von der Höhe in der Korona.
3. Das Intensitätsmaximum des Koronaspektrums fällt genau mit dem Intensitätsmaximum des Sonnenspektrums zusammen. Eine Rotverschiebung des ersteren gegen das letztere ist also nicht vorhanden.

In den Zahlen S_n und S'_n steckt noch der selektive Einfluß der Reflexion des Sonnenlichtes an der Kreideplatte. Dieser Einfluß, auf den wir später noch zurückkommen werden, ist aber so gering, daß er hier vollkommen vernachlässigt werden darf.

Um nun die Intensitätskurven des Koronaspektrums mit denen der Vergleichspektren näher zu vergleichen, bilden wir die Differenzen zwischen den Ordinaten der Schwärzungskurven der verschiedenen Höhenschichten des Koronaspektrums und den Ordinaten der Schwärzungskurven der Vergleichspektren [wobei natürlich immer nur Kurven verglichen werden, die Spektren gleicher Expositionszeit (50^s bzw. 150^s) entsprechen]. Jede Koronaschwärzungskurve wird dabei mit der ihr der Schwärzung nach nächstliegenden Vergleichsschwärzungskurve kombiniert. Es wird am besten sein, diese Differenzenbildung und die weitere Rechnung durch ein bestimmtes Beispiel näher zu erläutern.

Die durch die Ordinaten K'_{10} dargestellte Schwärzungskurve der Höhenschicht $5'\!.2$ des 150^s exponierten Koronaspektrums liegt am nächsten der durch die Ordinaten S'_{10} dargestellten Schwärzungskurve des Sonnenspektrums. Die folgende Tabelle enthält nun in der ersten Kolumne die Millimetereinstellungen r, in der zweiten die S'_{10}, in der dritten die $\Delta'_{10} = S'_{10} - S'_9$, wobei die S'_{10} und Δ'_{10} aus der früheren Tabelle entnommen sind. Aus der Zusammenstellung der angewandten Skalengitterkombinationen auf Seite 91 ist nun bekannt, daß $\Delta'_{10} = \overset{M}{0.45}$ ist. Die vierte Kolumne enthält die Werte $\frac{\overset{M}{0.45}}{\Delta'_{10}}$, die fünfte die Schwärzungen K'_{10} des Koronaspektrums, die sechste die Differenzen $S'_{10} - K'_{10}$, die siebente dieselben Differenzen, ausgedrückt in Größenklassen, also $\delta = (S'_{10} - K'_{10}) \frac{\overset{M}{0.45}}{\Delta'_{10}}$ (es genügt in allen Fällen diese lineare Interpolation).

[1] In den S'_n ist allerdings ein kleiner Gang angedeutet; derselbe kann aber keineswegs als verbürgt angesehen werden.

Die δ sind also die in Größenklassen ausgedrückten Helligkeitsdifferenzen zwischen dem Sonnenspektrum und dem Koronaspektrum.

r	S'_{10}	Δ'_{10}	$\frac{\overset{M}{0.45}}{\Delta'_{10}}$	K'_{10}	$S'_{10}-K'_{10}$	δ	δ_0
			M			M	M
13.0	38.0	3.5	0.13	38.3	−0.3	−0.04	−0.11
14.0	41.3	3.7	0.12	40.9	+0.4	+0.05	−0.02
15.0	44.7	3.3	0.14	43.7	+1.0	+0.14	+0.07
16.0	47.1	2.5	0.18	46.4	+0.7	+0.13	+0.06
17.0	48.7	2.5	0.18	48.1	+0.6	+0.11	+0.04
18.0	49.7	3.0	0.15	48.9	+0.8	+0.12	+0.05
19.0	50.0	3.0	0.15	49.3	+0.7	+0.11	+0.04
20.0	50.2	2.8	0.16	49.8	+0.4	+0.06	−0.01
21.0	50.4	2.4	0.19	50.2	+0.2	+0.04	−0.03
22.0	50.7	2.2	0.20	50.5	+0.2	+0.04	−0.03
23.0	50.7	2.2	0.20	50.8	−0.1	−0.02	−0.09
24.0	50.1	2.1	0.21	50.2	−0.1	−0.02	−0.09
25.0	48.5	1.8	0.25	48.2	+0.3	+0.08	+0.01
26.0	44.0	2.4	0.19	42.4	+1.6	+0.30	+0.23

Nun ist

$$\sum_{r=15.0}^{r=24.0} \delta = +\overset{M}{0}.71\,,$$

also im Mittel

$$\frac{1}{10}\sum_{r=15.0}^{r=24.0} \delta = +\overset{M}{0}.07 = \delta_m\,.$$

Bildet man nun die $\delta_0 = \delta - \delta_m$ (achte Kolumne), so erreicht man dadurch, daß zwischen $r = 15.0$ und $r = 24.0$ die Summe der Abweichungen zwischen Vergleichspektrum und Koronaspektrum verschwindet, das Koronaspektrum sich also innerhalb des genannten Intervalles möglichst nahe an das Vergleichspektrum anschmiegt. Dieses Verfahren, die δ um eine Konstante zu verändern, ist offenbar erlaubt. Es kommt auf dasselbe hinaus, als ob beispielsweise die Absorptionskonstante des Hauptgitters α bei den Aufnahmen mit den Skalengitter-Kombinationen 9 und 10 um $\overset{M}{0}.07$ vergrößert worden wäre. Die δ_0 stellen das Endresultat der Vergleichung des Koronaspektrums mit dem Vergleichspektrum dar.

Zur Berechnung der δ_m wurde nur der mittlere Teil des Spektrums von $r = 15.0$ bis $r = 24.0$ gewählt, weil gegen die Enden des gemessenen Teiles des Spektrums die Vergleichung nicht mehr ganz einwandfrei erscheint, worauf noch zurückzukommen ist.

Genau ebenso wurde nun das gesamte Messungsmaterial behandelt. Gerechnet wurde mit den Differenzen:

$$\begin{array}{llll} S_{10}-K_{10} & S_5-K_6 & S'_{10}-K'_{10} & S'_6-K'_6 \\ S_8-K_9 & S_4-K_5 & S'_9-K'_9 & S'_5-K'_5 \\ S_7-K_8 & S_4-K_4 & S'_8-K'_8 & S'_4-K'_4 \\ S_5-K_7 & & S'_7-K'_7 & S'_3-K'_3\,. \end{array}$$

(Es wurden, wie schon erwähnt, die zu kombinierenden Kurven so ausgesucht, daß die Differenzen möglichst klein werden.) Für δ_0 ergeben sich folgende Werte:

Westlicher Teil der Korona (Belichtung 50^s).

r	K_{10}. $h = 1'7$ δ_0	K_9. $h = 2'3$ δ_0	K_8. $h = 3'5$ δ_0	K_7. $h = 5'2$ δ_0	K_6. $h = 7'0$ δ_0	K_5. $h = 8'7$ δ_0	K_4. $h = 11'6$ δ_0
	M	M	M	M	M	M	M
13.0	+ 0.21	+ 0.06	+ 0.16				
14.0	+ 0.09	+ 0.04	+ 0.03	− 0.05			
15.0	+ 0.06	+ 0.11	+ 0.05	− 0.11	− 0.11		
16.0	+ 0.09	+ 0.04	+ 0.07	− 0.01	− 0.05		
17.0	0.00	+ 0.05	+ 0.05	+ 0.08	+ 0.04	− 0.03	− 0.14
18.0	+ 0.05	+ 0.08	+ 0.06	+ 0.05	+ 0.06	+ 0.02	− 0.05
19.0	+ 0.04	+ 0.05	+ 0.02	+ 0.04	+ 0.02	+ 0.04	+ 0.01
20.0	0.00	− 0.03	0.00	− 0.01	+ 0.02	0.00	+ 0.05
21.0	− 0.06	− 0.10	− 0.08	− 0.05	0.00	− 0.07	+ 0.05
22.0	− 0.08	− 0.08	− 0.06	− 0.03	− 0.03	− 0.06	+ 0.01
23.0	− 0.07	− 0.12	− 0.11	+ 0.01	+ 0.01	+ 0.01	+ 0.01
24.0	− 0.08	+ 0.01	− 0.01	− 0.01	+ 0.07	+ 0.10	+ 0.08
25.0	+ 0.09	+ 0.14	+ 0.16	+ 0.22	+ 0.18	+ 0.16	+ 0.15
26.0	+ 0.64	+ 0.40	+ 0.55	+ 0.39			

Östlicher Teil der Korona (Belichtung 150^s).

r	K'_{10}. $h = 5'2$ δ_0	K'_9. $h = 5'8$ δ_0	K'_8. $h = 7'2$ δ_0	K'_7. $h = 8'1$ δ_0	K'_6. $h = 10'4$ δ_0	K'_5. $h = 13'3$ δ_0	K'_4. $h = 17'4$ δ_0	K'_3. $h = 22'6$ δ_0
	M	M	M	M	M	M	M	M
13.0	− 0.11	− 0.02	+ 0.14	+ 0.10				
14.0	− 0.02	0.00	+ 0.17	+ 0.07	0.00			
15.0	+ 0.07	+ 0.07	+ 0.13	+ 0.06	− 0.01	− 0.02		
16.0	+ 0.06	+ 0.12	+ 0.11	+ 0.05	+ 0.07	+ 0.04		
17.0	+ 0.04	+ 0.07	+ 0.03	+ 0.11	+ 0.08	+ 0.07	+ 0.01	
18.0	+ 0.05	+ 0.02	+ 0.02	+ 0.07	+ 0.05	+ 0.05	+ 0.05	+ 0.06
19.0	+ 0.04	− 0.03	+ 0.03	+ 0.03	+ 0.05	+ 0.05	+ 0.08	+ 0.09
20.0	− 0.01	− 0.04	+ 0.02	+ 0.04	+ 0.03	+ 0.04	+ 0.06	+ 0.07
21.0	− 0.03	− 0.03	− 0.05	− 0.03	− 0.04	− 0.04	0.00	0.00
22.0	− 0.03	− 0.06	− 0.08	− 0.09	− 0.11	− 0.04	− 0.09	− 0.06
23.0	− 0.09	− 0.10	− 0.10	− 0.11	− 0.07	− 0.06	− 0.10	− 0.08
24.0	− 0.09	− 0.04	− 0.07	− 0.09	− 0.05	− 0.04	− 0.01	− 0.06
25.0	+ 0.01	+ 0.17	+ 0.07	+ 0.17	+ 0.03	+ 0.06	+ 0.09	− 0.05
26.0	+ 0.23	+ 0.39	+ 0.36	+ 0.31	+ 0.14	+ 0.16		

Gelegentlich bei der Rechnung vorkommende kleine Extrapolationen sind gänzlich belanglos. Bei der Berechnung der δ_m wurden, wenn infolge von geringer Schwärzung diese nicht für alle Punkte von $r = 15.0$ bis $r = 24.0$ angegeben war, nur die vorhandenen Werte zur Mittelbildung herangezogen. Die dadurch entstehende kleine Ungleichmäßigkeit ist ohne Bedeutung.

Wie eine graphische Darstellung der in den beiden Tabellen gegebenen Werte δ_0 als Funktion der Höhe h zeigt, läßt sich ein Gang von δ_0 mit h nur

für $r = 26.0$ erkennen[1]; sonst sind für einen bestimmten Wert von r die δ_0 unabhängig von der Höhe. Da die Zahlen für $r = 26.0$ schon nicht mehr ganz einwandfrei sind, so ist der erwähnte Gang der δ_0 mit h für diese Stelle wohl nicht als reell anzusehen. Man kann hiernach also sagen:

Der Verlauf der Intensitätskurve des kontinuierlichen Koronaspektrums ist unabhängig von der Höhe in der Korona.

Da die δ_0 von h unabhängig sind, so können zur Ableitung der endgültigen Intensitätskurve für jeden Wert von r die Mittel der δ_0 genommen werden. Wir bilden diese Mittel zunächst getrennt für den westlichen und den östlichen Teil der Korona:

r	Westl. Teil. δ_0	Östl. Teil δ_0	r	Westl. Teil δ_0	Östl. Teil δ_0
	M	M		M	M
13.0	+ 0.14	+ 0.03	20.0	0.00	+ 0.03
14.0	+ 0.03	+ 0.04	21.0	− 0.04	− 0.03
15.0	0.00	+ 0.05	22.0	− 0.05	− 0.07
16.0	+ 0.03	+ 0.07	23.0	− 0.04	− 0.09
17.0	+ 0.01	+ 0.06	24.0	+ 0.02	− 0.06
18.0	+ 0.04	+ 0.05	25.0	+ 0.16	+ 0.07
19.0	+ 0.03	+ 0.04	26.0	+ 0.50	+ 0.27

Wir nehmen nun aus den beiden Zahlenreihen die Mittel (δ_0), wobei wir stets nach der Seite der für den östlichen Teil der Korona geltenden δ_0 abrunden, da diese etwas sicherer bestimmt sind als die für den westlichen Teil. In der folgenden Tabelle enthält die erste Kolumne die r, die zweite die entsprechenden, auf volle Zehner der Å.E. abgerundeten Wellenlängen λ, die dritte die Mittel (δ_0); diese werden graphisch ausgeglichen, und das Resultat der Ausgleichung ist unter d in der vierten Kolumne gegeben. Die weiteren Kolumnen werden unten erklärt.

r	λ	(δ_0)	d	$\varkappa$	d_0
	Å.E.	M	M	M	M
13.0	3820	+ 0.08	+ 0.06	+ 0.05	+ 0.11
14.0	3870	+ 0.04	+ 0.05	+ 0.04	+ 0.09
15.0	3930	+ 0.03	+ 0.04	+ 0.03	+ 0.07
16.0	4000	+ 0.05	+ 0.04	+ 0.02	+ 0.06
17.0	4060	+ 0.04	+ 0.04	+ 0.01	+ 0.05
18.0	4130	+ 0.05	+ 0.04	+ 0.01	+ 0.05
19.0	4210	+ 0.04	+ 0.04	0.00	+ 0.04
20.0	4290	+ 0.02	+ 0.02	0.00	+ 0.02
21.0	4380	− 0.03	− 0.03	− 0.01	− 0.04
22.0	4480	− 0.06	− 0.06	− 0.02	− 0.08
23.0	4590	− 0.07	− 0.07	− 0.03	− 0.10
24.0	4710	− 0.02	− 0.02	− 0.04	− 0.06
25.0	4840	+ 0.11	+ 0.11	− 0.05	+ 0.06
26.0	4980	+ 0.38	+ 0.38	− 0.06	+ 0.32

[1] Ein für $r = 13.0$ bis $r = 16.0$ in der ersten Tabelle angedeuteter Gang wird durch die zweite Tabelle nicht bestätigt. Es ist zu beachten, daß die zu K_4 gehörigen δ_0 infolge geringer Schwärzungen schon etwas unsicher sind.

Die d geben das Endresultat der Vergleichung des Koronaspektrums mit dem Spektrum des durch die Absorptionsgitter gegangenen und von der Kreidefläche zurückgeworfenen Lichtes der Sonne.

Der selektive Einfluß der Reflexion an der Kreide läßt sich leicht rechnerisch beseitigen mit Hilfe der von Wilsing in seiner schon früher zitierten Arbeit gegebenen Werte der selektiven Reflexionskoeffizienten $\alpha R(\lambda)$ der Kreide für verschiedene Wellenlängen. Die Wilsingschen Zahlen lauten:

λ	log $\alpha R(\lambda)$	λ	log $\alpha R(\lambda)$
4000 Å. E.	9.841	4600 Å. E.	9.859
4100	9.844	4700	9.862
4200	9.847	4800	9.866
4300	9.850	4900	9.869
4400	9.853	5000	9.872
4500	9.856		

Die Mitte desjenigen Teiles des Spektrums, den wir möglichst nahe mit dem Vergleichspektrum zusammenfallen ließen, ist $r = \frac{1}{2}(15.0 + 24.0) = 19.5$; die entsprechende Wellenlänge ist 4250 Å.E., und es ist $\log \alpha R(4250) = 9.848$. Wir bilden nun $\log \alpha R(\lambda) - \log \alpha R(4250)$ und wandeln diese Differenzen in Größenklassen um. Aus den so erhaltenen Zahlen interpolieren wir die Korrektionen $\varkappa$, die in der Tabelle in der fünften Kolumne gegeben sind; die drei ersten Werte $\varkappa$ sind extrapoliert, was mit durchaus noch hinreichender Genauigkeit möglich ist. Im brechbareren Teile des Spektrums ist $\varkappa$ positiv, da hier infolge der Reflexion an Kreide das Vergleichspektrum gegenüber dem Koronaspektrum schwächer erscheint als im weniger brechbaren Teil.

Die letzte Kolumne gibt die Werte $d_0 = d + \varkappa$, d. h. die in Größenklassen ausgedrückten Helligkeitsunterschiede zwischen dem Koronaspektrum und dem von dem selektiven Einfluß der Reflexion an Kreide befreiten Sonnen-Vergleichspektrum.

Wie früher erwähnt wurde, sind die Vergleichsaufnahmen des Sonnenspektrums nicht genau bei derselben Zenitdistanz der Sonne gemacht worden wie die Aufnahmen des Koronaspektrums. Es steckt in den d_0 also noch ein durch die selektive atmosphärische Extinktion hervorgerufener Fehler; in Anbetracht der Kleinheit desselben ist es erlaubt, die betreffenden Korrektionen nur für die Mitte des Zeitintervalles zu berechnen, über das sich die Vergleichsaufnahmen erstrecken. Zu dieser Zeit hatte die Sonne die Zenitdistanz von 37°2, während ihre Zenitdistanz bei der Finsternis 43°8 war. Ich gehe hier nicht näher auf diese Rechnungen ein. Mit den von Wilsing auf S. 40 seiner zitierten Arbeit gegebenen Transmissionskoeffizienten erhält man[1] die nachstehenden Korrektionen $\varkappa_1$, die für Beobachtungsorte im Niveau des Meeresspiegels gelten, aber hier, da nur die Differenzen der Luftwege sowie die

[1] Vgl. Müller, Die Photometrie der Gestirne (Leipzig 1897), S. 134.

Differenzen der Extinktion eingehen, auch für Pasaje genähert angenommen werden können:

für $r = 13.0$ bis 18.0	$\varkappa_1 = -\overset{M}{0.01}$	$r = 20.0$ bis 23.0	$\varkappa_1 = +\overset{M}{0.01}$
19.0	0.00	24.0 bis 26.0	$+0.02$

Die Korrektionen sind verschwindend klein und könnten ruhig vernachlässigt werden. Da sie aber einmal berechnet sind, so sollen sie auch angebracht werden. Bilden wir $d_m = d_0 + \varkappa_1$, so erhalten wir:

r	λ	d_m	r	λ	d_m
	Å. E.	M		Å. E.	M
13.0	3820	+ 0.10	20.0	4290	+ 0.03
14.0	3870	+ 0.08	21.0	4380	− 0.03
15.0	3930	+ 0.06	22.0	4480	− 0.07
16.0	4000	+ 0.05	23.0	4590	− 0.09
17.0	4060	+ 0.04	24.0	4710	− 0.04
18.0	4130	+ 0.04	25.0	4840	+ 0.08
19.0	4210	+ 0.04	26.0	4980	+ 0.34

Diese Tabelle enthält das endgültige Resultat der Vergleichung der Intensitätskurve des kontinuierlichen Koronaspektrums mit dem Sonnenspektrum. Das positive Vorzeichen bei d_m bedeutet, daß das Koronaspektrum an der betreffenden Stelle relativ schwächer ist als das Sonnenspektrum.

Aus der Tabelle ist ersichtlich, daß die Intensitätskurve des Koronaspektrums sich sehr nahe an die des Sonnenspektrums anschließt. In der Tat sind, außer für $r = 26.0$, die Abweichungen nirgends größer als $\overset{M}{0.10}$. Früher haben wir gesehen, daß die Maxima der beiden verglichenen Intensitätskurven genau zusammenfallen.

Was die Abweichung von $\overset{M}{0.34}$ bei $r = 26.0$ angeht, so ist schon mehrfach hervorgehoben worden, daß die Abbildung an dieser Stelle schon etwas unscharf ist. Die Bildschärfe nimmt in diesem Teile des Spektrums augenscheinlich sehr rasch ab. Man wird schon aus diesem Grunde Mißtrauen gegen die Realität der Differenz haben. Dazu kommt noch, daß der Abfall der Intensitätskurve an dieser Stelle außerordentlich steil ist, und es ist auffällig, daß gerade in diesem steilen Aste der Kurve die Abweichungen groß zu werden beginnen. Nach allem wird man den großen Wert von d_m bei $r = 26.0$ nicht als reell gewährleisten können. Wir lassen ihn daher im folgenden außer Betracht.

Was die übrigen, durchweg sehr kleinen Werte von d_m angeht, so scheint für ihre Realität der Umstand zu sprechen, daß die Abweichungen in allen Höhenschichten der Korona den gleichen Gang zeigen. Sie müssen also, falls sie nicht reell sind, durch systematische Fehler hervorgerufen sein. Eine schon erwähnte Fehlerquelle ist die, daß für die Aufnahmen der Vergleichspektren das ganze Fernrohrobjektiv verwandt ist, für die verschiedenen Höhenschichten der Korona aber immer nur Teile desselben. Der hierdurch entstehende Fehler kann aber nur sehr klein sein, und Aufnahmen des Spektrums des Himmels-

lichtes, die mit verschiedenen Teilen des Objektivs gemacht sind, zeigen keine zu verbürgenden Verschiedenheiten der Intensitätskurven, wie einige Messungen bewiesen haben. Hinter dem Spalt des Spektralapparates ist das Entstehen systematischer Fehler nicht zu befürchten, und in der Tat ergeben Messungen, die in verschiedenen Höhen eines bei gleichmäßig beleuchtetem Spalt aufgenommenen Spektrums des Himmelslichtes angestellt wurden, durchaus identische Intensitätskurven.

Ich vermag also keine bestimmten Gründe anzugeben, die gegen die Realität der kleinen Differenzen d_m für $r = 13.0$ bis $r = 25.0$ sprechen. Andererseits sind aber diese Differenzen so klein, daß es wohl sehr kühn wäre, ihre Realität wirklich behaupten zu wollen[1]. Das Gebiet der photographischen Photometrie ist ja so ungeheuer kompliziert, daß man vor dem Auftreten unerwarteter kleiner Fehler nie völlig sicher ist. Man wird daher das in der letzten Tabelle enthaltene Resultat formulieren können, wie folgt:

Zwischen λ 3820 Å.E. und λ 4840 Å.E. stimmt die Intensitätskurve des kontinuierlichen Spektrums der Korona mit derjenigen des Sonnenspektrums innerhalb der Grenzen der Beobachtungsgenauigkeit überein. Die beobachteten Abweichungen gehen nirgends über $0^{M}.10$.

8. Die Abnahme der Helligkeit der Korona in radialer Richtung.

Man kann die von mir ausgeführten Messungen noch benutzen, um das Gesetz der Helligkeitsabnahme der Korona nach außen hin festzustellen. Die ganze Arbeit war aber nicht daraufhin angelegt, um dieses Problem in einwandfreier Form zu lösen; es handelt sich hier vielmehr nur um ein Nebenresultat, welches der Vollständigkeit wegen abgeleitet werden soll.

Da die Intensitätskurven des Koronaspektrums in verschiedenen Höhenschichten, wie wir sahen, parallel verlaufen, so genügt es, die Abnahme der Helligkeit für eine bestimmte Stelle des Spektrums zu untersuchen. Wir wählen dazu das Intensitätsmaximum. Aus den Schwärzungskurven der Vergleichspektren (s. S. 97) entnehmen wir für $r = 23.0$ die Schwärzungen S_n (Belichtung 50^s). Aus den Absorptionskonstanten der verschiedenen Kombinationen von Skalengittern (s. S. 91) kennen wir die Differenzen $S_{10} - S_9$, $S_9 - S_8$, usw. auch in Größenklassen, und dasselbe gilt daher auch von $S_{10} - S_9$, $S_{10} - S_8$, $S_{10} - S_7$, usw. Bezeichnen wir die zu S_{10} gehörige Größenklasse als 0.0, so können wir also die Schwärzungskurve zeichnen, welche als Abszissen eine Größenskala, als Ordinaten die Schwärzungen hat. Die beobachteten Punkte S_n schmiegen sich gut einer glatten Kurve an, ein Beweis, daß die Absorptionskonstanten der Gitter gut bestimmt sind. Immerhin werden sich bei diesem Verfahren kleine Fehler dieser Konstanten aufaddieren und in die Resultate eingehen.

---

[1] Bei der ungemein starken Absorption des zum Vergleich benutzten Sonnenlichtes durch die Absorptionsgitter wären vielleicht sehr kleine Farbenänderungen doch nicht völlig ausgeschlossen.

Nun entnehmen wir aus der Tabelle der Schwärzungskurven des Koronaspektrums (s. S. 101) die Größen K_n für $r = 23.0$ und lesen aus der eben erwähnten Schwärzungskurve die zugehörigen Größenklassen m ab. Wir erhalten dann folgende Zahlen:

	h	m (M)		h	m (M)
X.	1!7	0.1	VI.	7!0	2.65
IX.	2.3	0.7	V.	8.7	3.0
VIII.	3.5	1.2	IV.	11.6	3.4
VII.	5.2	1.85			

Genau ebenso verfahren wir mit den S'_n und K'_n für $r = 23.0$. Die erhaltenen Größen sind:

	h	m' (M)		h	m' (M)
X.	5!2	0.0	VI.	10!4	1.9
IX.	5.8	0.4	V.	13.3	2.4
VIII.	7.2	0.9	IV.	17.4	3.1
VII.	8.1	1.2	III.	22.6	3.8

Die m und m' gleichen wir graphisch aus, wobei sich zeigt, daß die einzelnen Werte den ausgleichenden Kurven sehr nahe liegen. Theoretisch müssen sich m und m' um eine Konstante unterscheiden, wenn wir annehmen, daß der Helligkeitsabfall in der Korona westlich und östlich von der Sonne genau derselbe ist. Schon infolge der Ungenauigkeit der Zahlen wird aber in Wirklichkeit $m - m'$ nicht völlig konstant sein. Wir finden aus dem sich überdeckenden Teil der beiden Kurven:

für h	$m - m'$ (M)
5'	+1.9
7.5	1.8
10	1.5

also im Mittel $m - m' = +1.7$ (M). Addieren wir diese Größe zu m', so ergeben die ausgleichenden Kurven folgende Werte:

h	m (M)	$m' + 1.7$ (M)	m_0 (M)
2!5	0.7	—	0.7
5.0	1.9	1.7	1.8
7.5	2.7	2.6	2.6
10.0	3.2	3.4	3.3
12.5		4.0	3.9
15.0		4.5	4.5
17.5		4.9	4.9
20.0		5.2	5.2
22.5		5.5	5.5

Die letzte Kolumne gibt die Werte m_0, die wir durch Kombination beider Kurven erhalten. Sie stellen den Helligkeitsabfall der Korona von $h = 2!5$ bis $h = 22!5$ dar, wobei der Nullpunkt der Größenzählung willkürlich ist.

Es ist nun von Interesse, den hier abgeleiteten Helligkeitsverlauf der Korona mit den Ergebnissen anderer Beobachter zu vergleichen, und zwar beschränke ich mich auf eine Vergleichung mit denen von TURNER[1] und BERGSTRAND[2].

---

[1] H. H. TURNER, On the Brightness of the Corona of January 22, 1898 (Proceedings of the Royal Society, Vol. 68. 1901, S. 36.

[2] Ö. BERGSTRAND, Études sur la distribution de la lumière dans la couronne solaire. Stockholm 1919.

TURNER nimmt für den Intensitätsabfall in der Korona folgendes Gesetz an:

$$J = A_1 R^{-6},$$

wo A_1 eine Konstante und R der Abstand vom Sonnenmittelpunkte ist. BERGSTRAND kommt dagegen für die Korona am Sonnenäquator zu folgendem Gesetz:

$$J = A_2 h^{-2},$$

wo A_2 eine Konstante und h der Abstand vom Sonnenrande ist. Geht man auf Größenklassen über, und nimmt man als Einheit für R und h die Bogenminute, so lassen sich diese Formeln schreiben, wie folgt:

$$\text{TURNER: } m_t = 15 \log (h + 16') + B_1,$$
$$\text{BERGSTRAND: } m_b = 5 \log h + B_2,$$

wo B_1 und B_2 Konstanten sind. Setzt man $B_1 = -18\overset{M}{.}0$, $B_2 = -1\overset{m}{.}5$, so ergeben sich folgende Differenzen zwischen den von mir abgeleiteten m_0 und den nach diesen Formeln berechneten Werten:

h	$m_0 - m_t$	$m_0 - m_b$	h	$m_0 - m_t$	$m_0 - m_b$
	M	M		M	M
2'.5	− 0.3	+ 0.2	15'.0	+ 0.1	+ 0.1
5.0	0.0	− 0.2	17.5	0.0	+ 0.2
7.5	0.0	− 0.3	20.0	− 0.1	+ 0.2
10.0	+ 0.1	− 0.2	22.5	− 0.3	+ 0.2
12.5	+ 0.1	− 0.1			

Die m_0 werden also durch beide Formeln ganz leidlich dargestellt, wenn sich auch gegen beide kleine systematische Unterschiede zeigen. Es läßt sich aber kaum entscheiden, ob die TURNERsche oder die BERGSTRANDsche Formel vorzuziehen ist, da die Werte m_0 gerade da abbrechen, wo die beiden Formeln beginnen, sehr verschiedene Werte zu liefern. Nun konnte das 150^s exponierte Koronaspektrum unmittelbar um das Maximum der Schwärzung herum noch bis in etwas höhere Schichten hinauf gemessen werden, als es oben für spektralphotometrische Zwecke möglich und ratsam war. Ich fand für $h = 28'$ die Schwärzung 28.3 bei $r = 23.0$. Daraus ergibt sich $m' = 4\overset{M}{.}2$, $m_0 = 5\overset{M}{.}9$. Ferner wird für $h = 28'$ $m_t = 6\overset{M}{.}7$, $m_b = 5\overset{M}{.}7$, also $m_0 - m_t = -0\overset{M}{.}8$, $m_0 - m_b = +0\overset{M}{.}2$. Dieses Ergebnis spricht für die angenäherte Richtigkeit der BERGSTRANDschen und gegen die der TURNERschen Formel. Indessen wird in diesen Höhen schon das Spektrum des diffusen Himmelslichts die Resultate verfälschen. Überhaupt möchte ich diesen nebenbei abgeleiteten Resultaten über die Helligkeitsabnahme der Korona aus den schon angeführten Gründen nicht viel Gewicht beigelegt wissen.

9. Einige Bemerkungen über die Korona.

Die Resultate der photometrischen Vergleichung der Intensitätskurven des kontinuierlichen Koronaspektrums und des Sonnenspektrums sind folgende:

1. Das Intensitätsmaximum des Koronaspektrums hat dieselbe Wellenlänge wie dasjenige des Sonnenspektrums.

2. Der Verlauf der Intensitätskurve des Koronaspektrums ist in allen Höhenschichten der Korona derselbe.
3. Die Intensitätskurve des Koronaspektrums gleicht innerhalb des untersuchten Spektralbereichs bis auf kleine Abweichungen, deren Realität nicht gewährleistet werden kann, der des Sonnenspektrums.

Man wird hieraus den Schluß ziehen, daß die Korona im wesentlichen in zurückgeworfenem Sonnenlichte leuchtet. Auch die Beobachtungen der Polarisation der Korona haben bekanntlich zu dem Schlusse geführt, daß mindestens ein sehr starker Bruchteil des Koronalichtes zurückgeworfenes Sonnenlicht ist. R. K. Young[1] schätzt diesen Bruchteil auf $^2/_3$ oder mehr von dem Gesamtlichte der Korona. Das Licht glühender Gase, das in den unteren Schichten der Korona beobachtet worden ist, spielt bei dieser ganzen Frage nur eine völlig untergeordnete Rolle, wie man an der geringen Zahl und Stärke der Emissionslinien erkennt.

Aus was für Bestandteilen haben wir uns nun die Korona zusammengesetzt zu denken? Zunächst kann es sich nicht um feste oder flüssige glühende, also selbst Licht aussendende Teile handeln. Solche müßten eine Intensitätskurve des kontinuierlichen Koronaspektrums ergeben, deren Maximum relativ zum Sonnenspektrum nach Rot verschoben wäre; die Vermutung, daß eine solche Rotverschiebung vorhanden sei — eine Vermutung, die, wie wir sahen, wenig fest begründet war —, ist durch meine Untersuchungen widerlegt. Zudem hat vor kurzem W. Anderson[2] eingehend nachgewiesen, daß unter den in der Korona herrschenden Bedingungen »kosmischer Staub«, d. h. kleine feste oder flüssige Partikelchen in der inneren Korona (bis zu etwa 15′ Höhe) nicht existieren können. Er hält es auch für sehr unwahrscheinlich, daß die Korona etwa aus größeren Teilen bestehe; diese müßten verdampfen und so ein Gasspektrum erzeugen. Glühende Gase können aber, wie schon erwähnt, nur eine ganz sekundäre Rolle in der Korona spielen.

Am nächsten liegt nach allem wohl die Annahme, daß die wesentlichen Bestandteile der Korona Atomreste sind. Die hohe Temperatur und der geringe Druck, die ohne Zweifel in der Korona herrschen, müssen ja die Ionisation sehr begünstigen, und außerdem ist es als sicher anzusehen, daß die Sonne Elektronen in den Weltraum hinaussendet. Schon Schwarzschild[3] hat darauf hingewiesen, daß sich mit der Annahme, die Korona bestehe aus Elektronen, viel erklären läßt. Freie Elektronen werden das Licht aller Wellenlängen gleich stark reflektieren und diffundieren; sie erzeugen nicht das »Rayleighsche Blau«, sondern lassen die Qualität des Lichtes unverändert[4], polarisieren es aber ebenso stark wie Rayleighs kleine Teilchen. Schwarzschild hebt aber bereits die Schwierigkeit hervor, die bei der Annahme der Zusammensetzung der Korona aus Elektronen entsteht: die Korona muß näm-

---

[1] Lick Observatory Bulletins Vol. VI, S. 166, 1911.

[2] W. Anderson, Über die Existenzmöglichkeit von kosmischem Staube in der Sonnenkorona. Zeitschrift für Physik Bd. 28, 1924, S. 299.

[3] K. Schwarzschild, Über die totale Sonnenfinsternis vom 30. August 1905. Astronomische Mitteilungen der Kgl. Sternwarte zu Göttingen. Dreizehnter Teil. 1906. S. 63.

[4] Von dem Compton-Effekt kann hier natürlich gänzlich abgesehen werden.

lich unter dieser Annahme eine große negative, die Sonne eine große positive Ladung haben. Vielleicht könnte man dieser Schwierigkeit durch die weitere Hypothese aus dem Wege gehen, daß die Korona nicht nur aus Elektronen, sondern auch aus positiv geladenen Atomkernen besteht.

Aber auch auf diese Weise werden nicht alle Schwierigkeiten behoben. Es ist eine bekannte und auch durch meine Aufnahmen wieder bestätigte Tatsache, daß die innerste Korona in ihrem Spektrum keine Absorptionslinien zeigt. Gerade deswegen glaubte man ja schließen zu müssen, daß ein eigenes Leuchten der innersten Korona vorhanden sei. Man könnte nun diese Beobachtungstatsache dadurch erklären, daß man annimmt, die Absorptionslinien würden in der inneren Korona durch Doppler-Effekte sozusagen verwischt. Dann müßte man erwarten, daß diese Linien in den Höhenschichten, wo sie zuerst sichtbar werden, noch sehr breit sind und erst in größeren Höhen allmählich schmaler werden. Das ist aber keineswegs so, die Linien haben vielmehr von der Stelle an, wo sie auftreten, bis in größere Höhen überall dieselbe Breite; diese ist nach Moore, wie erwähnt, etwas größer als die Breite der entsprechenden Linien des Sonnenspektrums, während nach meinen Beobachtungen die Linien nicht breiter, sondern nur flauer (weniger intensiv) als die des Sonnenspektrums sind.

Etwas weiter kommt man vielleicht mit folgender Vorstellung: In der inneren Korona haben deren Bestandteile starke regellose Bewegungen, die durch Doppler-Effekte die Absorptionslinien völlig auslöschen. Es besteht aber außerdem ein Strom von Bestandteilen, dessen Bewegung mit mäßiger Geschwindigkeit von der Sonne weg gerichtet ist. Dieser Strom gewinnt in höheren Schichten allmählich die Oberhand, so daß die Absorptionslinien, die dem von den Bestandteilen dieses Stromes reflektierten Sonnenlichte angehören, allmählich sichtbar werden; es bleibt aber bis in größere Höhen auch noch ein »Hintergrund« von stark bewegten Bestandteilen bestehen, der die Linien flauer macht, als sie im Sonnenspektrum erscheinen. Diese Hypothese würde rein formal das eigentümliche Verhalten der Absorptionslinien im Koronaspektrum erklären, aber ich kann nicht behaupten, daß sie mir sehr wahrscheinlich vorkommt. Für sie könnte man vielleicht ins Feld führen, daß die Verschiebungen der Absorptionslinien in 20′ Höhe über dem Sonnenrande nach J. H. Moore[1] eine von der Sonne fort gerichtete Geschwindigkeit von 20 bis 30 km ergeben, und daß nach Beobachtungen, die bei verschiedenen Finsternissen ausgeführt sind, die Details der Korona jedenfalls nur geringe Geschwindigkeiten besitzen.

[1] Publications of the Astronomical Society of the Pacific, Vol. 35, 1923, S. 335.

Ausgegeben am 5. März.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1925 VI—XI

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

MIT TAFEL I

Library of Congress
AUG 27 1925
Smithsonian Deposit

BERLIN 1925

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang einer aufzunehmenden Mitteilung soll in der Regel in den Sitzungsberichten bei Mitgliedern 32, bei Nichtmitgliedern 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte, in den Abhandlungen 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Abhandlungen nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibverschen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 200 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1925

VI. Gesamtsitzung. 19. Februar.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

*1. Hr. Sering las über die internationalen Agrarkrisen des 19. und 20. Jahrhunderts.

Die Agrarkrisis der 80er und 90er Jahre war hervorgerufen durch die größte Kolonisation aller Zeiten. Das Angebot der billigen Erzeugnisse extensiven Anbaues in den Peripheriegebieten senkte die Preise, bis sich das Gleichgewicht mit der Nachfrage auf der Kostenebene des »Grenzfarmers« herstellte. Diese Krisis war schon lange vor dem Ausbruch des Weltkrieges überwunden, weil sich die Kolonisationsbedingungen verschlechtert hatten und nunmehr Volkszahl und Bedarf wieder rascher anwuchsen als das Angebot. Die nach dem Kriege seit der Stabilisierung der Währungen ausgebrochene Krisis ist dagegen durch den Zusammenbruch Mitteleuropas bedingt. Die Preise haben sich der Kaufkraft der schwächsten, doch zur Unterbringung des Vorrats unentbehrlichen, der deutschen Käufergemeinschaft angepaßt. Sie vermag nur noch die Hälfte der Gegenwerte zu liefern wie vor dem Kriege. Darum erscheint die Preiskrisis in der Form der »Preisschere«, als Mißverhältnis zwischen agrarischen und industriellen Preisen. Bei knapper Versorgung hat eine geringe Steigerung der deutschen Kaufkraft genügt, um in der 2. Hälfte des Jahres 1924 eine sehr starke Steigerung der Getreidepreise herbeizuführen.

2. Hr. Goldschmidt überreichte sein Werk über »Die Skulpturen von Freiberg und Wechselburg« (Berlin 1924).

3. Das korrespondierende Mitglied der Akademie Hr. Dr. Otto Schott in Jena hat am 6. Februar sein fünfzigjähriges Doktorjubiläum gefeiert. Die Akademie hat ihm bei diesem Anlaß eine Adresse gewidmet, die in diesem Stück abgedruckt ist.

4. Zu wissenschaftlichen Zwecken hat die Akademie bewilligt

durch die physikalisch-mathematische Klasse

3000 *RM* zur Fortführung des akademischen Unternehmens »Das Pflanzenreich«,

1466 *RM* als Zuschuß zu den Herstellungskosten des Werkes »Das Tierreich«;

durch die philosophisch-historische Klasse

750 *RM* für die Arbeiten der Preußischen Kommission,

800 *RM* für die Herausgabe der mittelalterlichen Bibliothekskataloge,

600 *RM* zur Fortführung der Kirchenväter-Ausgabe,

900 *RM* als Druckzuschuß zu den »Tscheremissischen Texten« des Prof. Dr. Ernst Lewy in Wechterswinkel.

Die Preußische Regierung hat durch Erlaß vom 9. Februar d. J. die Wahl des Präsidenten der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt Hrn. Prof. Dr. Friedrich Paschen zum ordentlichen Mitglied der physikalisch-mathematischen Klasse bestätigt.

Die Akademie hat am 19. Februar den ordentlichen Professor an der Universität Heidelberg Hrn. Dr. Karl Hampe, den Direktor des Staatsarchivs in Hannover Hrn. Geheimen Archivrat Dr. Bruno Krusch und den Archivdirektor in Köln Hrn. Geheimen Regierungsrat Prof. Dr. Josef Hansen zu korrespondierenden Mitgliedern ihrer philosophisch-historischen Klasse gewählt.

Die Akademie hat das korrespondierende Mitglied ihrer physikalisch-mathematischen Klasse Hrn. Karl Engler in Karlsruhe am 7. Februar durch den Tod verloren.

Adresse an Hrn. Otto Schott zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 6. Februar 1925.

Hochgeehrter Herr Jubilar!

Wie von einer hohen Warte aus mögen Sie wohl heute, am 50. Jahrestag Ihrer Doktorpromotion, Ihr geistiges Auge schweifen lassen über Ihren Werdegang und über die weiten Gefilde der Wissenschaft und Technik, welche Sie bebaut und gefördert haben. Vergönnen Sie uns, einen solchen Rundblick mit Ihnen zu teilen!

Nach dem Westen richtet sich da zunächst unser Auge, hin zu der kleinen Stadt Witten in Westfalen. Ein schlichtes Haus ersteht vor unserem Blick, darinnen ein recht bescheidener Raum, der den Namen »Laboratorium« kaum verdient. Ein junger Chemiker schaltet und waltet dort, und was er treibt, das mutet fast an wie ein Stückchen Alchimie. Kleine Schmelzöfen ringsum, äußerlich wie kleine Sparherde beschaffen! Geheimnisvoll der Raum, geheimnisvoll das Ziel der Versuche. Doch gilt es ein wichtiges Problem zu lösen; davon gibt die Spannung Kunde, mit welcher der junge Chemiker zuweilen den Inhalt der Schmelzöfen mustert, wenn er ihn mit Hilfe langer, holländischer Pfeifenröhren durchmischt.

Ein neues Bild: Im Jenaer »Schillerhäuschen« sehen wir zu einer späten Nachtstunde zwei Männer bei der Lampe sitzen; der eine uns aus dem Wittener Hause wohlbekannt: Dr. Otto Schott; der andere: Ernst Abbe, der Jenaer Astronom und Physiker. Belauschen wir ihr Gespräch, so hören wir in oftmaliger Wiederholung Worte wie »Kieselsäureglas«, »Phosphorsäureglas«, »Brechungsexponent«. Bald wird uns klar, daß Gläser von besonderen optischen Eigenschaften geschaffen werden sollen, geeignet zur Verfertigung bisher nicht gekannter, völlig achromatischer Objektive.

Wiederum ein neuer Blick: Wir sehen in Jena ein »Glastechnisches Laboratorium« entstehen, gegründet von wagemutigen und arbeitsfreudigen Männern, von Schott, Abbe und den Brüdern Zeiss, ein Institut, wo die Ergebnisse des Fleißes der Wittener Versuche durch Glasschmelzen größeren Umfanges auf ihre praktische Verwertbarkeit geprüft und durch rühriges Schaffen ausgebaut werden. Ein großes Maß von Selbstvertrauen und von Opferwilligkeit war zu dieser Gründung nötig, denn gar weit war man noch von der Zeit der Ernte entfernt. Dem Mutigen hilft das Glück, — zur richtigen Zeit hat eine weitblickende preußische Regierung das für die Entwicklung der Glastechnik so wichtige Laboratorium der vier »Genossen« hinreichend subventioniert.

Eine viel spätere Etappe tritt vor unser Auge: Wie die Wintersaat durch Monate hindurch kaum merkliche Fortschritte macht, dann aber rasch fruchtbringend emporsprießt, so hat sich inzwischen an das lange, oft entmutigende Ringen mit den tausend Widerständen der Materie der Glasbereitung eine Zeit glänzender Entwicklung angeschlossen. Nicht nur die ursprünglichen Ziele sind erreicht, die Gewinnung geeigneter Glassorten für achromatische Objektive der Fernrohre, Mikroskope und photographischen Optik. Auch hochwichtige andere glastechnische Fragen sind gelöst, unter denen für Wissenschaft und Technik als besonders bedeutsam die Probleme des Thermometerglases, des Verbundglases und des für ultraviolette Strahlen durchlässigen Glases hervorragen. Eine imponierende Schöpfung der Industrie auf wissenschaftlicher Grundlage ist entstanden; ein Glaswerk, welches an Größe nicht viele, an Verdiensten und Ruhm überhaupt keines seinesgleichen in der Welt hat. An der Spitze dieses für Deutschland auch wirtschaftlich hochwichtigen Werkes sehen wir nun bei unserem letzten Rundblick wieder jenen Mann, dessen Gestalt uns beim ersten Umblick im Wittener Hause jugendlich begegnet ist: Dr. Otto Schott.

Obwohl die Interessen der Preußischen Akademie der Wissenschaften vorzüglich den Leistungen der reinen Wissenschaft zugewendet sind, blieben die Verdienste, welche Sie, hochgeehrter Herr Jubilar, sich um eine angewandte Wissenschaft erworben haben, von ihr nicht unbeachtet. Genießen die Früchte Ihres Schaffens doch indirekt alle Zweige der Naturwissenschaft und viele Zweige der Technik! In Wertschätzung dieser großen Leistungen hat die Preußische Akademie Sie vor acht Jahren zum korrespondierenden Mitglied gewählt. Heute nimmt sie freudigen Anteil an Ihrem schönen Jubiläum und entbietet Ihnen ihre herzlichen Glückwünsche. Ad multos annos!

Die Preußische Akademie der Wissenschaften.

Ausgegeben am 21. April.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1925

VII. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 26. Februar.

Vorsitzender Sekretar: i. V. Hr. Planck.

*1. Hr. Nernst las über die Verwendbarkeit eines neuen, praktisch vollkommen astasierten Galvanometers.

Bei guter innerer Astasierung können nur heterogene magnetische Störungen das Instrument beeinflussen; es mußte geprüft werden, welcher Art z. B. in dem besonders exponierten physikalischen Institute der Universität die Störungen sind. Es stellte sich heraus, daß, wenn man für möglichste Erschütterungsfreiheit sorgt, im größten Teile des Instituts das neue Galvanometer auch für feinste Messungen brauchbar ist.

2. Hr. Nernst legte eine Mitteilung des Hrn. Studienrats Dr. Kolhörster vor: »Weitere Messungen der durchdringenden Strahlung am Jungfraujoch«.

Die früheren Messungen werden im wesentlichen bestätigt und in einigen Punkten erweitert. Es hat sich insbesondere gezeigt, daß die Strahlung zunimmt, wenn die Milchstraße kulminiert.

Weitere Messungen der durchdringenden Strahlung am Jungfraujoch.

Von Dr. Werner Kolhörster
in Berlin.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.
Vorgelegt von Hrn. Nernst.)

Hierzu Taf. I.

Bei den 1923 am Jungfraujoch ausgeführten Untersuchungen der durchdringenden Strahlung[1] hatten sich Andeutungen dafür ergeben, daß die Höhenstrahlung periodisch schwankt. Gegen 8—9^h und 20—21^h zeigten sich Intensitätsmaxima, die zeitlich ungefähr mit der Kulmination der Milchstraße bzw. der des Herkules (also ebenfalls in der Nähe der Milchstraße) zusammenfielen. Jedoch waren die Maxima bei der geringen ionisierenden Wirkung der Höhenstrahlung, die selbst in 3 500 m erst 4 Ionen im Kubikzentimeter und in der Sekunde[2] ausmacht, nur schwach angedeutet. Derartige winzige Ströme von der Größenordnung 10^{-15} Ampere mit Sicherheit zu messen, ist nicht leicht, da die hochempfindlichen Instrumente selbst bei konstanter Strahlung und im Laboratorium mancherlei Schwankungen zeigen, die man immer noch nicht ganz auszuschalten gelernt hat. Man ist daher auf Dauerbeobachtungen angewiesen, um Zufälligkeiten möglichst auszuschließen, oder muß die Effekte verstärken.

Entsprechend den Ergebnissen der Ballonbeobachtungen[3] lag es nahe, die Versuche in größeren Höhen zu wiederholen, wo mit vermehrter Strahlungsintensität zu rechnen ist. So würde sich auf dem Montblanc in 4800 m die Intensität gegenüber der am Jungfraujoch etwa verdoppeln. Demgegenüber aber fiel sehr ins Gewicht, daß am Jungfraujoch unter Anlehnung an die dortigen Gebäude und Einrichtungen die beste Gewähr dafür geboten ist, überhaupt zu Beobachtungen auf längere Zeit zu kommen. Da zudem die Möglichkeit bestand, die Instrumente weiter zu vervollkommnen, so sollten die Versuche in ähnlicher Weise wie 1923 am selben Ort wiederholt werden.

[1] W. Kolhörster (G. von Salis), Sitzungsber. d. Berl. Akad. d. Wiss. **34**, 366, 1923.

[2] Im folgenden wird die Bezei hnung Ionen cm^{-3} sek^{-1} abgekürzt durch den Buchstaben J.

[3] W. Kolhörster, Verh. d. D. Phys. Ges. **16**, 719, 1914. — W. Kolhörster, Die durchdringende Strahlung in der Atmosphäre. Hamburg 1924.

Außer den bereits früher verwendeten Instrumenten Nr. 6 und 8 wurden diesmal drei weitere Apparate Nr. 9, 10, 11 verwendet. Diese letzteren waren insofern verbessert, als ihr Meßbereich bei gleicher Empfindlichkeit wie früher (1 Skt. = 1—2 Volt) um etwa 100 Volt höher lag, wobei die Proportionalität der Skala mit wachsender Voltzahl noch mehr als bisher gewahrt war. Sodann gelang es durch gedrungene Bauart der Ionisationszylinder und des Fadensystems, die Kapazität, die bei den alten Instrumenten noch 1 cm betrug, auf 0.4 cm herabzusetzen, trotzdem das Zylindervolumen aus Gründen, die später angegeben werden, auf $2^1/_2$ Liter verkleinert werden mußte. Im großen und ganzen sind durch diese Maßnahmen Meßgenauigkeit und Handlichkeit der Instrumente verbessert worden, während die Stromempfindlichkeit ungefähr dieselbe geblieben ist. Die Apparate waren alle mit trockener Luft von ungefähr 760 mm Hg gefüllt und luftdicht verschlossen.

Ihre Abmessungen und Daten sind in Tabelle 1 zusammengestellt.

Tabelle 1.

Apparat Nr.	Zylinder Höhe in cm	Zylinder Durchmesser in cm	Volumen in cm³	Wandstärke in cm	Innenelektrode Länge in cm	Innenelektrode Durchmesser in cm	Kapazität des isolierten Systems in cm	Mittlere Voltempfindlichkeit in Volt/Skalenteile	Dicke der Wolframeinlage in cm
6	22.7	20.2	7090	0.2	9	0.2	0.75	1.69	—
8	22.2	20.1	7015	0.3	9	0.2	1.01	1.58	—
9	15.7	13.6	2250	0.3	3	0.2	0.325	1.84	0.03
10	15.6	13.6	2250	0.3	3	0.2	0.36	1.76	0.03
11	16.0	14.0	2425	0.3	3	0.2	0.36	1.23	0.03

Um die ionisierende Wirkung von γ-Strahlen zu steigern, kann man die Innenwände der Ionisationsgefäße mit schweren Metallen auslegen. Denn im abgeschlossenen Gasvolumen beruht die Ionisation unter ihrem Einfluß zum größten Teil auf der in und an den Gefäßwänden erregten korpuskularen Sekundärstrahlung vom Typus der β-Strahlen. Diese Strahlung wächst mit dem Atomgewicht der durchstrahlten Schicht und hängt innerhalb gewisser Grenzen auch von deren Dicke ab. Genügend gealtertes Blei, das infolge seines hohen Atomgewichts sehr günstig wäre, konnte nicht beschafft werden, stets erwiesen sich die untersuchten Proben als radioaktiv. Deshalb wurde Wolfram in Betracht gezogen, wobei allerdings dessen Aktivität, hervorgerufen durch Verunreinigung mit Thorium, zu bedenken gab. Es gelang der Osram A. G., die die ersten Bleche in dankenswerter Weise kostenlos lieferte, fast thoriumfreies Material herzustellen, welches sich als durchaus brauchbar erwies. Auch seine Verarbeitung zu Blechen von 40 × 420 mm glückte, so daß nunmehr die Zinkzylinder mit Wolfram von 0.3 mm ausgekleidet werden konnten. Die Herstellung stärkerer Bleche und ihr Einbau in die Zylinder erwies sich jedoch als nicht durchführbar. Ebenso mußte auf das Auswalzen größerer Bleche für die alten 7-Liter-Instrumente wegen der unverhältnismäßig größeren Schwierigkeiten verzichtet werden. Aus diesem Grunde

war das Volumen der neuen Wolframinstrumente auf $2^1/_2$ Liter verkleinert worden.

Die Steigerung der Ionisationseffekte infolge der Auskleidung der Zylinder mit Blei bzw. Wolfram ist aus folgender Tabelle ersichtlich. Das zu den Eichungen benutzte Radiumpräparat von 0.052 mg Radiummetall befand sich immer in demselben Abstand von 32 cm von der Zylinderwand.

Tabelle 2.

Vergleich der ionisierenden Wirkung der γ-Strahlen von Radium C bei Zink, Wolfram und Blei.

Wandungen des Ionisationszylinders	Radiumpräparat entfernt (nat. Zerstreuung)	Radiumpräparat 0.052 mg in 32 cm Abstand	Güteverhältnis: $\frac{\text{Spalte 3}}{\text{Spalte 2}}$
Zink 3 mm	13.5 J	90.4 J	6.7
» 3 » + W 0.3 mm ...	18.8 »	177.9 »	9.5
» 3 » + Pb 0.5 » ...	150.0[1] »	200.0 »	1.3

Man erkennt aus der Tabelle, daß für die γ-Strahlen des Radiums die Ionisationswirkung durch Wolframeinlage verdoppelt wird, während die natürliche Zerstreuung dabei nur um 30 Prozent ansteigt. Daher wird das Verhältnis $\frac{\text{Ionisierungsstärke des Ra}}{\text{natürliche Zerstreuung}}$, was man als Güteverhältnis bezeichnen kann, für Wolframapparate günstiger als für Zinkinstrumente.

Es war natürlich nicht ohne weiteres zu sagen, ob unter der Wirkung der Höhenstrahlung die Wolframeinlage ebenso vorteilhaft sein würde wie bei Radiumstrahlen. Schon die außerordentliche Härte der ersteren ließ ein quantitativ anderes Verhalten erwarten. In der Tat ergab zwar die Radiumeichung auf dem Joch praktisch denselben Wert wie in Berlin für das Verhältnis der Ionisationswirkung bei Wolfram- und Zinkapparaten (Berlin $\frac{\text{Wo}}{\text{Zn}} = 1.87$, Joch $\frac{\text{Wo}}{\text{Zn}} = 1.76$), bei Messungen mit der Höhenstrahlung am Joch dagegen betrug dies Verhältnis nur 1.32. Wie man sieht, ist also die Wolframeinlage auch für die Messungen der Höhenstrahlung noch vorteilhaft, aber doch nicht in dem Maße wie für die weichere γ-Strahlung des Radiums.

Die Dauermessungen sind diesmal etwa 10 m südlich von dem vorjährigen Beobachtungsplatz am Joch vorgenommen worden, weil die Eisverhältnisse dazu zwangen. Hier wurde eine Beobachtungshütte aus dünnen Brettern möglichst fest aufgebaut, nachdem vier Eispfähle tief ins Eis getrieben worden waren. In der Hütte standen die Strahlungsapparate nebeneinander ein Meter über dem Eis, gegen direkte Sonnenbestrahlung geschützt, wozu nach Bedarf eine Zeltbahn über den oben offenen Verschlag gespannt werden konnte.

[1] Dieser hohe Wert ist durch die Radioaktivität des Bleis bedingt.

Hier wurden die Instrumente, solange das Wetter günstig war (11. bis 17. Juli) dauernd alle $1^1/_2$ bis 2 Stunden abgelesen. Als dann am 17. Juli mit Gewittern und Neuschnee eine Schlechtwetterperiode einsetzte, ließ sich die Zeit durch die Beobachtungen in der Jochhöhle ausnutzen. Diese war von den Führern wieder wie im vorigen Jahre in den Firn der Sphinx eingearbeitet und noch etwas vergrößert worden. Als Beobachtungsort diente eine Stelle, die nach oben und nach den Seiten von ungefähr 20 m Eis abgeschirmt war. Bei allmählich sich besserndem Wetter konnten vom 20. Juli an wieder die Messungen im Freien begonnen werden, doch kam eine wirklich günstige Wetterlage nicht mehr auf, und vom 23. Juli an verstärkten sich die Schneestürme immer mehr, so daß sie schließlich zum Abbruch der Beobachtungen am 26. Juli zwangen, nachdem schon am 24. Juli die Beobachtungshütte vom Sturm bis weit auf den Aletschgletscher heruntergeblasen worden war.

Wie schon angedeutet, wurde diesmal nur in der Eishöhle und an der Oberfläche beobachtet, um die seinerzeit gerade hier am stärksten auftretenden Schwankungen der Höhenstrahlung möglichst eingehend verfolgen zu können. Denn wenn bei nicht zu gleichmäßiger Verteilung der Quellpunkte der Strahlung über das Himmelsgewölbe bestimmte Flächen stärker strahlen und mit der Erdrotation auf- und absteigen, wie z. B. die Milchstraße, so müßte allein schon der Luftmantel der Erde ausreichen, um bestimmte Schirmwirkungen hervorzurufen. Berechnet man, wie in folgender Tabelle 3 zusammengestellt ist, von 10 zu 10° Horizontalhöhe fortschreitend, die durchsetzte Luftschicht in mm Quecksilber und die mit dem früher bestimmten Absorptionskoeffizienten der Höhenstrahlung erfolgende Abnahme der Strahlungsstärke in Prozenten, so würde der im Vorjahre beobachteten Schwankung von 15 Prozent des Oberflächenwertes eine Änderung der Horizontalhöhe von $90 - 65° = 35°$ entsprechen, wenn man vom Zenith ausgeht, d. h. wenn beim Maximalwert die Quelle im Zenith anzunehmen ist. Bei geringeren Höhen, z. B. bei 40° würde eine gleich starke Schwankung bereits durch eine Höhenänderung von rund 7° hervorgerufen werden. Man würde also, wenn man weitere Abblendungen durch Beobachtung in Gletscherspalten schon jetzt vornimmt, leicht zuviel Strahlungsintensität ausblenden, wohingegen doch bei den geringen Effekten alles zunächst darauf ankommt, diese möglichst wenig zu schwächen.

Tabelle 3.

Horizontal-höhe	Luftschicht in mm Hg	Abnahme in Prozent	Abnahme der Höhenstrahlung am Joch
10°	2937	99.96	0.00
20	1491	96.4	0.14
30	1020	82.4	0.70
40	793	61.8	1.53
50	666	41.3	2.35
60	589	22.6	3.09
70	543	10.6	3.57
80	518	2.7	3.89
90	510	0.0	4.00

Tabelle 4.

Mittelwerte der natürlichen Zerstreuung, Eigen- und Höhenstrahlung für die benutzten Apparate.

Apparat	Natürliche Zerstreuung		Eigenstrahlung Jochhöhle	Höhenstrahlung Joch
	Berlin	Joch		
6	18.2	22.5	19.5	3.0
8	11.0	10.1	6.6	3.6
9	20.1	15.0	10.8	4.2
10	21.3	15.1	11.0	4.1
11	20.0	15.5	10.9	4.6

In der Tabelle 4 sind die Mittelwerte für die einzelnen Instrumente zusammengestellt, wobei für jeden Apparat zunächst sämtliche Einzelwerte eines Tages zum Tagesmittel vereinigt und aus diesen die Mittelwerte über die gesamten Beobachtungstage gebildet worden sind. Rund 600 Einzelwerte wurden mit den 5 Apparaten gewonnen, so daß auf jedes Instrument etwa 120 kommen.

In der Figurentafel liegen die Ergebnisse der Dauerbeobachtungen in der Eishöhle und auf der Oberfläche (Plateau) für jeden Apparat gesondert, sowie für alle Instrumente zusammen, eingezeichnet vor.

Bei Betrachtung der Kurven ergibt sich folgendes:

Innerhalb der absorbierenden Eiswände der Jochhöhle ist die Ionisation von Schwankungen fast völlig frei. Dagegen treten auf der Gletscheroberfläche wieder die schon früher beobachteten Änderungen im Tagesverlauf von rund 15 Prozent bei sämtlichen Apparaten auf und erscheinen auch mit aller Deutlichkeit in der Kurve, die als Mittel aus den fünf anderen gewonnen wurde. Bei dieser ist das Morgenmaximum durch eine kleine Einsenkung gegen 7^h unterbrochen, so daß dadurch die Extreme auf etwa 5^h und 8^h fallen. Ebenso verhält es sich mit dem Abendmaximum, das zwischen 17^h und 21^h eintritt. Zu Mitternacht steigt die Strahlung nochmals schwach an. Das Minimum, etwas schärfer ausgeprägt als früher, liegt gegen 13^h. Im allgemeinen übereinstimmend mit diesen Ergebnissen waren im Vorjahre als Eintrittszeiten der Maxima $8-9^h$ und $20-21^h$ angegeben worden. Das diesmalige, bedeutend zahlreichere Material hat also mehr Einzelheiten zutage gebracht.

Die Maxima, mit Ausnahme des um 17^h, fallen auf die Zeiten, wenn Teile der Milchstraße oder ihrer näheren Umgebung im Zenith stehen, die Minima, wenn diese tiefer am Himmel sich befinden. Man kann also die Schwankungen im Sinne der von Prof. Nernst aufgestellten Hypothese deuten, daß die Höhenstrahlung aus jenen Gebieten des Kosmos kommt, in denen die jungen roten Riesensterne sich in größerer Zahl vorfinden.

Zusammenfassend wäre zu sagen:

Die Instrumente sind weiter verbessert worden. Versuche über die Intensität der von der Höhenstrahlung ausgelösten korpuskularen Sekundärstrahlung zeigten, daß Wolfram gegenüber Zink als Wandmaterial vorteilhafter ist.

0h 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24h

Apparat 6
Höhle

Plateau

Apparat 8
Höhle

Plateau

Apparat 9
Höhle

Plateau

Apparat 10
Höhle

Plateau

Apparat 11
Höhle

Plateau

Gesamtmittel aller Kurven
Apparate 6, 8, 9, 10, 11
Plateau

W. Kolhörster: Weitere Messungen der durchdringenden Strahlung am Jungfraujoch.

Die im Vorjahre beobachteten täglichen Schwankungen der Höhenstrahlung auf der Gletscheroberfläche konnten durch das größere Material der Dauerbeobachtungen bestätigt und eingehender verfolgt werden. Maxima der Strahlung liegen gegen 5^h und 8^h, 17^h und 21^h, ein ausgeprägteres Minimum gegen 13^h.

Ebenso wie im vorigen Jahre fand ich die weitestgehende Unterstützung bei Ausführung der Untersuchung durch die HH. Prof. Nernst und Geiger, durch die Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft für Physik und durch die Leitung der Jungfraubahn, insbesondere ihres Präsidenten Hrn. Prof. L. R. von Salis und ihres Direktors Hrn. A. Liechti.

Bei den anstrengenden Beobachtungen am Jungfraujoch mußte ich diesmal auf die Hilfe meines vorjährigen Mitarbeiters, Hrn. Dr. G. von Salis, verzichten, der kurz vor Beginn der Messungen erkrankte. Mit dankenswerter Unterstützung von Hrn. Prof. Merz trat Hr. Dr. Loewe an seine Stelle und hat mir in aufopfernder Weise beim Beobachten geholfen, während meine Frau die Führung der Protokolle und die anderen, damit zusammenhängenden schriftlichen Arbeiten übernahm. Ich möchte nicht verfehlen, auch an dieser Stelle meinen Dank dafür zum Ausdruck zu bringen.

Ausgegeben am 21. April.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1925

VIII. Gesamtsitzung. 5. März.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Rubner sprach über: Unser Brotgetreide in physiologischer und volkswirtschaftlicher Hinsicht.

Auf Grund neuerer Untersuchungen werden die physiologisch bedeutsamen Eigenschaften des Brotgetreides und Brotes selbst geschildert, beim Vergleich von Weizen und Roggen nachgewiesen, daß ersterer größere Erträge an verwertbaren Nährstoffen liefert. Die alte Streitfrage, ob es rationeller sei, das Korn wenig oder stark auszumahlen, wird dadurch einem Entscheid zugeführt, daß außer Versuchen an Menschen auch Fütterungsversuche mit Kleie an Tieren ausgeführt wurden.

Dabei ergab sich der überraschend einfache Satz: Die Menge der nährenden Stoffe für den Menschen ist aus Brot und Mast nahezu bei jedem Grad der Ausmahlung dieselbe, bei schwacher Ausmahlung liefert das Korn wenig Mehl und viel Kleie für die Mast, die Summe dieser Nährwerte ist gleich den Werten bei irgendeiner anderen Ausmahlung. Bei 80 Prozent Ausmahlung erhält man zwar mehr Verdauliches im ganzen, aber weniger Masterträgnis aus der geringwertigeren und kleineren Menge an Kleie. Im ganzen genau soviel wie bei 60 Prozent Ausmahlung usw.

2. Hr. Hellmann machte eine Mitteilung über die Witterungsanomalie des Winters 1924/25 in Berlin.

Der Winter 1924/25 ist der zweitmildeste, den Berlin in den letzten 160 Jahren, d. h. soweit zurück sich die Witterungsgeschichte genau verfolgen läßt, gehabt hat. Milder war der Winter 1795/96 und fast ebenso mild der von 1868/69, der aber durch eine Kälteperiode vom 17. bis 26. Januar 1869 unterbrochen war. Gemeinsam ist beiden Wintern die ungewöhnlich hohe Temperatur des Februar, die das langjährige Mittel um 4.3° übertraf. Der Winter 1924/25 gehört zu den trocken-milden Wintern, die viel seltener sind als die feucht-milden; er hatte nur 4 Tage mit Schneefall.

3. Hr. von Wilamowitz-Moellendorff überreichte sein Werk »Menander, Das Schiedsgericht (Epitrepontes)« (Berlin 1925) und die von ihm herausgegebenen Callimachi hymni et epigrammata, 4. Aufl. (Berlin 1925).

Unser Brotgetreide in physiologischer und volkswirtschaftlicher Hinsicht.

Von MAX RUBNER.

I. Geschichte des Brotes. Seine Verbreitung.

Unsere Vorfahren waren zur Zeit der römischen Invasion mit dem Anbau von Gerste und Hafer bekannt, den Weizenbau brachte die Berührung mit den Galliern ins Land, der Roggenbau hat sich durch die aus dem Osten vordringenden slawischen Völkerschaften eingebürgert.

Das Brotbacken hat man erst spät entdeckt, es wird behauptet, man verdanke es den Phöniziern, jedenfalls kam die Backkunst von den Ägyptern zu den Griechen und von da erst angeblich um das Jahr 168 v. Chr. nach Rom.

Noch heutzutage dürfte mehr als die Hälfte der Menschheit noch nicht zu den Brotessern gehören, sondern zu den sogenannten Breiessern, welche Getreidesorten anbauen, wie Reis, Mais, die ihrer chemischen Zusammensetzung nach eine Herstellung von Brot nicht erlauben.

Das Brotgetreide ist durch Jahrtausende der Weizen und Roggen geblieben. Nur ganz ausnahmsweise und gelegentlich in Zeiten der Not hat man Gerste, Hafer oder als Zusätze Mais, Reis, ja auch Bohnen genommen. Wo immer das bessere Brotgetreide zu erlangen war, hat es andere Surrogate verdrängt.

In den einzelnen Ländern haben sich im Verbrauch von Weizen und Roggen große Unterschiede herausgebildet. In den romanischen Ländern, in Süddeutschland, in England hat der Weizen vielfach sich als einzige Brotfrucht eingebürgert, während der Roggen im nördlichen Deutschland, in den skandinavischen Ländern und auch in Rußland das Übergewicht behalten hat.

Und so ganz ohne Grund ist das auch nicht geschehen, denn Weizen und Roggen haben doch grundsätzlich verschiedene Eigenschaften. Auch eine wenig entwickelte Kunst des Müllers schafft aus dem Weizen die Quelle der feinen Gebäcke, die der Roggen nie zu geben vermag. Die vornehme Küche der Städter hat allzeit mehr Bedürfnis nach dem Weizen gezeitigt.

Im Lauf des Jahrhunderts hat sich in diesen Verhältnissen wenig geändert.

Eine wesentliche Umgestaltung erfuhr der Verbrauch des Roggens und Weizens im 18. Jahrhundert durch die Einführung der Kartoffel, deren Gebrauch übrigens noch zu Beginn des 19. Jahrhunderts in vielen Gegenden Deutschlands völlig unbekannt oder noch kaum in breitere Volksschichten gedrungen war. Seit dieser Zeit ist aber Deutschland allmählich ein Land

geworden, in welchem ein großer Teil des Getreideverbrauches durch Kartoffeln ersetzt wurde, was zwar zur Sicherstellung der allgemeinen Volksernährung beitrug, die Qualität der Kost durch Umformung früherer mannigfaltiger Ernährungsformen keineswegs gefördert hat. Manche Art der alten Küchenkunst ist dem neuen Eindringling zum Opfer gefallen und etwas von alter Kultur zu Grabe getragen worden. Im Ausland haben wir mit der Maiskultur, schließlich in manchen Gegenden mit der Reiskultur etwas Ähnliches erlebt wie z. B. in Italien, wo bessere Formen der Ernährung durch ein billiges Massengewächs verdrängt worden sind.

II. Vermahlungsweisen.

Die Vermahlungsweisen von Weizen und Roggen waren anfänglich sehr primitiver Natur, zunächst derart, daß die Getreidefrucht, wie sie war, zerkleinert wurde; dann tauchte, wann läßt sich schwer sagen, die Technik auf, den Weizen von der Spreu zu sondern, wozu man Siebe aus Wolltuch, später aus Seidengaze benutzte. Schon frühzeitig begegnen uns Verordnungen, betreffend des Müllereigewerbes, um das Beimahlen ungehöriger Dinge zu verhüten und unter Strafe zu stellen. Die Müller hatten zeitweise keinen guten Leumund. Die alten Mühlen zerquetschten das Korn zwischen den zwei Mühlsteinen, deren einer festlag, während der andere sich drehte, damit war die ganze Arbeit geschehen. Das abgebeutelte Mehl war das weiße; blieb aber mehr oder minder Kleie darin, so gab es graues, weniger verwendbares Mehl. Später und schon im 18. Jahrhundert verbesserte man die Mühlentechnik, das eine der neuen Verfahren war die Hochmüllerei, deren erste Anfänge bis auf das Jahr 1709 zurückgeführt werden. Im Laufe der Zeit ergaben sich viele Verbesserungen, auch von Amerika wurde die maschinelle Technik wesentlich beeinflußt und kam auch einer anderen Form, der heutigen, noch gebräuchlichen Flachmüllerei, zugute. Die Mühlsteine wurden durch die Stahlwalze verdrängt. Anfänglich war das Hauptbestreben nur darauf gerichtet, die Kleie, d. h. die Hüllen des Getreides, besser abzusondern. Später kamen noch andere Aufgaben hinzu, das Reinigen des Getreides. Bis ins 6. Jahrhundert zurück können wir eine Volkskrankheit verfolgen, die unter Kribbeln, Krämpfen, Delirien, Abmagerung, Verlust ganzer Glieder und allgemeiner Sepsis auftrat. Erst im 19. Jahrhundert hat man erkannt, daß diese Allgemeinerkrankung von dem Mutterkorn, einem Pilz, herrührt, der sich zeitweilig in großer Menge auf dem Roggen entwickelt; die letzten großen Mutterkornerkrankungen waren 1867 in Chemnitz und 1879 in Frankenberg.

Die gute Mühlentechnik entfernt zunächst allen Schmutz und Unrat, Mäusekot, Steine, Nägel, Sand und außerdem alle Unkrautsamen und das Mutterkorn.

Freilich gibt es auch heute noch viele kleine Landmüller, die von guter Reinigung des Kornes keinen Begriff haben und das Korn, wie es von der Tenne kommt, mahlen.

Das Getreidekorn zeigt am mikroskopischen Querschnitt das Endosperm des Mehlkernes, in dessen Zellen die Eiweißstoffe (Gliadin, Glutenin) des Klebers sich angesammelt haben, in letztere eingebettet ist die Stärke, darüber ein

fester Überzug, bestehend aus den Kleberzellen aus eiweißartigem Inhalt, ein Name, der leider immer zu Verwechselungen mit der Kleber des Endosperms führt, dann folgt die Samenhaut und eine Reihe von Hüllen, die aber keine Nährstoffe mehr führen. Im Korn vertieft liegt der Keimling.

Mit rein mechanischen Mitteln hat Fleurent 1899 das Getreide (Weizen) zerlegt und 83.53 Prozent Mehl, 1.39 Prozent Keimlinge und 15.8 Prozent Hülsen bestimmt.

Die Hochmüllerei liefert eine ganze Reihe von Mehlsorten mit teilweise verschwindenden Mengen von Hülsen; diese Mehlsorten werden nur bei Weizen hergestellt und zu Weißbrot und Gebäcken verwandt. Die Art der Ausmahlung hängt vielfach von der kaufmännischen Konjunktur ab. Auf dem Lande hält sich noch weit verbreitet das Roggenbrot, besonders im Norden aus ganzem Korn gemahlen oder wenigstens unter Ausscheidung der Hauptmasse der Hülsen.

Der Konsument des Weizenbrotes ist hauptsächlich bei uns der Städter, der Bedarf an Weizen steigt daher auch mit der Städtebildung. Man bemerkt aber in Landgemeinden auch, daß dort, wo die Bauern nicht mehr selbst backen, vielmehr sich ein Bäcker niedergelassen hat, der Verbrauch von Weizenbrot, speziell von Kleingebäck, zunimmt. Es ist also wahrscheinlich eine Zunahme des Weizenkonsums überhaupt zu erwarten. Vor dem Krieg war das Verhältnis des von Menschen verzehrten Weizens zu Roggen wie 1:1.66, sehr viel wird sich das Verhältnis auch jetzt nicht verschoben haben, denn Eßgewohnheiten werden lange festgehalten, bei den Ausgewanderten, länger als die Muttersprache.

III. Ältere Anschauungen über Vermahlungsweise und Nährwert. Erste Verdauungsversuche am Menschen.

Die praktischen Erfahrungen haben natürlich den Menschen gelehrt, daß das feine Weizenbrot in vielen Richtungen dem schwärzeren, d. h. dem stark kleiehaltigen Brot vorzuziehen sei. Die Kriegsperiode hat ja auch bei uns nach dieser Richtung aufklärend gewirkt und besonders die Nachteile des Kriegsbrotes am eigenen Leibe fühlen lassen.

Der erste, der für das Militärbrot die Beseitigung der Kleie forderte, war Parmentier 1776. Damals kannte man aber die chemische Zusammensetzung im Brot überhaupt noch nicht.

Mit der Brotfrage hat man sich dann in den 50er Jahren des vorigen Jahrhunderts beschäftigt. Man behauptete damals, verdaulich seien Speisen nur dann, wenn sie mit dem Salzgehalt verzehrt würden, den die Natur den Nahrungsmitteln gegeben hat, also dürfte auch die Kleie im Brote nicht fehlen. Weiter sei in der Kleie neben Stärke auch noch Eiweiß, welches letztere das Brot kräftig mache; freilich bedingt die Kleie auch sehr viel Stuhl, was aber als ein Zeichen kräftiger Verdauung galt. Das Schrotbrot sei anderem vorzuziehen, weil es auf die gute Beschaffenheit der Zähne durch das Kauen einwirkt. Das feinere Brot führe überhaupt zu wenig Salze dem Körper zu, nur die Salze der Kleie könnten dieses Defizit decken und das Brot gesund machen.

Alle diese Fragen lassen sich experimentell am Menschen selbst entscheiden. Die ersten Versuche dieser Art sind in den Jahren um 1880 ausgeführt worden durch die Untersuchung der Verdaulichkeit bei ausschließlichem Brotgenuß.

Eine grundsätzliche Entscheidung haben Versuchsreihen ergeben, bei denen Brote aus Mehl verschiedener Ausmahlung des Weizens verglichen wurden, also 30, 70, 95 Prozent Ausmahlung. Die Ergebnisse waren sehr eindeutig. Am besten war das Brot bei 30 Prozent Ausmahlung, und am schlechtesten wurde das bei 95 Prozent Ausmahlung verdaut. Der Reichtum oder Mangel an Salzen tut also gar nichts für die Verdaulichkeit, und die Ausscheidungen werden um so massenhafter und enthalten um so mehr Nährstoffe als Bestandteile, je mehr die Kleie überwiegt. Besonders auffallend war gerade die geringe Verdaulichkeit des Eiweißes bei den Broten aus Mehl starker Ausmahlung. Eine Erklärung dafür läßt sich leicht experimentell geben. Leicht verdaulich ist das Eiweiß des Endosperms, wenn man es vorher isoliert und verzehren läßt. Das Unverdauliche sind also die eigentlichen Kleberzellen. Diese Tatsachen sind in der Folgezeit immer wieder von Nachprüfern bestätigt worden.

Die Technik hat sich in der folgenden Zeit seit 1880 bis in die Kriegszeit hinein immer wieder damit beschäftigt, eine Mahlweise zu finden, die die Zellen der Kleie zertrümmert, um das Eiweiß freizumachen.

Dutzende von Verfahren sind in dieser langen Zeit empfohlen und mit der Behauptung, das Problem sei gelöst, in die Welt hinausgeschickt worden. Mit staunenswertem Eifer hatten sich immer wieder Forscher gefunden, die solche neuen Entdeckungen nachprüften mit dem Ergebnis, daß die neuen Erfindungen abzulehnen seien. Die Bemühungen waren bisher ohne allen sicheren Erfolg. Die Zähigkeit der Zellhüllen scheint allen Bemühungen der Vermahlung zu trotzen. Es ist auch für die Zukunft eine Änderung kaum zu erwarten und nach den weiteren Mitteilungen, die ich zu machen habe, nicht erforderlich. Nach den Erfahrungen des täglichen Lebens ist das Bedürfnis nach Broten aus hochwertiger Ausmahlung im Volke selbst gering.

Eine rein medizinische Verwendung finden sie bei Personen mit krankhaft trägem Stuhl oder auch bei Personen, bei denen infolge des Genusses leicht verdaulicher Kost eine zur täglichen Ausscheidung nicht zureichende Menge von Stuhl gebildet wird. Aus letzterem Gesichtspunkte heraus ist man in England zuerst zur Empfehlung eines Weizenbrotes mit 95 Prozent Ausmahlung des Grahambrotes übergegangen.

Die unverdaute Kleie ist dabei ein Füllmittel des Darmes, das zur täglichen Stuhlentleerung drängt. Derselbe Zweck kann auch durch Obst und Gemüse erzielt werden.

IV. Neuere Untersuchungen.

Die Frage der Brotversorgung drängte sich in der Kriegszeit viel lauter in den Vordergrund, wo es sich um die Nöte der Volksernährung überhaupt handelte. Aufs neue wurden damals die Behörden bestürmt, verschiedene alte wie neu aufgenommene patentierte Ausmahlverfahren und ein angeblich

besser nährendes Vollkornbrot einzuführen. Von wissenschaftlicher Seite wurden solche Vorschläge nachgeprüft. Manche Patente lieferten zwar verbesserte Brote, meist aber nur auf dem Wege einer unbewußten oder verschleierten Beseitigung der Kleie. An dem schon vor der Kriegszeit feststehenden Urteil, daß auch die Methoden der Feinvermahlung die Verdaulichkeit des Vollkornbrotes nicht erhöhen, hat sich nichts geändert.

Erleichtert wurden die Lösungen aller hier einschlägigen Fragen durch die Ausbildung neuer Untersuchungsmethoden, besonders mit Bezug auf den Nachweis der Kleie und der Zellhüllen und der Ausscheidungen überhaupt.

Die umfangreichen Versuche über die Verdaulichkeit der Zerealien, die in dieser Zeit ausgeführt wurden, haben unser Urteil über den Nährwert der letzteren ungemein erweitert und neue Tatsachen von allgemeinem Interesse aufgedeckt, deren wichtigste im nachstehenden Erwähnung finden mögen.

Unser Bedarf an Weizen konnte bisher durch Eigenbau in Deutschland nicht gedeckt werden. 1912/13 wurden zu etwa 2.89 Millionen Tonnen (genußtauglichen) Weizenmehles noch 1.37 Millionen Tonnen aus dem Auslande importiert. Schon darin sollte ein Ansporn zu vermehrtem Anbau des Weizens liegen. Bei den Arbeiten der letzten Jahre hatte ich vielfach Gelegenheit zu einem Vergleiche der Verdaulichkeitsverhältnisse von Roggen und Weizen, aus denen sich mit Bestimmtheit eine erhebliche Verschiedenheit beider ergibt. Es sind, wie man lange weiß, chemische Unterschiede beider vorhanden im Sinne der besseren Backfähigkeit und des höheren Eiweißgehaltes des Weizens, aber auch rein physiologische Unterschiede.

Bei einem exakten Vergleich von Weizen und Roggen, bei gleichem Kleiegehalt hat sich ein ganz gewaltiger Unterschied in der Verdaulichkeit des Eiweißes ergeben; in dieser wie auch in der Gesamtverdaulichkeit aller Nährbestandteile steht Weizen dem Roggen voran.

Unsere Erntestatistik in Deutschland zeigt, daß das mittlere Erträgnis bei gleicher Aussaat pro Hektar beim Weizen günstiger ist als beim Roggen. Berücksichtigt man dies, so kommt man zu folgender Zusammenstellung:

1 Hektar Weizen liefert um 20 mehr an verdaulichen Substanzen und um 70 Prozent mehr an Eiweißstoffen als der Roggen. Es ist also rationeller, wo es der Boden und das Klima erlaubt, Weizen anzubauen als den Roggen. Durch den vermehrten Weizenanbau würde insofern auch noch ein Vorteil erreicht, als die Gesamtzufuhr des Proteins erhöht werden würde, was mit Rücksicht darauf, daß die Proteinstoffe im Weizen und Roggen jenen der Animalien im Nährwert nahestehen, von Wichtigkeit wäre.

Inwieweit die deutsche Landwirtschaft eine Umstellung auf größere Weizenproduktion erlaubt, vermag ich nicht zu beurteilen. Jedenfalls steht aber vom Standpunkt der Volksernährung nichts im Wege, den Roggen noch weiter durch Weizen zu ersetzen; das lehren ja die Gesundheitsverhältnisse großer Länder, die den Anbau des Roggens überhaupt nicht pflegen.

In Hinsicht auf die Verdauungsmöglichkeit hat die Menge der Zellhüllen in den Getreidearten die größte Bedeutung. Man hat sich bis zum Jahre 1916 meist damit begnügt, die sogenannte Rohfaser bei den

Pflanzen festzustellen. Inzwischen hatte ich eine Methodik der Abscheidung der Zellmembranen im ganzen zu erreichen ausgearbeitet. Aus ihrer Anwendung ergab sich die Unzulänglichkeit der Rohfaserzahlen. Die Rohfaser kann manchmal nur ein Viertel der Zellmembranmasse darstellen, speziell bei den Getreidearten ist sie kein brauchbarer Maßstab für die Zellmembranen. Im allgemeinen lassen sich die Zellmembranen in drei Gruppen von Stoffen scheiden, in die echte Zellulose, Pentosane und einen Rest, der aus Lignin, Hexosanen usw. gebildet wird. Als ein Beispiel mag die Zellmembran des Roggens üblicher Ausmahlung in ihrer Zusammensetzung angegeben sein. In 100 Teilen sind:

Zellulose	28.25	Prozent
Pentosan	35.33	»
Restsubstanz . .	36.42	»

Die Menge der Zellhüllen im Getreide erreicht nach meinen Analysen aus der Kriegszeit etwa 11—12 Prozent; sie wird an Menge von anderen Pflanzen ganz erheblich übertroffen. So sind z. B. im Spinat und Salat 26.6 bis 29.7 Prozent der Trockenmasse solche Zellmembranen. Im Getreidekorn verhalten sich, was die Verdaulichkeit anlangt, die Zellmembranen des Keimlings am besten. Dann folgt die Zellmembran des Endosperms und schließlich als ungünstigstes die Zellmembranen der Samenhülle. Im Gesamtdurchschnitt wurde bei starker wie schwacher Ausmahlung etwa die Hälfte des Zellmembrans verdaut, unter mancherlei Schwankungen, weil die Auflösung auf einen unkontrollierbaren Faktor die Bakterienmitarbeit eingestellt ist, deren Hauptwirkung im Dickdarm einsetzt. Da vom Dickdarm aus aber die Resorption nur sehr unvollkommen erfolgt, so kann man auch sagen, die Auflösung der Zellmembranen kommt zu spät, daher bleibt auch manches unverdaut liegen, was bei den Tieren mit anderem Bau des Verdauungskanals noch zur Resorption kommen kann.

Am unbeständigsten ist die Auflösung der Zellulose, am leichtesten die der Pentosane; von Lignin, das etwa 18 Prozent der Zellmembranen des Getreides ausmacht, wird sicher ein Teil zerlegt; das weitere Schicksal des Pentosans und der Lignine ist bis jetzt unbekannt.

Bei der Verdauung der Zellmembranen entwickeln sich reichlich Gase, der Nährwert der Verdauungsprodukte kann nicht hoch angeschlagen werden. Bei diesen Betrachtungen über die Zellmembranen hat sich ein Weg gezeigt, auf dem sich eine Verbesserung des Mahlverfahrens ohne Schädigung von Ernährungsinteressen ausführen läßt. Während des Krieges wurde das ganze Korn vermahlen, meist so, wie es aus der Tenne kam, ein gesundheitlich geradezu widersinniges Verfahren. Es gibt schon seit über 40 Jahren ein Schälverfahren, das man Dekortikation nennt; es hat zum Ziele, nach der Reinigung des Getreides auch noch die äußeren Hüllen wegzunehmen, wobei auch der Keimling mitentfernt wird. Gewiß sind diese Schälverfahren nicht immer einwandfrei und nehmen manchmal mehr weg, als beabsichtigt ist, doch lassen sie sich technisch auch so leiten, daß nur Spreu, Putzstoffe, Unkrautsamen, Keimlinge und die äußersten Hüllen des Kornes abfallen. Da-

bei verliert man etwa 5 Prozent des Korngewichtes im ganzen, entfernt aber 21.7 Prozent der Zellmembranen und würde rein rechnerisch von den nährenden Bestandteilen etwa 3 Prozent einbüßen. Tatsächlich verliert man durch die sachgemäße Dekortikation aber überhaupt nichts, weil die Verdaulichkeit des Brotes aus dekortiziertem Getreide besser ist als jene des Brotes aus nicht dekortiziertem Getreide.

Die Schälung des Kornes ist also eine volkswirtschaftlich und gesundheitlich rationelle Maßregel, deren allgemeine Durchführung durch geeignete Verordnungen angestrebt werden sollte.

Wenn unsere Nahrung verdaut wird, so geschieht das dadurch, daß sich fortwährend in bestimmter Mischung Verdauungssäfte ergießen, das Gelöste wird in das Blut durch die Darmwand hindurch aufgenommen, und neue Mengen von Verdauungssäften strömen nach, bis die Massen den Dünndarm durchgewandert haben. Von diesen Verdauungssäften bleibt ein Teil, allerdings verändert, im Dünndarm, schiebt sich zum Dickdarm und verläßt dann eingedickt den Menschen. Manche Nahrungsmittel, wie Eier, Milch, Fleisch, geben sozusagen keinen Nahrungsrückstand, sondern nur solchen, den die Reste der Verdauungssäfte darstellen. Verluste sind sie immerhin, denn sie führen ja Verbrennliches nach außen.

Bei den Vegetabilien verläuft der Prozeß insofern anders, als zum mindesten kleinere oder größere Anteile des Verzehrten selbst nicht aufgelöst werden. Bei dem Brot ist das Verhältnis von wirklich Unverdautem zu dem Reste der Verdauungssäfte meist wie 1 : 1.

Den Drüsen, die ihre Säfte in den Darm ergießen, werden bei den einzelnen Nahrungsmitteln ganz verschieden große Aufgaben gestellt. Die Animalien, Fleisch, Eier, Milch, sind hauptsächlich Träger des Eiweißes, während die Vegetabilien, von den Leguminosen abgesehen, durchschnittlich wenig Eiweiß enthalten. Vom Eiweiß ist erwiesen, daß es mit der Gallebildung der Leber im engsten Zusammenhang steht, während Fett und Kohlehydrate keinen steigernden Einfluß auf die Gallenmenge haben. Führen wir, wie bei den Animalien, viel Eiweiß ein, so erscheint auch mehr Galle im Darm, und von dieser bleibt ein Teil nach Umformung als Rest zurück und wird schließlich ausgeschieden. Es findet auch schon im Mutterleib eine solche Bildung von Abfallstoffen statt, die nach der Geburt als sogenanntes Kindspech abgehen. Die Galle gehört wohl zu den wichtigsten Darmsäften, aber nebenbei steht sie doch mit dem Eiweißstoffwechsel, wie schon berührt, im Zusammenhange. Zu den Drüsensäften, die für alle Nahrungsmittel gemeinsam sind, gehören außer Galle der Magensaft, Pankreassaft, der Darmsaft aus den Drüsen der Darmwand.

Von all diesem Gemenge bleibt ein wahrscheinlich seiner Zusammensetzung nach wechselnder Rest, schließlich aber eine breiige Masse zurück. Diese läßt sich von dem wirklich Unverdauten, wenn solches vorhanden ist, abtrennen, und man kann also das Verhältnis beider zueinander mit ziemlicher Genauigkeit bestimmen. Bei den Animalien besteht es sozusagen, wie übrigens schon erwähnt, aus diesen Resten, bei den Vegetabilien halten sich Unverdautes und Darmsaftrest das Gleichgewicht, aber die letzteren repräsen-

tieren in bestimmten Fällen bis zu 80 Prozent aller Ausscheidungen überhaupt. Offenbar werden bei der Resorption der Nahrungsmittel höchst ungleiche Anforderungen an den Darm gestellt, ohne daß uns das zum Bewußtsein kommt. Nicht für alle, aber doch für einen großen Teil der Nahrungsmittel bin ich in der Lage, Angaben zu machen. Nachstehend folgt eine Tabelle, welche angibt, wieviel Kalorien solcher Darmsaft und Stoffwechselreste in den festen Ausscheidungen erscheinen, wenn 100 Kalorien Nahrungsmittel aufgenommen worden sind:

bei feinstem Weizenbrot	2.0	Prozent
bei Fleisch und Animalien	4.4	»
bei Äpfeln	6.9	»
bei Brot aus Weizenvollkorn	7.3	»
bei Brot aus gelben Rüben	8.3	»
bei Brot aus Roggenvollkorn	8.8	»
bei Kohlrüben	11.8	»
bei Wirsing	19.5	»

Die Unterschiede sind enorm große und erreichen etwa das Zehnfache. Es ist wahrscheinlich, daß hier die größten vorkommenden Abweichungen wirklich getroffen sind. Beachtet werden muß bei den Vegetabilien, daß jedesmal auch wirklich noch Unverdautes als Abfall hinzuzurechnen wäre. Ein Nahrungsmittel wie das Brot kann je nach dem Grundmaterial — feinstes Mehl oder Vollkorn — Unterschiede um etwa das Vierfache aufweisen.

Die Animalien stehen in dieser Zusammenstellung nicht an der Spitze, weil für sie, wie erwähnt, die stärkere Anregung der Gallebildung in Frage kommt.

Die Wurzelgewächse setzen die Reihe hochgradiger Mengen der Darmreste fort, und die grünen Gemüse, als deren Repräsentant der Wirsing gelten kann, stellen das Extrem dar. Das auf den Darm Wirkende scheint der Saft zu sein, der sich bei hohem Druck (300 Atmosphären) abtrennt, jedenfalls nicht der grüne Farbstoff.

Wenn die Reste der Darmsäfte ungleich sind, so müssen selbstverständlich auch die Mengen der Säfte, die überhaupt mobil gemacht werden, ungleich groß sein. Sicherlich ist es vom gesundheitlichen Standpunkte nicht gleichgültig, ob unser Darm stark oder wenig belastet wird, ob viel oder wenig Darmsäfte sich ergießen und die Drüsen in Tätigkeit gehalten werden. Aber auch vom rein ökonomischen Standpunkt leuchtet ein, daß Stoffverluste — vom Unverdaulichen abgesehen — bis zu $^1/_5$ der Aufnahme unrationell sind, falls man solche Dinge als Nahrungsmittelquelle benutzen wollte. Mit dem starken Zulauf der Säfte nach dem Darm muß selbstredend auch eine erhebliche Blutmenge aus dem Kreislauf genommen und anderen Zwecken entzogen werden.

Das Brot, das wir zumeist genießen, wird sich, was die Darmsaftreste anlangt, zwischen den Zahlen 2—8 bewegen. Im übrigen bringt ein gewisses ästhetisches Empfinden und entwickelte Kultur es im allgemeinen dahin, daß die den Darm stark belastenden Dinge in der Kost auf jenes Mindestmaß

zurückgeschraubt werden, das durch die notwendige Abwechselung in den Speisen von der Natur gefordert wird.

Den Aschebestandteilen des Brotes hat man im Lauf der Zeit eine ganz verschiedene Bedeutung beigelegt. Die Unabhängigkeit der Verdaulichkeit vom Aschegehalt wurde schon eingangs erwähnt.

Betrachtet man das Brot als Teil unserer Nahrung überhaupt, so wird, wie sich leicht zeigen läßt, mit der Motivierung, nur Vollkornbrot sei dem Körper zuträglich, die Rolle des Brotes weit überschätzt. Im Durchschnitt unserer nationalen Ernährung nimmt der Erwachsene pro Tag rund 14.3 g Salze auf (ohne die Salze der Getränke und ohne die Berechnung des Kochsalzes). Demgegenüber macht es nur einen Unterschied von 1.4 g Salzen aus, wenn wir Weißbrot mit Vollkornbrot vertauschen. Dabei wird bei stärkerer Ausmahlung die Art der Salze geändert; je kleiereicher das Brot wird, um so mehr Magnesia herrscht vor. Im allgemeinen liefert das Brot fast die Hälfte der gesamten Magnesia, die wir aufnehmen, aber kaum $^1/_5$ des Kalkes. Die großen Mengen Magnesia haben wir gar nicht nötig, und in einem guten Trinkwasser kann in einem Tag doppelt so viel Kalk aufgenommen werden, als im Vollkornbrot enthalten ist.

Bei ausschließlicher Brotkost ließ sich nachweisen, daß bei reichlichem Genuß an Brot beim Erwachsenen auch bei Verwendung von Mehl von 65 Prozent Ausmahlung das Kalkbedürfnis gedeckt war. Für einen wachsenden Organismus würde das Brot bei ausschließlicher Kost wegen Kalkmangel das Knochenwachstum behindern.

Auffallend ist, daß bei Berücksichtigung der Einfuhr und Ausfuhr aller Salze bei allen Brotsorten ein sehr erhebliches Defizit vorhanden war, das mit der Zeit der ausschließlichen Broternährung ein Ende setzen würde.

Vermutlich spielt bei dem großen Verlust an Salzen der Umstand eine Rolle, daß die Verdauungssäfte beim Brot in so erheblichem Maße in Anspruch genommen werden. Die Salze treten nicht allein im Darme aus, vielmehr finden sie sich auch in den flüssigen Ausscheidungen.

In der Literatur liegen eine Reihe von Behauptungen vor, daß Brot mit wenig Kleie ungesunder ist, weil ihm die Vitamine fehlen. In Wirklichkeit war über das Brot und seinem Vitamingehalt nichts Näheres bekannt. Vor kurzem sind aber im Anschluß an die später zu berichtenden Untersuchungen Experimente über den Vitamingehalt ausgeführt worden, sowohl für Weizenals auch für Roggenbrot mit vollem Gehalt an Kleie und bei einer geringeren Ausmahlung. Zwischen den Brotsorten zeigte sich überhaupt kein nennenswerter Unterschied im Vitamingehalt. Mit Bezug auf Vitamin A war überall der Gehalt verschwindend. Ein Erwachsener müßte täglich 800 g Brot verzehren, um seinen Bedarf an Vitaminen A zu decken. Von Vitamin B war in keinem der Brote so viel vorhanden, daß junge Tiere hätten damit wachsen können, und ein Erwachsener würde auch mit 1000 g noch nicht so viel Vitamine zugeführt haben, um auf die Dauer auf seinem Gewicht bleiben zu können. Brot ist also überhaupt kein Nahrungsmittel, das kleiehaltig oder nicht praktisch in Betracht kommende Vitaminmassen zuführt. Die Frage der Ausmahlung braucht auf den Vitamingehalt keine

Rücksicht zu nehmen. Zur Deckung der täglich notwendigen Vitaminmenge trägt ein Brot so gut wie nichts bei; es ist daraus auch kein Schaden zu befürchten, weil die übliche gemischte Kost ausreichend andere Quellen für Vitamine uns bietet.

Die Betrachtungen des Brotes, eines Volksnahrungsmittels von größter Bedeutung, hat gezeigt, daß es trotz des Jahrtausende alten Gebrauches für sich allein betrachtet eine Reihe von Eigenschaften wahrnehmen läßt. die im täglichen Gebrauch, wo es einen Teil unserer Gesamtnahrung darstellt, nicht zu erkennen sind. Als alleinstehendes Mittel der Ernährung kann es weder als Eiweißträger noch zur Versorgung des Körpers mit Energie auf die Dauer befriedigen, und ebenso würde auch der Bedarf an Salzen beim Erwachsenen, noch weniger beim Kind gedeckt sein. Es enthält auch keine Geschmacks- und Riechstoffe, die auf die Dauer die monotone Kost erträglich machen würden. Die quantitative Seite der Nahrungsaufnahme versagt daher bald. Weder Kind noch Erwachsener würden ihren Vitamingehalt decken, und doch haben die Zerealien ihren Wert als Weltnahrung.

Genau so wie hier für das Brot und die Zerealien würde die Kritik auch für viele andere Nahrungsmittel lauten. Selbst für die Milch außerhalb des Kindesalters. Die traditionelle Kost ist überall eine Mischung von Nahrungsmitteln, von denen eines für die Mängel eines anderen eintritt. Sie ist das Gegenteil der Monotonie. Unendlich viele Lösungen gesunder Kost erlaubt Pflanzen- und Tierwelt, sie wird nach bestimmter volkstümlicher Form uns anerzogen. Nur Eigenbrötelei oder wie im Kriege die Not führt gelegentlich zu ungesunden und einseitigen Ernährungsformen.

V. Landwirtschaftliche und volkswirtschaftliche Ausblicke.

Während der Blockadezeit war eine vollständige Vermahlung des Getreides verfügt worden, zum Teil sind von manchen Müllern sogar noch ungiftige Unkrautsamen zugesetzt worden und außerdem erhielt das Kriegsbrot zeitweise Zusätze von Kartoffeln oder Kohlrüben. Die Herstellung von Vollkornbrot tritt quantitativ nicht sehr in die Erscheinung, nur in einzelnen Landbezirken hält man in alter Tradition noch an der groben Vollvermahlung fest.

In der Mehrzahl der Fälle scheidet man die Kleie ab und verwendet sie als Viehfutter, als welches sie sehr geschätzt wird.

Im Kriegsbrot haben wir die Kleie selbst verzehrt. Eine Sparung an Getreide hat das aber kaum bewirkt. Denn die Bauern, denen bei der Fütterung ihres Tierbestandes die Kleie fehlte, haben in ausgedehntem Maße weniger Getreide abgeliefert und den Roggen meist verfüttert. Die Menschen haben also die Kleie gegessen, und das Vieh hat mit dem Korn gewissermaßen feines Mehl, das für den Menschen bestimmt war, als Zulage bekommen.

Der Grund, warum man die Kleie nicht abgetrennt hat, lag in der damaligen Ernährungspolitik begründet. Man wollte um jeden Preis möglichst viel Mehl herausschaffen, es lag aber auch in der völlig falschen, wenn auch weitverbreiteten Anschauung, daß bei der Fütterung von Kleie oder dergleichen an Tiere nur ein kleiner Anteil an Nährstoffen bei der Mast wiedergewonnen werden kann.

Die Frage, inwieweit durch eine gemeinwirtschaftliche Teilung des Kornes zur Menschenernährung einerseits, der Kleie zur Tierfütterung andererseits die Nährwerte des Getreides nutzbar gemacht werden können, ist von größter volkswirtschaftlicher Bedeutung. Sie muß einwandfrei gelöst werden. Auf meine Anregung der Ausführung geeigneter Versuche ist auch das Ernährungsministerium bereitwillig eingegangen.

Mein Plan war folgender: Von einer großen Menge von Roggen sollten unter genauer mühlentechnischer Kontrolle vier verschiedene Produkte hergestellt werden[1].

1. Mehl von 60 Prozent Ausmahlung, wobei 40 Prozent Kleie abfallen,
2. » » 80 » » , » 20 » » » ,
3. » » 95 » » , » 5 » » » ,
4. geschrotetes Mehl 95 Prozent, » 5 » » » .

Aus den Mehlsorten wurden die entsprechenden Brote hergestellt und dann an 4 Personen[2] Ernährungsversuche gemacht, wobei neben Brot nur etwas leichter Tee oder Kaffee und sehr wenig Fett gegeben wurde. Im ganzen hatten also die Personen sozusagen 4 Wochen bei Wasser und Brot zugebracht.

Die Kleien wurden dann im landwirtschaftlichen Institut zu Rostock von Prof. Hohncamp auf die Verdaulichkeit an Hammeln geprüft. Im landwirtschaftlichen Institut zu Berlin wurden von Prof. Scheunert die Kleien verfüttert und mit allen experimentellen Kautelen bestimmt, ob und wieviel Fleisch und Fett dabei erzeugt worden war.

Die Versuche an 4 Männern ergaben keine anderen Resultate, als ich und C. Thomas im Jahre 1916 für Roggenmehlbrote verschiedener Ausmahlung gefunden hatten. Aber die Wiederholung war notwendig, weil zum Vergleich mit den Ergebnissen der Tierversuche eben die menschliche Ernährung mit dem gleichen Roggen unbedingt ausgeführt werden mußte.

Von den Eiweißstoffen des Roggens wurden, gleichgültig wie ausgemahlen wird, vom Menschen nur etwa 60 Prozent verdaut, und aus der ganzen Masse der Nährstoffe wird um so weniger verdaut, je schärfer ausgemahlen wird, das Vollkornbrot zeigt einen Verlust von 13 Prozent, gibt also 87 Prozent als verdaulich, doch berührt das hier zunächst nicht weiter.

Unter den vier Personen war diesmal auch ein Vegetarier, der außerdem Anhänger der Fletschergemeinde war, d. h. jeden Bissen eine bestimmte Zeit kaute, ehe er verschluckt wurde. Ein sonderbarer Zufall wollte, daß der Vegetarier im ersten Versuch sich günstiger verhielt als die anderen Personen, eine Tatsache, die durch Auffinden von Bandwürmern, die im Darm »mitgegessen« hatten, sich erklärte. Nach Abtreiben der Würmer war auch bei dem Vegetarier in der Verdaulichkeit des Brotes kein Unterschied vorhanden, auch nicht bei Schrotbrot, wo man hätte denken können, daß das Fletschern

[1] Die mühlentechnische Aufsicht und die Herstellung des Brotes hat Hr. Prof. Neumann, Berlin, ausgeführt.

[2] Die Versuche an 2 Personen hat Prof. C. Thomas in Leipzig angestellt.

an sich einen Einfluß geübt hätte. Nachdem die Berichte der verschiedenen Beobachter eingegangen waren, galt es, die Schlußrechnung einer so großen und umfangreichen Untersuchung auszuführen.

Die Tiere hatten bei Kleieverfütterung sowohl Fleisch als auch Fett gebildet. Man muß dabei folgendes beobachten. Zur richtigen Mast darf man nur Tiere nehmen, welche zu ihrer Lebenshaltung mit Heu, Gras, Klee usw., d. h. mit Nahrungsmitteln auskommen, die der Mensch als Nahrung nicht gebrauchen kann. Zu dieser Kost setzt man erst die wertvolle Kleie als Mastfutter zu.

Als wichtige Gesamtergebnisse haben wir also jetzt

a) den Nutzeffekt, den der Mensch durch die Verdauung aus dem Brot gewinnt,

b) den Nutzeffekt, der durch die Mast der Tiere mit Kleie in der Form von Fleisch und Fett erscheint.

Je mehr man das Korn ausmahlt, nimmt auch die Menge der verdaulichen Brotmenge zu, andererseits erhalten wir aus der Tiermast um so mehr Fleisch und Fett, je weniger das Korn ausgemahlen wird.

Das Gesamtresultat der ausgeführten Versuche lautet auf 100 Teile Roggen Trockensubstanz, berechnet

bei Prozent Ausmahlung	Verdaut aus Brot Kalorien	Erhalten aus Tiermast Kalorien	Summe der Kalorien
65	247.6	99.2	346.8
82	296.6	30.8	327.4
95	343.7	7.2	350.9
95 (geschrotet)	331.6	7.2	338.8

Die Summe der erhaltenen Gesamtnährwerte ist sozusagen in allen Fällen dieselbe. In demselben Maße, wie bei stärkerer Ausmahlung nicht nur mehr Brot, sondern auch wirklich mehr an Verdaulichem zu gewinnen ist, nimmt der Mastgewinn ab. Vom rein ökonomischen Standpunkt und des reinen Kaloriengewinnes kann man jede der vier Möglichkeiten wählen.

Vom diätetischen Standpunkte aus und im Hinblick auf die Volksernährung und für die Landwirtschaft liegt die Sache ganz anders. Der Vorteil liegt auf Seite der schwächeren Ausmahlung, denn sie gibt besseres, den Darmkanal nicht belastendes Brot, sie bietet durch die Tiermast sowohl etwas Fleischgewinn und vor allem Fettgewinn, zusammen mit Brot also eine verbesserte Kost. Die Landwirtschaft kann auch einen größeren Tierbestand erhalten, wenn sie darauf zählen darf, durch Mastfutter ihn nutzbringend zu verwerten.

So klein der Fleischgewinn bei der Mast aus den proteinarmen Roggenkleien auch war, so genügt die Zulage doch, um auch die resorbierte Eiweißmenge in den vier Versuchsreihen gleichzumachen.

Das Masterträgnis war sehr günstig. Die weitverbreitete Anschauung, aus Pflanzennahrung ließen sich nur unter bedeutendem Energieverlust tierische Körperstoffe erzeugen, ist eben unzutreffend. Betrachten wir die Endprodukte

der Mast, so bestehen sie in Eiweißansatz und zumeist in Fettbildung aus Kohlehydraten.

Für die Bildung von Fleisch aus Futtereiweiß wissen wir aus zahlreichen Versuchen über das Wachstum, daß hierzu kein nennenswerter Energieaufwand gehört, ja selbst die beim Aufbau aus Aminosäuren oder beim Abbau von Protein in Frage kommenden Energiemengen (Wärmetönungen) sind verschwindend klein. Warum sollte also gerade bei der Eiweißmast ein Energieaufwand nötig sein? Ganz ähnlich steht es mit der Fettbildung aus Kohlehydraten. Lusk hat in kalorimetrischen Tierversuchen gezeigt, daß ohne experimentell nachweisbare Energieverluste diese Umwandlung geschieht.

Die falschen Vorstellungen haben sich nur deshalb eingenistet, weil man die Mastversuche nicht richtig angestellt hat. Die Kunst der optimalen Mastfütterung besteht nun darin, daß beim Tier der Betriebsstoffwechsel (mit einem kleinen Überschuß) durch die üblichen Nährstoffe, die für den Menschen unverwendbar sind, gedeckt wird. Dazu kommt dann das Mastfutter. Vom Mastfutter darf auch nicht der kleinste Teil für die Befriedigung des Betriebsstoffwechsels verlorengehen.

Nun wäre noch folgendes zu betrachten: Bei dem Genuß des Brotes durch den Menschen entsteht naturgemäß auch »Dünger«, der für die Landwirtschaft sehr wertvoll wäre. Dieser Düngerabfall geht in der Mehrzahl der Fälle verloren, weil die Abfallstoffe zumeist durch die Kanalisation abgeführt werden, wenn man von dem seltenen Fall der Rieselfelder absieht. Dagegen gewinnt die Landwirtschaft durch Kleiefütterung den Abfall an Dünger vollständig.

Aus 100 Teilen trockenem Getreide entstehen in Kalorien:

	Dungstoffe vom Menschen	Dungstoffe aus der Kleie vom Tier	Summe
65 Prozent Ausmahlung	21.1	39.7	60.8
82 » »	47.7	12.3	80.0
95 » »	59.6	10.0	69.6
95 » Schrot	68.1	10.0	78.1

Der Gewinn war also im Durchschnitt bei Vernachlässigung menschlicher Dungstoffe bei schwacher Ausmahlung am günstigsten. Für die Volkswirtschaft und Volksernährung ist es rationeller, die schwächere Ausmahlung des Kornes mit der Kleiefütterung in der Tierzucht zu verbinden, um die hochwertigen Produkte, wie das Fett, mitzugewinnen. Wir hätten also auch in der Kriegswirtschaft besser daran getan, auf die volle Vermahlung des Kornes zugunsten der Fetterzeugung zu verzichten.

Ausgegeben am 21. April.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1925

IX. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 12. März.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Penck sprach über glazialgeologische Beobachtungen im bayerischen Hochalpenzuge. (Ersch. später.)

Er verfolgt die Stromlinien des durch das Mittenwalder Tor geflossenen Astes des Inngletschers, die Stadien dessen Rückzuges, die dabei auftretenden Stauseebildungen, und indem er das Gschnitzstadium der Alpen für gleich alt mit den mittelschwedischen Endmoränen erweist, gelangt er zu einer Parallelisierung der spät- und postglazialen Zeit der Alpen mit der Skandinaviens. Es haben sich bei Mittenwald 5 Vorkommnisse interglazialer Breccien gefunden, die teils der Riß-Würm-, teils der Mindel-Riß-Interglazialzeit angehören. Dazu gesellt sich eine wahrscheinlich präglaziale Breccie. Die Lagerungsverhältnisse der älteren weisen auf energische Krustenbewegungen während des Eiszeitalters.

2. Das korrespondierende Mitglied der physikalisch-mathematischen Klasse Hr. Sommerfeld übersandte eine in Gemeinschaft mit Hrn. H. Hönl verfaßte Arbeit »Über die Intensität der Multiplett-Linien«.

Die relativen Intensitäten der Spektrallinien eines beliebigen Multipletts werden durch arithmetrische Formeln festgelegt, welche einerseits ihrer Form nach an das Korrespondenzprinzip anschließen, andererseits die Summenregeln von Burger und Dorgelo exakt erfüllen.

3. Vorgelegt wurden zwei mit Unterstützung der Akademie erschienene Arbeiten von Otto Ruff und Ernst Vidic: »Das Rutheniumpentafluorid und ein Verfahren zur Trennung von Platin und Ruthenium« (Sonderabdr.) und »Wertigkeit des Rutheniums« (Sonderabdr. 1924).

Über die Intensität der Multiplett-Linien.

Von A. Sommerfeld und H. Hönl.

Die Utrechter Messungen haben gelehrt, daß für die relativen Intensitäten der Spektrallinien eines Multipletts die Summenregeln von Burger und Dorgelo gelten: Die Intensitätssummen aller Komponenten, welche zum gleichen Anfangsniveau (innere Quantenzahl j) gehören, verhalten sich wie die »Quantengewichte« $(2j+1)$ dieses Niveaus; das Entsprechende gilt für die Komponenten, welche zum gleichen Endniveau gehören. Durch ihren arithmetischen Charakter weisen diese Regeln auf die Quantentheorie als ihre Wurzel hin.

Die Summenregeln genügen aber nur im Dublettfalle, um die Intensitäten einzeln zu bestimmen. Für die höheren Multiplizitäten hat man eine »Ganzzahligkeitshypothese« zu Hilfe gezogen, die aber in ihrer ursprünglichen Form fallen zu lassen ist. Wir sind zwar — insbesondere auf Grund der folgenden Erörterungen — überzeugt, daß die relativen Intensitäten innerhalb jedes Multipletts rational sind, also durch ganze Zahlen ausgedrückt werden können; aber der früher hierbei angenommene Einheitsmaßstab hat sich als zu groß erwiesen.

Auf der Ausschau nach anderweitiger Vervollständigung des Intensitätsschemas ist von verschiedenen Seiten auf das Korrespondenzprinzip hingewiesen worden[1]. Dieses bewährt auch im gegenwärtigen Falle, wie wir sehen werden, seine außerordentliche heuristische Kraft. Natürlich kann es die Summenregeln nicht ersetzen. Aber es liefert einen allgemeinen Rahmen, der durch die Summenregeln auszufüllen ist, bestimmt die Größenordnung der Intensitätsverhältnisse bei hohen Quantenzahlen und gibt daher auch einen Anhaltspunkt für die analytische Form der Ausdrücke, welche bei niederen Quantenzahlen die Intensitäten darstellen.

Die Anwendung des Korrespondenzprinzips auf das Intensitätsproblem[2] stützt sich auf eine allgemeine Vorstellung über den Atombau: Das Atom besitze eine ausgezeichnete Achse, die Achse des gesamten Impulsmoments $jh/2\pi$, welche wir j-Achse nennen wollen. Sie ist im allgemeinen verschieden von der Impulsachse des unangeregten s-Zustandes, die j_s-Achse

[1] L. S. Ornstein und H. C. Burger, Zeitschr. f. Phys. **31**, 355, 1925. A. Sommerfeld, Zeitschr. f. techn. Phys. **6**, 1, 1925. Für das entsprechende Problem bei den Zeemaneffekten: H. Hönl, Zeitschr. f. Phys. **31**, 340, 1925, R. d. L. Kronig und V. Goudsmith, Naturwissenschaften 1925. Die Arbeit von Ornstein und Burger hat uns in der Korrektur vorgelegen und war für das Folgende vielfach nützlich. Übrigens teilt uns Hr. Ornstein mit, daß er die Formeln dieser Arbeit nicht mehr für exakt hält, da sie unter Umständen negative Intensitäten geben.

[2] A. Sommerfeld und W. Heisenberg, Zeitschr. f. Phys. **11**, 131, 1922.

heißen möge. Unter $j_a h/2\pi$ verstehen wir das zum s-Zustande hinzukommende Moment der Anregung. j_a ist gleich $k-1$, wo k die azimutale Quantenzahl bedeutet. Wir haben also

Term:	s	p	d	f ..
$k=1$,	2,	3,	4 ..	
$j_a=0$,	1,	2,	3 ..	

Aus j_s und j_a setzt sich j vektoriell zusammen[1]. ϑ sei der Winkel zwischen der j- und j_a-Achse, also der der Seite j_s im Dreieck j_s, j_a, j gegenüberliegende Winkel. Wie Ornstein und Burger l. c. schreiben wir

$$(1)\qquad \cos\vartheta = \frac{j^2+j_a^2-j_s^2}{2jj_a}, \qquad \sin^2\vartheta = \frac{\{(j+j_a)^2-j_s^2\}\{j_s^2-(j-j_a)^2\}}{4j^2j_a^2}$$

$$(2)\qquad \cos^2\frac{\vartheta}{2} = \frac{(j+j_a)^2-j_s^2}{4jj_a}, \qquad \sin^2\frac{\vartheta}{2} = \frac{j_s^2-(j-j_a)^2}{4jj_a}.$$

Da unsere Intensitätsformeln, wie wir sehen werden, vorzüglich mit der Erfahrung übereinstimmen, finden auch die zugrunde gelegten Modellvorstellungen, die zumal bei den Multipletts $k\to k$ recht unsicher und unbestimmt sind, eine gewisse allgemeine Bestätigung.

§ 1. Die Multipletts $k\to k-1$.

Zu dieser Klasse von Multipletts gehören die am längsten bekannten Beispiele komplexer Liniengebilde, die zusammengesetzten Dubletts und Tripletts (pd), (df), ... Unsere Betrachtungen umfassen darüber hinaus den allgemeinen Fall eines beliebigen Termsystems von der Multiplizität r. Allgemein gilt

$$r = 2j_s+1, \qquad j_s = \frac{r-1}{2}.$$

Anfangs- und Endterm mögen demselben Termsystem angehören, also gleiches j_s besitzen; die interessante Frage der Interkombinationen zwischen verschiedenen Termsystemen schließen wir hier aus.

Indem wir statt k unsere Größe j_a benutzen, wollen wir unser Multiplett definieren durch den Übergang $j_a\to j_a-1$. Wir setzen also voraus, daß das Anfangsniveau das größere j_a besitze, bemerken aber, daß die folgenden Formeln, wegen der allgemeinen Gleichberechtigung von Anfangs- und Endniveau, auch für den umgekehrten Übergang, also auch für die Kombinationen (ps), (dp), (fd), ... gelten.

Ferner setzen wir zunächst $j_a > j_s$ und auch $j_a - 1 \geq j_s$ voraus. Beide Terme haben dann die »permanente« Niveauzahl r. In diesem Falle gilt (wegen der vektoriellen bzw. algebraischen Zusammensetzung von j aus j_s und j_a) für den Anfangsterm

$$j_{\max} = j_a + j_s, \qquad j_{\min} = j_a - j_s,$$

---

[1] Vgl. die Fig. 119 und 120 in A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, 4. Aufl., Braunschweig 1924.

für den Endterm

$$j_{\max} = j_a - 1 + j_s, \quad j_{\min} = j_a - 1 - j_s.$$

Wegen des umgekehrten Falles ($j_a \leqq j_s$) vgl. § 5.

Unser Multiplett hat folgende Bauart:

Schema 1. $k \to k-1$.

	o								
	o	o							
j_a+j_s-1	J_{-1}	J_0	J_{+1}						
j_a+j_s-2		J_{-1}	J_0						
j_a+j_s-3			J_{-1}						
j_a-j_s+1					J_{-1}	J_0	J_{+1}		
j_a-j_s						J_{-1}	J_0	o	
j_a-j_s-1							J_{-1}	o	o
j	j_a+j_s	j_a+j_s-1	j_a+j_s-2		j_a-j_s+2	j_a-j_s+1	j_a-j_s		

Links stehen die j-Werte des Endterms, beginnend mit $j_{\max} = j_a + j_s - 1$, endigend mit $j_{\min} = j_a - j_s - 1$, unten die j-Werte des Anfangsterms. Die leeren Felder des Schemas entsprechen Übergängen, die durch die Auswahlregel $\Delta j = \pm 1$ oder 0 verboten sind. Die mit J_{-1}, J_0, J_{+1} ausgefüllten Felder enthalten die nach der Auswahlregel erlaubten Kombinationen. Der Index bei J bedeutet die Differenz Δj (Endwert von j minus Anfangswert)[1]. In der Diagonale des Schemas stehen die »Hauptlinien«, deren Intensität nach Verabredung wegen $\Delta j = -1$ mit J_{-1} zu bezeichnen ist; bei ihnen geht der Übergang in j parallel zu dem Übergange in j_a (bzw. in k). Rechts von der Diagonale haben wir die »Satelliten 1. Ordnung« J_0 ($\Delta j = 0$), rechts anschließend die »Satelliten 2. Ordnung« J_{+1} ($\Delta j = +1$). Auf die Bedeutung der mit o ausgefüllten Felder links oben und rechts unten kommen wir in § 5 zurück.

Wir haben also, abgesehen von den Enden des Schemas, in jeder Horizontal- und Vertikalreihe drei Komponenten von den Intensitäten J_{-1}, J_0, J_{+1}. Für jedes dieser Tripel liefert die Korrespondenzbetrachtung eine Proportion (vgl. SOMMERFELD und HEISENBERG, l. c. (Gl. (12))

$$J_{-1} : J_0 : J_{+1} = \cos^4 \frac{\vartheta}{2} : 2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} : \sin^4 \frac{\vartheta}{2} \tag{3}$$

[1] Die Indizierung ist hier im Anschluß an ORNSTEIN und BURGER l. c. gewählt und umgekehrt wie die Indizierung bei SOMMERFELD und HEISENBERG l. c. und bei HÖNL l. c., wo als Index die j-Differenz Anfangswert minus Endwert benutzt wurde.

oder wegen Gl. (2):

$$J_{-1} : J_0 : J_{+1} = \frac{\{(j+j_a)^2 - j_s^2\}^2}{16 j^2 j_a^2} : \frac{\{(j+j_a)^2 - j_s^2\}\{j_s^2 - (j-j_a)^2\}}{8 j^2 j_a^2} : \frac{\{j_s^2 - (j-j_a)^2\}^2}{16 j^2 j_a^2} \tag{4}$$

Wie bei allen Anwendungen des Korrespondenzprinzips bleibt in diesen Formeln unbestimmt, ob wir das j des Anfangs- oder Endzustandes benutzen sollen; das Korrespondenzprinzip läßt sogar beliebige Zwischenwerte und verschiedene Wahl von j (bzw. ϑ) in den verschiedenen Gliedern der Proportion zu. Wir heben diese Unbestimmtheit, indem wir die Formeln so verschärfen, daß sie den Summenregeln exakt genügen, nicht nur in den mittleren Teilen des Schemas, sondern auch an den Rändern desselben (vgl. § 5), und daß dieselbe analytische Form der J nicht nur für das einzelne Tripel, sondern einheitlich für das ganze Multiplett gilt. Dazu ist zweierlei nötig: Erstens müssen wir in der Proportion (4) im Nenner einen Faktor j (oder, was dasselbe ist, einen Faktor $4jj_a$) fortlassen. Während nämlich die Summe der drei Glieder in (3) zu 1 normiert war, soll dieselbe nach den Summenregeln proportional zu $2j+1$ werden. Hierzu ist die Forthebung des genannten Faktors erste Vorbedingung. Zweitens aber müssen wir die analytische Form der Zählerfaktoren in charakteristischer Weise abändern. Wir führen die folgenden Abkürzungen ein:

$$\left\{\begin{aligned} P(j) &= (j+j_a)(j+j_a+1) - j_s(j_s+1), \\ Q(j) &= j_s(j_s+1) - (j-j_a)(j-j_a+1), \\ R(j) &= j(j+1) + j_a(j_a+1) - j_s(j_s+1), \end{aligned}\right. \tag{5}$$

welche der Reihe nach analog gebaut sind zu den Zählern in den Gln. (2) und (1). Der Ausdruck $Q(j)$ tritt bereits bei Ornstein und Burger l. c. auf. Der Ausdruck R, dessen Bauart mit derjenigen des Zählers in der Landéschen g-Formel aufs nächste verwandt ist[1], wird erst in § 3 verwendet werden. Gegenwärtig sind es die quadratischen Ausdrücke P und Q, und zwar mit jeweils um 1 verschiedenen Argumenten, welche für uns in Betracht kommen.

Wir ersetzen hiernach die Proportion (4) durch die folgende Darstellung, in der j stets den größeren der beiden j-Werte bedeuten soll, zwischen denen sich der betreffende Übergang abspielt:

$$\left\{\begin{aligned} & J_{-1} = r\frac{P(j)P(j-1)}{4jj_a}, \qquad J_{+1} = r\frac{Q(j)Q(j-1)}{4jj_a} \\ & J_0 = \frac{r}{4j_a}\cdot\frac{2j+1}{j(j+1)}P(j)Q(j) = \frac{r}{4j_a}\left(\frac{1}{j}+\frac{1}{j+1}\right)P(j)Q(j). \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Die absolute Normierung der J, die natürlich bis zu einem gewissen Grade willkürlich ist, wird unten besprochen werden.

---

[1] Der Zähler in der g-Formel geht aus $R(j)$ durch Vertauschung von j_a und j_s hervor; vgl. »Atombau«, 4. Aufl. S. 622.

Um unsere Formeln zu verifizieren, bilden wir die Intensitätssummen für die Horizontal- und Vertikalreihen unseres Schemas:

$$
(7)\qquad \begin{cases} \vec{\sum}_H J = J_{-1}(j+1) + J_0(j) + J_{+1}(j) \\ \vec{\sum}_V J = J_{-1}(j) \qquad + J_0(j) + J_{+1}(j+1). \end{cases}
$$

Bedeutet nämlich in der ersten dieser Gleichungen j die innere Quantenzahl der betrachteten Horizontalreihe, so spielt sich der Übergang J_{-1} zwischen $j+1$ und j ab. Nach der für die Gln. (6) getroffenen Verabredung müssen wir also J_{-1} für das Argument $j+1$ bilden; ebenso müssen wir in der zweiten der Gln. (7), wo j die innere Quantenzahl der betrachteten Vertikalreihe bedeuten wird und wo sich demnach der Übergang J_{+1} zwischen j und $j+1$ abspielt, J_{+1} für das Argument $j+1$ bilden.

Wir erhalten so aus (6), indem wir die Glieder mit gleichem Nenner vereinigen:

$$
(8)\qquad \begin{cases} \vec{\sum}_H J = rP(j)\dfrac{P(j+1)+Q(j)}{4(j+1)j_a} + rQ(j)\dfrac{P(j)+Q(j-1)}{4jj_a} \\[2ex] \vec{\sum}_V J = rP(j)\dfrac{P(j-1)+Q(j)}{4jj_a} + rQ(j)\dfrac{P(j)+Q(j+1)}{4(j+1)j_a}. \end{cases}
$$

In den hier auftretenden Brüchen heben sich die Nenner fort. Es ist z. B. nach (5)

$$
\begin{aligned} P(j)+Q(j-1) &= (j+j_a)(j+j_a+1) - (j-j_a)(j-j_a-1) \\ &= 4jj_a + (j+j_a) + (j-j_a) = 2j(2j_a+1), \end{aligned}
$$

also

$$
(9)\qquad \frac{P(j)+Q(j-1)}{4jj_a} = \frac{P(j+1)+Q(j)}{4(j+1)j_a} = \frac{2j_a+1}{2j_a};
$$

entsprechend

$$
(9a)\qquad \frac{P(j-1)+Q(j)}{4jj_a} = \frac{P(j)+Q(j+1)}{4(j+1)j_a} = \frac{2j_a-1}{2j_a}.
$$

Aus (8) ergibt sich hiernach zunächst:

$$
(10)\qquad \begin{cases} \vec{\sum}_H J = r(2j_a+1)\dfrac{P(j)+Q(j)}{2j_a}, \\[2ex] \vec{\sum}_V J = r(2j_a-1)\dfrac{P(j)+Q(j)}{2j_a}. \end{cases}
$$

Aus (5) berechnet man aber weiter

$$
(10a)\qquad \begin{aligned} P(j)+Q(j) &= (j+j_a)(j+j_a+1) - (j-j_a)(j-j_a+1) \\ &= 4jj_a + (j+j_a) - (j-j_a) = 2j_a(2j+1). \end{aligned}
$$

Somit folgt aus (10) schließlich, wenn wir noch r gleich $2j_s+1$ setzen:

$$(11)\qquad \begin{cases} \sum_H J = (2j_s+1)\,(2j_a+1)\,(2j+1) \\ \sum_V J = (2j_s+1)\,(2j_a-1)\,(2j+1)\,. \end{cases}$$

Wir haben also in der Tat Proportionalität mit dem Quantengewicht $2j+1$ für alle Horizontal- und Vertikalreihen, womit die Gültigkeit der Summenregeln für unsere Ausdrücke (6) verifiziert ist.

Mit der Verschiedenheit der Faktoren $2j_a \pm 1$ in (11) hat es folgende Bewandtnis: Die Summe der Quantengewichte der Horizontal- und Vertikalreihen ist als arithmetische Reihe gleich der Anzahl der Glieder mal dem arithmetischen Mittel der Quantengewichte von $j_{\max}$ und $j_{\min}$. Letzteres Mittel ist gleich $2j_a-1$ für die Horizontalreihen, gleich $2j_a+1$ für die Vertikalreihen. Die Gliederzahl ist beidemal gleich[1] $2j_s+1=r$. Bezeichnen wir also mit $\sum H$ bzw. $\sum V$ die Summe der Quantengewichte der Horizontal- bzw. Vertikalreihen, so können wir (11) auch schreiben

$$(12)\qquad \sum_H J = (2j+1)\sum V, \quad \sum_V J = (2j+1)\sum H.$$

Daraus geht hervor, daß unsere Normierung der Intensitäten mit derjenigen übereinstimmt, die Burger und Dorgelo in ihrer grundlegenden Arbeit[2] über die Summenregeln gewählt haben.

Zur allgemeinen Begründung der Bauart unserer Formeln (6) genüge vorläufig folgendes: Die paarweise Gleichheit der Nenner j und $j+1$ in (8) war offenbar wesentlich zur Erfüllung der Summenregeln; ferner war es wesentlich, daß diese Gleichheit erhalten blieb beim Übergange von den Horizontal- zu den Vertikalreihen, d. h. bei Vertauschung von j mit $j+1$ in $J_{\pm 1}$. Endlich war wesentlich, daß die Faktoren der Zähler unter sich paarweise gleich waren und gleich blieben bei dem entsprechenden Übergange. Daß darüber hinaus diese Faktoren zwangläufig aus gewissen mit den Summenregeln zusammenhängenden Forderungen abgeleitet werden können, werden wir in § 5 nachtragen.

§ 2. Vergleich mit der Erfahrung.

Im Dublettfalle, wo die Summenregeln allein zur Festlegung der Intensitäten genügen, geben unsere Formeln notwendig dieselben Werte wie die von Burger und Dorgelo seinerzeit abgeleiteten und geprüften, insbesondere also das Verhältnis 2 : 1 bei der (sp)-Kombination.

Im Triplettfalle lassen die Summenregeln eine Unbestimmtheit bestehen, welche wir durch unsere Formeln heben wollen. Wir berechnen deshalb die Schemata (pd) und (df) für $j_s=1$, $j_a=2$ bzw. 3 und erhalten:

---

[1] Ist $j_a \leq j_s$, vgl. § 5, so kehrt sich die Bedeutung der Faktoren um (r = arithmetisches Mittel der maximalen und minimalen Quantengewichte, $2j_a+1$ = Gliederzahl im Anfangs-, $2j_a-1$ im Endniveau). Die Normierung bleibt also auch für diesen Fall in Kraft.

[2] Zeitschr. f. Phys. **23**, 258, 1924.

		d		
	j	3	2	1
p	2	63	$\frac{45}{4}$	$\frac{3}{4}$
	1		$\frac{135}{4}$	$\frac{45}{4}$
	0			15

		f		
	j	4	3	2
d	3	135	$\frac{35}{3}$	$\frac{1}{3}$
	2		$\frac{280}{3}$	$\frac{35}{3}$
	1			63

Für die Satelliten zweiter Ordnung entnehmen Ornstein und Burger l. c. aus Messungen von Dorgelo bzw. 0.6 und 0.2, was innerhalb der Meßgenauigkeit vollkommen übereinstimmt mit dem vorstehenden Ergebnis $^3/_4$ und $^1/_3$. Was die stärkeren Linien betrifft, so werden diese bereits durch die Summenregeln kontrolliert; dementsprechend stimmen auch für diese die Messungen mit unseren theoretischen Werten überein.

Als weiteres Beispiel geben wir das (df)-Multiplett im Quintettsystem. Hier ist $j_s = 2$, $j_a = 3$. Messungen an Fe (vgl. Ornstein und Burger, l. c.) liegen bisher nur für die Satelliten zweiter Ordnung vor und ergaben, in der Reihenfolge abnehmender j geschrieben,

$$1.0 : 1.5 : 1.7 .$$

Das nachfolgende theoretische Schema gibt

$$\frac{5}{2} : 5 : 5 = 1 : 2 : 2 .$$

Die Übereinstimmung ist, bei der Schwierigkeit der Messungen, auch hier befriedigend.

		f				
	j	5	4	3	2	1
d	4	275	$\frac{75}{2}$	$\frac{5}{2}$		
	3		$\frac{375}{2}$	$\frac{105}{2}$	5	
	2			120	50	5
	1				70	35
	0					35

Was wir an diesem Schema sehen, gilt allgemein für beliebige Multipletts der hier betrachteten Klasse, wie an unseren Formeln (6) leicht zu bestätigen ist: Die Intensität der Hauptlinien nimmt in der Diagonalen von

oben nach unten (d. h. mit abnehmenden j) monoton ab. (In § 6, Schema 4 und 5, wird dies dadurch zum Ausdruck kommen, daß die Nullstellen von J_{-1} sämtlich auf der Verlängerung der Diagonalen nach unten hin liegen.) Am unteren Ende verwischt sich der Intensitätsunterschied zwischen Hauptlinien und Satelliten erster Ordnung um so mehr, je kleiner j_a im Vergleich zu j ist[1]. Diese letzteren sowie auch die Satelliten zweiter Ordnung nehmen an Intensität nach der Mitte des Schemas hin im allgemeinen zu.

Weitere quantitative Daten sind für diese Multiplettklasse zur Zeit nicht verfügbar.

§ 3. Die Multipletts $k \to k$.

Bekanntlich gibt es »heteromorphe« Terme, d. h. Terme, die zu Serien mit verschiedener Konvergenzgrenze (zu verschiedener Struktur des Atomrumpfes) gehören und die nicht nach der gewöhnlichen, sondern nach der von O. Laporte aufgedeckten Auswahlregel $\Delta k = 0$ kombinieren. Die ältesten Beispiele dieser Art sind die Gruppen (pp'), (dd') bei Ca, Sr usw. Die komplizierten Spektren, z. B. Cr, Mn, Fe, ... haben eine große Reihe weiterer Beispiele dieser Klasse hinzugefügt.

Als Hauptlinien haben wir hier die Kombinationen $\Delta j = 0$ anzusehen, als Satelliten die Kombinationen $\Delta j = \pm 1$. Die Unterscheidung in Satelliten erster und zweiter Ordnung wird hier hinfällig. Die Intensität der Hauptlinien ist jetzt mit J_0, diejenige der Satelliten mit $J_{\pm 1}$ zu bezeichnen. In dem folgenden allgemeinen Schema stehen die Hauptlinien in der Diagonalen, die Satelliten J_{+1} bzw. J_{-1} schließen nach rechts bzw. links an, wenn wir über das Vorzeichen von Δj dieselbe Verabredung treffen wie in § 1. Indem wir wieder j_a statt k benutzen, definieren wir unser Multiplett durch den Übergang $j_a \to j_a$. Die Quantenzahlen j laufen dann in beiden Termen von $j_{max} = j_a + j_s$ bis $j_{min} = j_a - j_s$. Dabei setzen wir zunächst $j_a > j_s$ voraus. Wegen der mit 0 ausgefüllten Felder vgl. § 5.

Schema 2. $k \to k$.

	0							
0	J_0	J_{+1}						
$j_a + j_s - 1$	J_{-1}	J_0	J_{+1}					
$j_a + j_s - 2$		J_{-1}	J_0					
$j_a - j_s + 2$					J_0	J_{+1}		
$j_a - j_s + 1$					J_{-1}	J_0	J_{+1}	
$j_a - j_s$						J_{-1}	J_0	0
j	$j_a + j_s$	$j_a + j_s - 1$	$j_a + j_s - 2$		$j_a - j_s + 2$	$j_a - j_s + 1$	0	

[1] Vgl. auch Sommerfeld und Heisenberg, l. c. S. 145 (Intensitätsregel II).

Die Korrespondenzbetrachtung liefert für je drei in einer Horizontal- oder Vertikalreihe stehende Intensitäten die Proportion (vgl. Sommerfeld und Heisenberg, l. c. Gl. (15)):

$$J_0 : J_{+1} : J_{-1} = 2\cos^2\vartheta : \sin^2\vartheta : \sin^2\vartheta \tag{13}$$

oder nach den Gl. (1) der Einleitung

$$J_0 : J_{\pm 1} = \frac{\{j^2 + j_a^2 - j_s^2\}^2}{8j^2 j_a^2} : \frac{\{(j+j_a)^2 - j_s^2\}\{j_s^2 - (j-j_a)^2\}}{16 j^2 j_a^2}. \tag{14}$$

Wir haben diese Ausdrücke so abzuändern und zu normieren, daß sie in jeder Horizontal- und Vertikalreihe des Schemas den Summenregeln genügen. Dies erreichen wir wie in § 1 einmal durch Forthebung des Faktors $4jj_a$ im Nenner, sodann durch Einführung unserer Ausdrücke P, Q, R aus (5). Indem wir wieder unter j den größeren der beiden j-Werte verstehen, zwischen denen sich der Übergang abspielt, setzen wir

$$\left\{\begin{aligned} J_0 &= r\frac{2j_a+1}{j_a+1}\left\{\frac{R(j-1)R(j)}{4jj_a} + \frac{R(j)R(j+1)}{4(j+1)j_a}\right\}, \\ J_{\pm 1} &= r\frac{2j_a+1}{j_a+1}\cdot\frac{P(j)Q(j-1)}{4jj_a}. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

(Wegen der Normierung vgl. den Schluß dieses Paragraphen.)

Daß wir hier die beiden Ausdrücke für $J_{\pm 1}$ einander genau gleich setzen, rührt daher, daß offenbar zwei Satelliten, die in unserem Schema symmetrisch zur Diagonalen stehen, nach den Summenregeln genau gleiche Intensität haben müssen. Dies bringt es ferner mit sich, daß die Erfüllung der Summenregel z. B. für die Horizontalreihe j diejenige für die Vertikalreihe j zur Folge hat. Je zwei solche Summen haben nämlich die Hauptlinie J_0 gemein, und die in jeder von ihnen vorkommenden Satelliten $J_{\pm 1}$ liegen paarweise symmetrisch zur Diagonalen. Wir betrachten daher nur die Summe in der Horizontalreihe j.

Diese schreibt sich (man beachte bei J_{-1}, daß, wenn j die Horizontalreihe, also die Quantenzahl des Endniveaus charakterisiert, die Quantenzahl $j+1$ des Anfangsniveaus die größere ist):

$$\sum\nolimits_H J = J_0(j) + J_{+1}(j) + J_{-1}(j+1). \tag{16}$$

Setzen wir aus (15) ein und ziehen die Glieder mit gleichem Nenner zusammen, so haben wir

$$\sum\nolimits_H J = r\frac{2j_a+1}{j_a+1}\left\{\frac{R(j-1)R(j)+P(j)Q(j-1)}{4jj_a} + \frac{R(j)R(j+1)+P(j+1)Q(j)}{4(j+1)j_a}\right\}. \tag{17}$$

Nun ist nach (5)

$$\begin{aligned} R(j-1)R(j) + P(j)Q(j-1) = {} & \{j(j-1)+j_a(j_a+1)\}\{j(j+1)+j_a(j_a+1)\} \\ & -(j+j_a)(j+j_a+1)(j-j_a)(j-j_a-1), \end{aligned}$$

da sich alle Glieder gegenseitig zerstören, die $j_s\,(j_s+1)$ enthalten. Durch Ausrechnung und Division mit $4jj_a$ erhält man für den ersten Bestandteil der Klammer in (17):

$$\frac{R(j-1)\,R(j)+P(j)\,Q(j-1)}{4jj_a}=j(j_a+1)\,.$$

Hieraus ergibt sich der zweite Bestandteil von (17) durch Vertauschung von j mit $j+1$. Im ganzen folgt also

$$\sum_H J = r\,(2j_a+1)(2j+1)\,. \tag{18}$$

Die Forderung der Summenregel, nämlich Proportionalität mit $2j+1$, ist also für jede Horizontalreihe und nach obigem auch für jede Vertikalreihe erfüllt.

Die absolute Normierung unserer Intensitätsformeln entspricht ersichtlich genau derjenigen in § 1. Es ist jetzt nämlich bei den in Gl. (12) angewandten Bezeichnungen[1]

$$\sum H=\sum V = r(2j_a+1)=(2j_s+1)(2j_a+1)\,,$$

was mit dem Normierungsfaktor in Gl. (18) übereinstimmt.

Um die Bauart unserer Formeln (15) im Einzelnen verständlich zu machen, verweisen wir auf § 5.

Wir geben noch eine Umformung des Ausdrucks (15) für J_0, die uns im folgenden nützlich sein wird. Setzen wir etwa zur Abkürzung

$$a=j_a(j_a+1)-j_s(j_s+1)\,, \tag{19}$$

so wird

$$\frac{R(j-1)}{j}+\frac{R(j+1)}{j+1}=j-1+\frac{a}{j}+j+2+\frac{a}{j+1}$$
$$=(2j+1)\left(1+\frac{a}{j(j+1)}\right)=\frac{2j+1}{j(j+1)}R(j)\,.$$

Wir können daher statt der oberen Zeile von (15) auch schreiben:

$$J_0=\frac{r}{4}\,\frac{2j_a+1}{j_a(j_a+1)}\,\frac{2j+1}{j(j+1)}R^2(j)=\frac{r}{4}\,\frac{2j_a+1}{j_a(j_a+1)}\left(\frac{1}{j}+\frac{1}{j+1}\right)R^2(j)\,. \tag{20}$$

Der Sonderfall $j_a=j_s$ liefert eine erste Bestätigung unserer Formeln. Hier wird $j_{\min}=j_a-j_s=0$. Gl. (20) aber ergibt für $j=0$ und $j_a=j_s$

$$\lim_{j=0}\frac{R^2(j)}{j}=0\,,\quad J_0=0\,,$$

also das bekannte Landésche Verbot $0\to 0$ für die inneren Quantenzahlen.

§ 4. Vergleich mit der Erfahrung.

Im gegenwärtigen Fall ist schon das Dublettsystem von Interesse. Wir setzen $j_s={}^1/_2$, $j=j_a\pm{}^1/_2$ und finden aus (15), wenn wir einen gemeinsamen Faktor 4 fortlassen:

[1] Im Falle $j_a<j_s$ vertauscht sich die Bedeutung der beiden Faktoren.

j	$j_a + \frac{1}{2}$	$j_a - \frac{1}{2}$
$j_a + \frac{1}{2}$	$j_a(2j_a + 3)$	1
$j_a - \frac{1}{2}$	1	$(j_a + 1)(2j_a - 1)$

insbesondere für $j_a = 1$ und $= 2$:

p \ p'		
	5	1
	1	2

d \ d'		
	14	1
	1	9

Messungen sind hierfür nicht bekannt.

Dagegen liefert das Triplettsystem in dem von DORGELO gemessenen Ca-Multiplett (dd') eine glänzende Bestätigung der Theorie. Hier berechnet man mit $j_s = 1$, $j_a = 2$ in ganzen Zahlen (wobei man einen Faktor $5/12$ herauszusetzen hat) bzw. in %:

d \ j \ d'	3	2	1
3	224	28	
2	28	125	27
1		27	81

=

100 (100)	12.5 (13.6)	
12.5 (13.6)	56 (56)	12.0 (13.6)
	12.0 (13.6)	36.2 (37)

Die eingeklammerten Zahlen des zweiten Schemas sind die DORGELOschen Meßwerte.

Obwohl bisher nicht sicher gemessen, sei auch die Triplettgruppe (pp') hergesetzt, wobei ein Faktor $9/4$ zu ergänzen ist.

p \ j \ p'	2	1	0
2	15	5	
1	5	3	4
0		4	0

Ebenfalls eine glänzende Bestätigung sehen wir in der Messung der Chromgruppe bei 3900 Å. E. (dd') im Quintettsystem durch R. Frerichs[1]. Unsere Formeln ergeben mit $j_s = 2$, $j_a = 2$ und mit einem herausgezogenen Faktor $^{25}/_4$:

d \ j	d': 4	3	2	1	0
4	30	6			
3	6	14	8		
2		8	5	7	
1			7	1	4
0				4	0

=

100 (100)	20.0 (24.5)			
20.0 (23)	46.0 (46)	26.7 (32)		
	26.7 (36.5)	16.7 (∞19.5)	23.3 (21)	
		23.3 (< 27)	3.3 (∞ 3)	13.3 (13.7)
			13.3 (13.7)	

Die eingeklammerten Zahlen sind die Messungen von Frerichs.

Lehrreich ist auch das entsprechende Multiplett im Sextettsystem $j_s = 5/2$, $j_a = 2$, Normierungsfaktor $^1/_{20}$:

d \ j	d': $\frac{9}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{9}{2}$	$\frac{110}{9}$	$\frac{25}{9}$			
$\frac{7}{2}$	$\frac{25}{9}$	$\frac{338}{63}$	$\frac{27}{7}$		
$\frac{5}{2}$		$\frac{27}{7}$	$\frac{54}{35}$	$\frac{18}{5}$	
$\frac{3}{2}$			$\frac{18}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{3}$
$\frac{1}{2}$				$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{3}$

Wir stellen fest: Die Intensität nimmt in der Diagonalen nicht mehr monoton ab, sondern erreicht bei der vorletzten Linie ein ausgesprochenes Minimum. Diese »Hauptlinie« ist schwächer als die schwächsten Satelliten (auch bereits

[1] Zeitschr. f. Phys. 31, 305, 1925.

in den beiden vorangehenden Beispielen, wenn man von der Intensität 0 des Übergangs $0 \rightarrow 0$ absieht). Die Satelliten nehmen nach der Mitte des Schemas von beiden Seiten her an Intensität zu.

Das hier bemerkte Verhalten der Intensität auf der Diagonalen ist typisch für den Fall $j_a < j_s$. Suchen wir nämlich das Minimum von J_0 auf, indem wir Gl. (20) nach j differentiieren, so ergibt sich, wenn wir den Normierungsfaktor gleich $1/C$ setzen:

$$(21) \qquad C J_0'(j) = \frac{2j+1}{j(j+1)} 2 R(j) R'(j) - \frac{2j^2+2j+1}{j^2(j+1)^2} R^2(j).$$

Infolgedessen haben wir

$$(22) \qquad J_0'(j) = 0 \text{ für } R(j) = 0.$$

Die Lage des Minimums bestimmt sich also, wenn wir die Abkürzung (19) benutzen, aus der quadratischen Gleichung:

$$j(j+1) = -a.$$

Ist $a < 0$, so werden die Wurzeln reell. Die allein in Betracht kommende positive Wurzel ist

$$(23) \qquad j_0 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - a}.$$

Im Falle des (dd')-Multipletts im Sextettsystem haben wir $j_s = 5/2$, $j_a = 2$, $-a = 11/4$, also

$$j_0 = -\frac{1}{2} + \sqrt{3} = 1.23.$$

Das Minimum liegt also zwischen $j = 1/2$ und $j = 3/2$, näher an letzterer Stelle. Damit erklärt sich die Schwäche der vorletzten Linie $J_0 = 1/15$ in dem vorangehenden Schema. Tatsächlich bemerken[1] Meggers, Kiess und Walters, daß im Sextettsystem von V und Fe^+ die vorletzte Hauptlinie die schwächste von allen Komponenten der Multipletts (dd') sei, wie es unser Schema verlangt.

Der Minimalwert, den J_0 an der Stelle j_0 annimmt, ist nach (22) und (20) gleich 0. Im allgemeinen wird j_0 zufolge (23) nicht rational ausfallen, so daß der Minimalwert $J_0 = 0$ nicht direkt zu beobachten ist. Dies tritt aber im besonderen für das Multiplett (dd') im Septettsystem ein. Hier ist $j_s = 3$, $j_a = 2$, $-a = 6$ und daher $j_0 = 2$. In diesem Falle haben wir zu erwarten, daß die vorletzte Linie der Diagonalen nicht etwa nur die schwächste Komponente ist, sondern daß sie überhaupt verschwindet. Tatsächlich versieht Laporte[2] bei einem Multiplett (dd') im Septettsystem von Fe die vorletzte Linie der Diagonalreihe mit der Marke »ber«, d. h. nicht beobachtet. Zugleich gibt er nach King als geschätzte Intensität der drittletzten Linie eine kleinere (12) an als für die letzte (15). Auch dies entspricht unserer Formel, welche für die fraglichen drei Komponenten die relativen Werte liefert: $J_0 = 7 : 0 : 8$.

Schließlich liegt der analoge Fall noch beim (ff')-Multiplett im Oktettsystem vor: $j_s = 7/2$, $j_a = 3$, $-a = 15/4$. Daher wird nach Gl. (23) $j_0 = 3/2$,

[1] Journ. Opt. Soc. 9, 372, 1924.

[2] Zeitschr. f. Phys. **26**, 1, 1924. Es handelt sich um das Multiplett Nr. 31, und zwar um die Komponente $\nu = 23720.99$; wegen der Intensitäten vgl. die Tabelle am Schluß der Arbeit.

und es besitzt wieder die vorletzte Hauptlinie eine verschwindende Intensität. Ferner ergibt sich auch hier die Intensität der drittletzten Linie kleiner als diejenige der an letzter Stelle stehenden Linie; die relativen Intensitätswerte sind: $J_0 = 5:0:7$. Die experimentelle Bestätigung dieser interessanten Voraussage steht gegenwärtig noch aus.

Das hier besprochene Intensitätsminimum im Falle $j_a < j_s$ entwickelt sich nach unserer Formel stetig aus dem Auswahlverbot $0 \to 0$ im Falle $j_a = j_s$. Im allgemeinen können wir sagen, daß es bei wachsendem j_s und nicht zu großem j_a auf der Diagonalen weiter fortschreitet und gegebenenfalls über die zweite Stelle hinausrücken kann.

Um die Diskussion der Gl. (21) abzuschließen, bemerken wir, daß (23) im Falle $j_a < j_s$ die einzige positive Wurzel von $R(j) = 0$ ist. Im Falle $j_a > j_s$ dagegen besitzt $R(j) = 0$ nur zwei negative oder imaginäre Wurzeln, die uns daher nicht interessieren. Zwar gibt es in diesem Falle eine andere positive Wurzel von (21). Diese bleibt aber stets kleiner als 1 und entspricht überdies einem Maximum von J_0. Wir schließen daraus, daß im Falle $j_a > j_s$, also bei permanenter Termmultiplizität, kein Minimalwert der Intensität auf der Diagonalen auftritt, vielmehr J_0 monoton mit abnehmendem j abnimmt.

§ 5. Ergänzendes zur Bauart unserer Intensitätsformeln.

Wir haben bisher beim Nachweis der Summenregeln unsere Intensitätssummen stets über alle drei Komponenten J_{-1}, J_0 und J_{+1} erstreckt, während in Wirklichkeit die Meinung der Summenregeln natürlich die ist, daß nur über die tatsächlich vorhandenen Linien zu summieren ist. An der oberen und unteren Ecke unseres Schemas 1 und 2 sind dies nicht drei, sondern nur zwei oder eine Linie. Der Widerspruch löst sich nur dann, wenn unsre Formeln für die bei der Summation mit Unrecht mitgezählten Komponenten automatisch den Wert 0 ergeben. Diese Komponenten sind in unseren Schematen 1 und 2 durch 0 hervorgehoben.

Betrachten wir zunächst Schema 1. Hier muß werden für

$$\begin{cases} j = j_a + j_s \\ j = j_a - j_s - 1 \end{cases} \quad J_{+1} = 0, \; J_0 = 0, \tag{24}$$

und für

$$\begin{cases} j = j_a + j_s + 1 \\ j = j_a - j_s \end{cases} \quad J_{+1} = 0. \tag{25}$$

(j bedeutet dabei nach wie vor die größere Quantenzahl des Überganges.) Um bequem zu sehen, daß dies tatsächlich der Fall ist, schreiben wir den in Gl. (6) gemeinsamen Faktor $Q(j)$ von J_0 und J_{+1} folgendermaßen um:

$$\begin{aligned} Q(j) &= j_s(j_s + 1) - (j - j_a)(j - j_a + 1) \\ &= (j_s - j + j_a)(j_s + 1 + j - j_a). \end{aligned} \tag{24'}$$

Dieser Faktor und somit gleichzeitig J_0 und J_{+1} verschwinden also für die beiden j-Werte (24). Andererseits zerlegt sich der zweite Faktor $Q(j-1)$ von J_{+1} in (6) folgendermaßen:

$$Q(j-1) = j_s(j_s+1)-(j-j_a)(j-j_a-1) \\ = (j_s+j-j_a)(j_s+1-j+j_a). \tag{25'}$$

Dieser Faktor und somit J_{+1} verschwindet für die beiden j-Werte (25).

Wir können nunmehr umgekehrt schließen: Weil wir (im Interesse der Allgemeingültigkeit unserer Summenberechnung) die mit o bezeichneten Komponenten an den Ecken unseres Schemas zum Verschwinden bringen wollen, haben wir die Faktoren in J_0 und J_{+1} so einzurichten, daß sie die Nullstellen (24) und (25) haben[1]. Dadurch ist der Zähler von J_{+1} vollständig, derjenige von J_0 zur Hälfte bestimmt. Tatsächlich sind wir bei dem erstmaligen Ansatz unserer Intensitätsformeln in dieser Weise vorgegangen.

In ähnlicher Weise können wir aber auch die übrigen Faktoren in (6) kontrollieren bzw. vorausbestimmen. Unsere Formeln (6) sollen ja nicht nur den Fall permanenter Niveauzahl $j_a > j_s$, sondern auch den Fall $j_a < j_s$ umfassen, in welchem diese Zahl noch nicht erreicht ist und daher eine Anzahl weiterer Linien irreal werden. Betrachten wir als Beispiel das Multiplett (pd) im Septettsystem (d fünffacher, p dreifacher Term). Unsere Formeln sind auf ein Schema von 7×7 Stellen zugeschnitten. Real ist davon aber nur das Rechteck von 5×3 Stellen oben links in Schema 3. Nur die drei realen p-Niveaus sind daher bei der Berechnung der Intensitätssummen zu berücksichtigen. Unsere Formeln sind mit dieser Forderung nur dann im Einklang, wenn wir die drei mit o bezeichneten Intensitäten, die in den Horizontalreihen $j = 1$ und $j = 0$ stehen, verschwinden lassen. Dagegen können wir nicht behaupten, daß auch die ebenfalls irrealen, mit × bezeichneten Komponenten zu o werden müssen, da sie in keinen realen, durch die Erfahrung kontrollierten Intensitätssummen vorkommen.

Schema 3. (pd) im Septettsystem.

	j	d: 5	4	3	2	1	0	−1
p	4	J_{-1}	J_0	J_{+1}				
p	3		J_{-1}	J_0	J_{+1}			
p	2			J_{-1}	J_0	J_{+1}		
	1				o	o	×	
	0					o	×	×
	−1						×	×
	−2							×

[1] Zunächst kann man zwar nur schließen, daß man für die in der Horizontalreihe $j_a - j_s$ und der Vertikalreihe $j_a + j_s - 1$ liegenden mit o bezeichneten Stellen $J_{+1} = 0$ zu setzen hat; für die Horizontalreihe $j_a - j_s - 1$ und die Vertikalreihe $j_a + j_s$ kann man zunächst nur auf $J_{+1} + J_0 = 0$ schließen. Durch die korrespondenzmäßige Form unserer Ausdrücke wird aber das Verschwinden von J_{+1} wie von J_0 einzeln nahegelegt.

Es ist daraufhin leicht, die Verhältnisse allgemein zu formulieren. Da wir dem Anfangsterm j_a, dem Endterm $j_a - 1$ zuordnen, wird im Anfangs- bzw. Endterm $j_{\min} = j_s - j_a$ bzw. $j_s - j_a + 1$; für die erste irreale Horizontalreihe ist also $j = j_s - j_a$.

Es muß daher werden:

$$J_0 = 0 \text{ für } j = j_s - j_a \tag{26}$$

und außerdem (bezogen auf den größeren j-Wert des Anfangsniveaus):

$$J_{-1} = 0 \text{ für } \begin{cases} j = j_s - j_a + 1 \\ j = j_s - j_a. \end{cases} \tag{27}$$

Nun folgt aus dem j-Werte in (26)

$$\begin{gathered} j + j_a = j_s,\; j + j_a + 1 = j_s + 1 \\ (j + j_a)(j + j_a + 1) - j_s(j_s + 1) = P(j) = 0 \end{gathered} \tag{26'}$$

und entsprechend aus (27)

$$P(j - 1) = 0 \text{ und } P(j) = 0. \tag{27'}$$

Unseren Forderungen (26) und (27) ist also genügt, wenn J_{-1} und J_0 den gemeinsamen Faktor $P(j)$ enthalten und J_{-1} außerdem den Faktor $P(j-1)$.

Die Ausdrücke (27') lassen sich, wie wir hier einschalten wollen, ihrerseits wieder in die Linearfaktoren zerlegen:

$$P(j) = (-j_s + j + j_a)(j_s + 1 + j + j_a) \tag{26''}$$

$$P(j - 1) = (-j_s - 1 + j + j_a)(j_s + j + j_a). \tag{27''}$$

Wir sehen daher, daß wir (26) und (27) formal zu vervollständigen haben:

$$\begin{cases} J_{-1} = J_0 = 0 \text{ für } \begin{cases} j = j_s - j_a \\ j = -j_s - j_a - 1 \end{cases} \\ J_{-1} = 0 \qquad\quad \text{für } \begin{cases} j = j_s - j_a + 1 \\ j = -j_s - j_a. \end{cases} \end{cases} \tag{28}$$

Die noch hinzugekommenen Nullstellen $-j_s - j_a - 1$ und $-j_s - j_a$ liegen selbstverständlich ganz im Gebiet der irrealen Intensitäten, werden aber für uns in den Betrachtungen des letzten Paragraphen Bedeutung gewinnen.

Wir können so die Bauart der Zähler in unsern Ausdrücken (6) auf einfache Weise begründen. Was ferner die Nenner betrifft, so ergeben sich diese aus der Forderung, daß sie sich bei der Bildung der Intensitätssummen gegen die Zähler fortheben müssen. Wesentlich ist bei diesen Betrachtungen, daß unsere Formeln, die ursprünglich für $j_a > j_s$ abgeleitet waren, so eingerichtet sind, daß sie auch für $j_a < j_s$ Gültigkeit behalten, indem sie automatisch die Intensitäten gewisser alsdann irrealer Kombinationen zum Verschwinden bringen.

Als ein lehrreiches Beispiel für die Wirkungsweise unseres Formelsystems sei der äußerste Fall der (sp)-Kombination $j_a = 1$ angeführt. Hier erhält man aus (6) mit $j = j_s + 1$ bzw. $= j_s$

$$J_{-1} = \frac{r}{4} \frac{\{(j_s+1)(j_s+2)-j_s(j_s+1)\}\{(j_s+2)(j_s+3)-j_s(j_s+1)\}}{j_s+1}$$
$$= r(2j_s+3)$$
$$J_0 = \frac{r}{4}\frac{(2j_s+1)}{j_s(j_s+1)}\{(j_s+1)(j_s+2)-j_s(j_s+1)\}\{(j_s(j_s+1)-(j_s-1)j_s\}$$
$$= r(2j_s+1)$$
$$J_{+1} = \frac{r}{4}\frac{\{j_s(j_s+1)-(j_s-1)j_s\}\{j_s(j_s+1)-(j_s-1)(j_s-2)\}}{j_s}$$
$$= r(2j_s-1).$$

Wir haben in diesem Falle also nur drei Linien (im Dublettfalle $j_s = 1/2$ sogar nur zwei Linien, da J_{+1} verschwindet), deren Intensitäten sich verhalten wie die Quantengewichte $2(j_s+1)+1, 2j_s+1, 2(j_s-1)+1$ der drei p-Niveaus; die Normierung durch den Faktor r entspricht dabei dem Quantengewicht $2j_s+1$ des s-Termes. Wir kommen damit auf den Ausgangspunkt dieser ganzen Forschungsrichtung, die Dorgeloschen Intensitätsmessungen der verschiedenen (sp)-Tripel zurück.

Hinsichtlich der Multiplettklasse $k \to k$ können wir uns kurz fassen. Hier ist durch die in Schema 2 mit o bezeichneten Felder der zweite Faktor im Zähler von $J_{\pm 1}$, Gl. (15), bestimmt. Den ersten Faktor findet man sodann aus zusätzlichen Bedingungen, nach Art von (26), (27) im Falle $j_a < j_s$. Schließlich ergeben sich die Nenner sowie der Ausdruck für J_0 aus den Summenregeln.

§ 6. Zur numerisch-graphischen Auswertung.

Unmittelbar anschließend an die im vorigen Paragraphen hervorgehobene Zerlegung der Zähler unserer Intensitätsformeln in Linearfaktoren ergibt sich eine sehr einfache und übersichtliche Methode zur numerischen Berechnung der Intensitäten.

Beginnen wir mit den Multipletts $k \to k-1$, zunächst der in § 2 behandelten (pd)-Kombination im Triplettsystem. Beim ersten Beispiel haben wir $j_s = 1$, $j_a = 2$ zu setzen. Wir markieren uns nun zunächst die Nullstellen (24) und (25) der Zähler in den Ausdrücken für J_{+1} und J_0 (in unserm Schema 4 durch o gekennzeichnet). Diese erfüllen, wie in § 5 allgemein begründet, an die Grenzen des Schemas direkt anschließend, die bei formaler Anwendung der Summenregeln noch hinzuzunehmenden Stellen und entsprechen hier bzw. den j-Werten 3 und 0, 4 und 1. Nach (28) kommen hierzu für J_{-1} und J_0 noch die Nullstellen bei $j = -1, -4$ und bei $j = -2, -5$. Dabei wollen wir in diesem Paragraphen die j-Werte einheitlich auf das Endniveau beziehen.

Wir sehen nun: Bei jeder Nullstelle verschwindet je einer der vier die Zähler konstituierenden Linearfaktoren. Aus dem Bau der Linearfaktoren geht aber ohne weiteres hervor, daß ein jeder von ihnen beim Fortschreiten um $|\Delta j| = 1$ parallel der Diagonale um 1 zu- oder abnehmen muß. Die Linearfaktoren lassen sich nun, was ihr Vorzeichen betrifft — und wir haben dies überall beobachtet — weiter so einrichten, daß ein jeder im Gebiet der realen

Schema 4. pd im Triplettsystem

j	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4
4	o							
3	o	o						
2	J_{-1}	J_0	J_{+1}					
1		J_{-1}	J_0	o				
0			J_{-1}	o	o			
−1				o	o	·		
−2					o	·	·	
−3						·	·	·
−4							o	o
−5								o

Intensitäten positiv wird. Demnach haben wir bei der Berechnung des zu einem bestimmten realen J gehörigen Zählers nichts weiter zu tun, als die Abstände der betreffenden Stelle von den zugehörigen vier Nullstellen, gemessen in Einheiten von j, miteinander zu multiplizieren. Wollen wir darüber hinaus auf die angegebene Weise auch noch die irrealen J berechnen, so haben wir nur zu beachten, daß sich, vom Gebiet der realen J herkommend, das Vorzeichen eines jeden Faktors beim Überschreiten einer Nullstelle ins Negative verkehrt.

Im Falle unsres Beispiels liest man daher aus dem voranstehenden Schema, wenn man noch die Normierungskonstante $r/4j_a = 3/8$ und die Nenner j bzw. $j+1$ nach den Gln. (6) bestimmt, unmittelbar ab:

$$\left.\begin{aligned} j &= 0, \\ j &= 1, \\ j &= 2, \end{aligned}\right\} J_{-1} = \begin{cases} \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5}{1} = 15 \\[2ex] \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}{2} = \dfrac{135}{4} \\[2ex] \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}{3} = 63 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} j &= 1, \\ j &= 2, \end{aligned}\right\} J_0 = \begin{cases} \dfrac{3}{8} \cdot \left(\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2}\right) 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 = \dfrac{45}{4} \\[2ex] \dfrac{3}{8} \cdot \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\right) 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 = \dfrac{45}{4} \end{cases}$$

$$j = 2, \quad J_{+1} = \frac{3}{8} \cdot \frac{2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2}{2} = \frac{3}{4}.$$

Der Umstand, daß alle vier Nullstellen von J_{-1} in Schema 4 und in allen analogen Fällen auf der unteren Verlängerung der Diagonalen liegen, hat offenbar zur Folge, daß J_{-1} auf der Diagonalen selbst von oben nach unten hin monoton abnimmt, worauf bereits in § 1 hingewiesen wurde. Daß im Gegensatz hierzu die Nullstellen von J_0 und J_{+1} teils oberhalb teils unterhalb des realen Gebietes liegen, zeigt entsprechend, daß diese Intensitäten nach der Mitte des Schemas hin zunehmen müssen.

Wir behandeln ebenso noch das (df)-Triplett $j_s = 1$, $j_a = 3$. Die Nullstellen der J liegen hier, wie aus nachstehendem Schema zu ersehen:

Schema 5. *df* im Triplettsystem.

j	4	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4	−5
5	o									
4	o	o								
3	J_{-1}	J_0	J_{+1}							
2		J_{-1}	J_0	o						
1			J_{-1}	o	o					
0				·	·	·				
−1					·	·	·			
−2						o	o	·		
−3							o	·	·	
−4								·	·	·
−5									o	o
−6										o

Die beiden zu J_0 und J_{-1} gehörigen Tripel von Nullstellen sind jetzt im Vergleich zu Schema 4 vom Gebiet der realen Intensitäten weiter abgerückt, ohne daß sich ihr gegenseitiger Abstand $2\,j_s + 1 = 3$ geändert hätte. Die Normierungskonstante wird $^1/_4$. Dem Schema entnehmen wir für:

$$\left.\begin{array}{l} j = 1\,, \\[2ex] j = 2\,, \\[2ex] j = 3\,, \end{array}\right\} J_{-1} = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{3\cdot4\cdot6\cdot7}{2} = 63 \\[2ex] \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{4\cdot5\cdot7\cdot8}{3} = \dfrac{280}{3} \\[2ex] \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{5\cdot6\cdot8\cdot9}{4} = 135 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} j = 2\,, \\ \\ j = 3\,, \end{array}\right\} \; J_0 = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right) 2\cdot 1\cdot 4\cdot 7 = \dfrac{35}{3} \\ \dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\right) 1\cdot 2\cdot 5\cdot 8 = \dfrac{35}{3} \end{array}\right.$$

$$j = 3\,,\; J_{+1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2\cdot 1\cdot 1\cdot 2}{3} = \frac{1}{3}\,.$$

Beim Übergang zum (sp)-Triplett $j_s = 1$, $j_a = 1$ rückt im Gegensatz zu dem bei Schema 5 Bemerkten das eine Nullstellentripel in das Gebiet der realen J hinein, so daß die volle Multiplizität nicht erreicht wird.

Gehen wir endlich zum Falle $k \to k$ über, so läßt sich die bisherige »Methode der Nullstellen« nur für die Reihen $J_{\pm 1}$ anwenden, da der Ausdruck für J_0 hier eine abweichende Bauart besitzt (welchem Umstand wir übrigens die hier auftretenden im vierten Paragraphen besprochenen Merkwürdigkeiten im Intensitätsgang verdanken). Allgemein haben wir hier für J_{+1} als Nullstellen des zweiten Zählerfaktors in Gl. (15).

$$j = j_a + j_s + 1$$
$$j = j_a - j_s$$

und für den ersten Faktor

$$j = j_s - j_a$$
$$j = -j_a - j_s - 1\,.$$

Die entsprechenden Nullstellen für J_{-1} liegen spiegelbildlich zur Diagonalen.

Auch hierfür wollen wir ein Beispiel geben: Wir wählen das schon in § 4 behandelte (dd')-Multiplett im Triplettsystem, $j_s = 1$, $j_a = 2$. Unser Schema wird:

Schema 6. dd' im Triplettsystem.

j	4	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4	−5
4		o								
3	o	J_0	J_{+1}							
2		J_{-1}	J_0	J_{+1}						
1			J_{-1}	J_0	o					
0				o	·	·				
−1					·	·	o			
−2						o	·	·		
−3							·	·	·	
−4								·	·	o
−5									o	

Durch Zählung von den Nullstellen aus findet man so für

$$\left.\begin{array}{l} j=2, \\ \\ j=3, \end{array}\right\} J_{+1}=\left\{\begin{array}{l} \frac{5}{8}\cdot\frac{2\cdot 1\cdot 3\cdot 6}{2}=\frac{5}{12}\cdot 27 \\ \frac{5}{8}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 4\cdot 7}{3}=\frac{5}{12}\cdot 28, \end{array}\right.$$

wie es nach § 4 sein muß. Dieselben Zahlenwerte treten natürlich auch für J_{-1} auf. J_0 berechnet man nunmehr am einfachsten nach den Summenregeln.

Überhaupt wird man beim praktischen Rechnen durch gleichzeitige Benutzung der Summenregeln im allgemeinen noch rascher zum Ziele gelangen. Die hier befolgte Methode der Berechnung wird man besonders bei kompliziert gebauten Multipletts mit Vorteil benutzen.

Durch die hier mitgeteilten Formeln dürfte das Intensitätsproblem der Multipletts nach der praktischen Seite erledigt sein. In der Tat sahen wir, daß unsere Formeln die äußersten Feinheiten der Beobachtung wiederzugeben bzw. solche vorauszusagen imstande sind. Andererseits haben wir die Frage nach der eigentlichen theoretischen Bedeutung unserer Formeln nicht berührt. Diese bleibt, wie in anderen Anwendungen der Quantentheorie, bis auf weiteres dunkel.

Anatomische Untersuchungen an einigen der Teneriffa-schimpansen namentlich über die Gewichts- und Querschnittverhältnisse der Muskeln.

Von R. Fick.

(Aus der Anatomischen Anstalt der Universität Berlin.
Vorgetragen am 15. November 1923 [s. Jahrg. 1923 S. 330].)

Leider starben in den Jahren 1921—1922 bekanntlich alle 5 weiblichen und im laufenden Jahre auch noch der männliche Schimpanse, die aus dem einst so verheißungsvollen Teneriffaunternehmen unserer Akademie in den Zoologischen Garten nach Berlin überführt wurden. Und jüngst mußte auch das hier geborene Schimpansenkind unheilbarer Krankheit wegen getötet werden. Die Leichen bzw. die einzelnen Leichenteile wurden, um den Wünschen der einzelnen wissenschaftlichen Anstalten entgegenzukommen, nicht alle einer Anstalt überwiesen, sondern auf verschiedene verteilt. Bei dreien der Schimpansen war die Todesursache eine Darmschmarotzerkrankheit (Balantidienruhr), eine schwangere Schimpansin starb an Lungenentzündung, die fünfte an Lähmungserscheinungen, der männliche an einer Grippe-Lungenentzündung; er zeigte aber außerdem die ausgesprochensten Erscheinungen der sogenannten fibrösen Knochenentzündung, die fast alle Knochen stark auftreibt. Die Oberkiefer waren besonders auffällig befallen. Hr. Dr. Christeller, Prosektor am Rudolf-Virchow-Krankenhaus, wird den für die Krankheitslehre bei den Affen hoch belangreichen Fall ausführlich besprechen.

Ich gebe zunächst einige Maße und Gewichte, die wir gleich nach dem Tode bei der Leichenöffnung feststellten. Je nach den verschiedenen Umständen, die zur Zeit der Leichenöffnung obwalteten und namentlich je nach den Wünschen, die von anderer Seite betreffs der Behandlung der Leiche gestellt wurden, konnten von unserer Seite bei der einen Leiche mehr, bei der anderen weniger Maße genommen werden.

Schimpansin „Terzera“.

Handmaße:

		Nagelglied	Mittelglied	Grundglied
Daumenlänge	40 mm	23		17
Zeigefinger......	59	24	27	28
Mittelfinger	86	28	25	33
Vierter Finger ...	87	28	27	32
Kleinfinger	65	23	19	23

(Die Glieder wurden zwischen den proximalsten Falten gemessen.)

Handlänge bis zur vorderen Querfalte...	72 mm
Ganze Länge der »Fleischhand«[1]........	107 »
Unterarmbreite am Handgelenk........	60 »

Gewichte:

Körpergewicht ohne Haut und Eingeweide..	26.250 g
Haut..................................	4.650
Därme.................................	1.155
Leber.................................	1.550
Herz und Lunge........................	820
Niere.................................	165
Milz..................................	125
Hirn mit weicher Hirnhaut.............	370
Gesamtkörpergewicht...	35.085 g

Die mazerierten Knochen der rechten Körperseite wogen:

Handknochen	83.0		Fußknochen.	94.0	
Elle und Speiche	122.0		Wadenbein .	26.0	
Oberarm	142.0		Schienbein ..	99.0	
Schulterblatt ...	70.5	87.75	Oberschenkel	192.5	
Schlüsselbein ...	17.25		Beckenhälfte.	185.0	(mit Kreuzbeinhälfte 205)
	434.75			596.5	

Wirbelsäule...	340.5	(mit Draht zusammengefügt)
alle Rippen...	270.0	(rechts 133, links 137)
Brustbein	14.0	
Schädel	471.0	

Über die Epithelkörperchen der Terzera s. H. Joach. Arndt: Epithelkörperchenbefunde bei Menschenaffen. In: Zeitschr. f. Anat. u. Entw. Bd. 68 1923. Über die des Sultan s. Derselbe: Über Epithelkörperchensklerose bei einem Schimpansen. Virchows Archiv Bd. 247 12. Heft 1923.

Schimpansin „Tschika".

Über das Gesicht der »Tschika« berichtete H. Virchow am 25. März 1923 in der Sitzung der Anthropologischen Gesellschaft in Berlin[2] unter Zugrundelegung eines sehr gut gelungenen Gipsabgusses durch Hrn. O. Seifert.

[1] Siehe R. Fick, Über die Maßverhältnisse der Hand mit Angaben über die Hände von W. v. Waldeyer-Hartz †. Sitzungsber. d. Preuß. Akad. 1923, XXIV, S. 220.

[2] H. Virchow in Zeitschr. f. Ethnologie Jahrg. 1922 S. 151 ff.

Körpermaße:

	Oberer Brustbeinrand bis Nabel	39.0 cm	
	» » » oberer Schamfugenrand	53.0 »	
	Rumpflänge (Scheitel bis Damm)	82.0 »	
im Liegen gemessen	Brustumfang an den Brustwarzen	85.0 »	
	» am Brustbeinende	86.5 »	
	(bei meinem Riesenorang[1] 115 cm!)		
	» am Ende des Rippenkorbes	84.0 »	
	Bauchumfang am Nabel	79.0 »	
	Armumfang in der Mitte des Biceps	30.5 »	rechts
	» » » » » »	32.0 »	links

(durch die Formoleinspritzung deutlich zusammengezogen)
[Bei meinem Riesenorang war der Umfang 31 cm]

Beinumfang in der Mitte des Oberschenkels	41.0 cm	rechts
» » » » » »	41.5 »	links

(Bei meinem Riesenorang betrug das Maß 42 cm)

Beinlänge im gestreckten Zustand vom Sitzhöcker zur Ferse . . . 58.0 cm

(Bei meinem Riesenorang war die Beinlänge vom Damm aus gemessen 53 cm)

Scheinbare Fingerlängen:

Vgl. R. Fick, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 1923 XXIV, S. 221 ff.

Rechts:	Zeigefingerkuppe steht gegen Mittelfingerkuppe um	2.8 cm	zurück
links:	» » » » »	2.7 »	»
rechts:	Ringfinger steht gegen Mittelfinger um	1.5 »	»
links:	» » » » »	1.2 »	»
rechts:	Kleinfinger » » Ringfinger »	3.5 »	»
links:	» » » » »	3.8 »	»
rechts:	Daumen » » Zeigefinger »	9.8 »	»
links:	» » » » »	10.7 »	»

Der linke Daumen erscheint dabei um fast 1 cm kürzer als der rechte, der linke vierte Finger (»Ringfinger«) um 3 mm länger als der rechte.

Gewichte:

Körpergewicht	45.930 g (schwanger)
Gewicht des ganzen Dünndarmes (abwärts vom Zwölffingerdarm) mit Ausnahme des 10 cm langen unteren Mastdarmendes	1.950 »
Speiseröhre, Magen, Zwölffingerdarm, Leber und Milz (150 g) — 260 g Mageninhalt =	3.250 »
Lunge	1.100 »
Herzbeutel, Zwerchfell, Luftröhre	720 »
Harn- und Geschlechtswerkzeuge	1.180 »

Über die Gewichte der Knochen der »Loka« s. später S. 180.

[1] R. Fick, Vergl. anat. Studien an einem erwachsenen Orang-Utang, His' Archiv 1895.

Schimpansin „Grande“.

Über die Behaarung des Kopfes und die Gestaltung des Gesichts hat H. Virchow in der Anthropologischen Gesellschaft[1] (Sitzung vom 20. Mai 1922) berichtet. Unser Oberpräparator O. Seifert hat auch von der Grande einen sehr gut gelungenen Abguß des ganzen Kopfes angefertigt. Im Zoologischen Museum wurden auch von den anderen Schimpansenköpfen Abgüsse genommen.

Fingermaße:

Rechts: Daumen	5.5	cm
Links: Daumen	4.4	» (!) vgl. Tschika.
Rechts: Zeigefinger	10.5	»
Links: Zeigefinger	10.3	»
Rechts: Mittelfinger	12.8	»
Links: Mittelfinger	12.7	»
Rechts: vierter Finger	11.8	»
Links: vierter Finger	11.7	»
Rechts: Kleinfinger	8.6	»
Links: Kleinfinger	8.6	»

Mittelhand- (»Fleischhand-«) Länge beiderseits 11.1 cm.

Körpergewicht: 34.000 g.

Herz und Lunge	1.250	g
Magen und Leber	2.000	»
Milz	220	»
Dickdarm	1.220	»
Dünndarm	450	»
Harn-Geschlechtswerkzeuge	1.200	»

Über die Epithelkörperchen der »Grande« siehe die Abhandlung von H. J. Arndt (Zeitschr. f. Anat. u. Entw. 1923).

An den von uns gemessenen Schimpansen war der Daumen besonders klein gegenüber den anderen Fingern, namentlich auch kleiner als bei den beiden früher von mir gemessenen Orangs. Ferner war auch der Zeigefinger wesentlich kleiner als der Ringfinger, was ich übrigens auch bereits beim Orang bemerkt habe. Die Kleinheit des Zeigefingers gegenüber dem Ring- und Mittelfinger ist hier übrigens nicht eine scheinbare, etwa durch Schiefstellung vorgetäuschte, wie so oft beim Menschen, denn beim Schimpansen besteht, ebenso wie beim Orang, weniger Grund für die Schiefstellung des Zeigefingers, da er einen kräftigen Muskel von der Speiche erhält. Hier ist die Kürze eine echte, im Knochengerüst begründete (vgl. R. Fick, Orang I, His' Arch. 1895 S. 9 und 23 und R. Fick, Über d. Maßverh. d. Hand usw., Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 1923).

An einigen der Leichen nahmen Hr. Kollege H. Virchow und ich Untersuchungen der Muskeln vor. H. Virchow befaßte sich im Anschluß an eigene frühere Arbeiten hauptsächlich mit der Gesichtsmuskulatur, während ich den

[1] H. Virchow, Sitzungsber. d. Anthropol. Ges. in Zeitschr. f. Ethnologie 1922, S. 195ff.

Gewichts- und Querschnittverhältnissen, die bisher noch keine eingehendere Bearbeitung gefunden haben, nachging. Meine Angaben beziehen sich im wesentlichen auf die zweitgestorbene Schimpansin »Loka«. Einige Muskeln hatten bei der pathologisch-anatomischen Behandlung der Leiche leider gelitten, doch konnte ich dafür die bei der Schimpansin I (»Tschego«) gefundenen Werte ergänzungsweise heranziehen, da sich diese beiden Schimpansen in der Muskelausbildung, wie viele Stichproben ergaben, sehr ähnlich, mehrfach sogar ganz gleich verhielten. Von der Schimpansin Grande wurden unter Leitung H. Virchows die Gliedmaßenmuskeln mit Einschluß ihrer sehnigen Teile gewogen.

Den Bericht über die Ursprungs- und Ansatzverhältnisse der Muskeln, die mir zum Vergleich mit den Verhältnissen beim Menschen von Belang erschienen, werde ich an anderer Stelle veröffentlichen[1].

Die Gesichtsmuskeln waren bei Loka durch die Fellabziehung zerstört.

Der Fettpfropf der Wange ist bei Loka sehr kräftig entwickelt, erstreckt sich bis in die untere Augenhöhlenspalte.

A. Muskelgewichte (ohne Sehnen) in Grammen.

Das Gewicht der entsehnten Muskeln wurde auf beiden Körperseiten festgestellt. Es ergaben sich aber keine wesentlichen und namentlich keine gleichsinnigen Unterschiede, so daß die belangreiche, von Mollison[2] in einer hervorragenden Arbeit zuerst eingehender für den ganzen höchsten Säugerstamm behandelte Frage der »Rechts- oder Linkshändigkeit« durch bessere Entwickelung der einen oder anderen Seite keine besondere Beleuchtung erfährt. Auch bei den Gliedmaßenmuskeln der Grande zeigten sich keine derartigen Unterschiede, die auf einen vorwiegenden Gebrauch der rechten oder linken Gliedmaßen hindeuten.

Ich führe daher nur das Mittelgewicht aus dem Gewicht der Muskeln beider Seiten an:

Muskelgewichte **einer** Körperseite.

Muskel	Gewicht
I. Kaumuskeln.	
Masseter	18.0 g
Temporalis	33.0 »
Pterygoid. ext.	4.5 »
» int.	8.0 »
	63.5 g
II. Hals- und Nackenmuskeln.	
Cleido-Atlanticus	8.0 g
Sternomasticus	32.0 »
Sternohyalis	7.2 »
Sternothyricus	1.0 »
Omohyalis	2.0 »
Longus capitis	12.2 »
Longus colli	11.5 g
Scalenus ant.	6.0 »
» med.	5.0 »
» minimus	3.0 »
Splenius capitis	30.7 »
» cervicis	12.5 »
Semispinalis capit.	32.0 »
Longissimus cervicis + capitis	16.0 »
Transverso-spinal. cerv. + cap.	24.0 »
Rectus capit. maj.	5.0 »
» » min.	3.0 »
Obliquus capit. inf.	4.2 »
» » sup.	2.0 »
	217.3 g

[1] R. Fick, Beobachtungen an den Muskeln einiger Schimpansen. Zeitschr. f. Anat. u. Entw. 1925.

[2] Mollison, Die Körperproportionen der Primaten. Habilit.-Schrift Zürich. Leipzig, Engelmann 1910.

III. Rumpfmuskeln.

Serrat. post. sup.	2.0 g
» » inf.	4.0 »
Iliocostalis	33.0 »
Longissimus dorsi	64.0 »
Transverso-spinalis lumb. + dorsi	96.0 »
Intercostal. ext. + intercartilag. + levat. cost.	55.0 »
Intercostales int.	51.0 »
Triangularis sterni	3.5 »
1/2 Zwerchfell, etwa	100.0 »
Rectus abdominis	74.7 »
Obliquus abdominis ext.	64.0 »
» » int.	43.0 »
Transversus abdominis	41.0 »
Pyramidalis	2.0 »
	633.2 g

IV. Brustgliedmaße.

Trapezius	121.0 g
Rhomboidei	53.0 »
Levator scapulae	21.5 »
Serratus anter.	148.0 »
Subclavius	2.2 »
(Rumpf-Schultermuskeln = 345.7)	
Latissimus dorsi	267.0 »
Pectoralis major	170.0 »
» minor	16.5 »
(Rumpf-Armmuskeln = 453.5)	
Deltoideus	107.0 »
Supraspinatus	30.0 »
Infraspinatus	65.0 »
Teres minor	15.5 »
» major	61.0 »
Subscapularis	80.0 »
Latissimo-condylicus	17.5 »
Triceps 138.5 { Caput long.	32.5 »
» laterale	44.0 »
» mediale	61.0 »
Anconaeus	1.0 »
Biceps brachii 89.9 { cpt. lg.	38.7 »
» brev.	51.2 »
Coracobrachialis	16.7 »
Brachialis	90.0 »
Brachioradialis	34.0 »
Extensor carpi rad. lg.	10.0 »
» » » brev.	10.2 »
» digitor. comm. lg.	19.5 »
» digiti V. propr.	1.2 »
» carpi ulnaris	10.0 »
Supinator	23.0 »
Abductor pollicis lg.	7.0 »
»Extensor pollicis brev.«	6.2 »
» » longus	2.7 »
» digiti II. proprius	2.0 »
Palmaris longus	1.2 »
Flexor carpi radialis	19.7 »
Pronator teres	13.0 »
Flexor carpi ulnaris	18.0 »
Flexor digit. sublim. 48.2 { cpt. dig. V.	3.2 g
» » IV.	13.0 »
» » III.	21.0 »
» » II.	11.0 »
»Flexor pollicis longus«	16.2 »
» » » cpt. superfic.	2.0 »
» digitor-profund.	50.0 »
Pronator quadratus	4.7 »
Flexor pollicis brev. cpt. uln.	2.0 »
» » » » rad.	2.0 »
Opponens pollicis	2.0 »
Abductor pollicis brevis	1.5 »
Adductor pollicis	2.7 »
Abductor digiti V. + flexor	2.2 »
Opponens digiti V.	2.2 »
Interosseus volar. I.	2.7 »
» » II.	2.0 »
» » III.	1.2 »
» dorsalis I.	4.5 »
» » II.	2.5 »
» » III.	2.5 »
» » IV.	2.7 »
Alle Muskeln einer oberen Gliedmaße	1841.8 g
Kleine Handmuskeln (32.7) + Rumpfschultermuskeln (345.7) =	378.4 »
Brustgliedmuskeln ohne kleine Handmuskeln u. Rumpfschultermuskeln =	1463.4 »
»Reine« Brustgliedmuskeln ohne Rumpfschultermuskeln (345.7) und Rumpfarmmuskeln (453.5), aber mit Deltamuskel und kleinen Handmuskeln =	1042.6[1] »

[1] Beim Pferd nach SCHMALTZ 14.380 g (Gebrauchspferd). Beim Pferd nach SCHAUDER 11.029 g (Mittel aus 5 Pferden). Vgl. S. 169f.

V. Beckengliedmaße.

Quadratus lumborum		23.0 g
Psoas minor		8.7 »
(Beckengürtelmuskeln = 31.7)		
Psoas major		67.0 »
Iliacus		40.0 »
Sartorius		19.7 »
Tensor fasciae		6.0 »
Rectus femoris		44.0 »
Vastus medialis	272.0 {	60.0 »
» intermedius		69.0 »
» lateralis		143.0 »
Gracilis		73.5 »
Pectineus		29.0 »
Adductor longus		26.5 »
» brevis + magnus		230.0 »
»Adductor posterior«		145.0 »
» minimus		28.5 »
Glutaeus maximus		80.0 »
» medius		200.0 »
» minimus		10.0 »
Scansorius		21.0 »
Piriformis		34.0 »

Muskel	Gewicht
Obtur. int. + gemelli	24.0 g
» ext.	25.0 »
Quadratus femoris	13.5 »
Biceps femoris cpt. lg.	42.0 »
» » » br.	19.0 »
Tuberofemoralis	90.0 »
Semitendineus	53.0 »
Semimembranaceus	32.0 »
Plantaris	3.5 »
Gastrocnemius lat.	21.5 »
» medialis	24.5 »
Soleus	53.0 »
Popliteus	16.0 »
Flexor halluc. lg.	33.0 »
» digit. ped. lg.	13.2 »
Tibialis post.	23.5 »
Peroneus lg.	21.0 »
» brevis	11.0 »
Extens. dig. lg.	13.5 »
» hallucis lg.	7.0 »
Tibialis ant.	31.5 »
Extensor dig. brev.	4.0 »
Flexor digit. brev.	3.5 g
Abductor halluc.	7.5 »
Flexor halluc. brev. cpt. med.	5.0 »
» » » lat.	2.5 »
Quadratus plantae	2.5 »
Abduct. digit. V. pedis	4.0 »
Flexor digit. V. pedis	1.5 »
Opponens digit. V. pedis	3.0 »
Adductor hallucis cpt. obl.	5.0 »
» » transvers.	7.5 »
Interossei plantares (etwa)	5.5 »
» dorsales (etwa)	8.0 »
Lumbricales	3.5 »
(Kleine Fußmuskeln 63.0)	
Alle Muskeln der Beckengliedmaße	1991.6 g
Gürtel- (31.7) und kleine Fußmuskeln (63.0) =	94.7 »
Beinmuskeln ohne Gürtel und Fuß	1896.9 g
Reine Beckengliedmuskeln ohne Gürtel-, aber mit Fußmuskeln	1959.9 »

Zusammenstellung der Muskelgewichte (einer Körperseite).

I.	Kaumuskeln	63.5 g
II.	Hals- und Nackenmuskeln	217.3
III.	Rumpfmuskeln	633.2
IV.	Brustgliedmaßenmuskeln	1841.8
V.	Beckengliedmaßenmuskeln	1991.6
	Alle Muskeln einer Seite	4747.4 g
	Alle Muskeln beider Seiten	9494.8 »

I. Gewichtsvergleich der Hauptmuskelgruppen des ganzen Körpers.

Im folgenden wollen wir die Gewichte der Hauptmuskelgruppen mit dem Gesamtmuskelgewicht vergleichen.

Ich mache auch hier nochmals (vgl. meine früheren Arbeiten) darauf aufmerksam, daß wir im Gewicht zwar keinen unmittelbaren Maßstab für die Muskelkraft haben, wohl aber für die Gesamtleistungsfähigkeit der Muskeln, die ja nicht nur von der Kraft, sondern auch von der Zusammenziehungsgröße, also der Muskelbündellänge abhängt.

1. Das Kaumuskelgewicht (beider Seiten) verhält sich zum Gesamtmuskelgewicht beim

Schimpansen wie 1270 (Kau-M.) : 9495 (Gesamt-M.) = 1 : 74.7 (1.3 % Kau-M.),
Menschen[1] » 146 » : 21860 » = 1 : 149.7 (0.62% »).

2. Das Gewicht der Hals- und Nackenmuskeln verhält sich zum Gesamtmuskelgewicht beim Schimpansen

wie 434.6 (Hals-Nacken-M.) : 9495 (Gesamt-M.) = 1 : 21.8 (4.6% Hals-Nacken-M).

[1] Nach Ed. Webers Zahlen von mir berechnet. R. F.

3. Bei den Rumpfmuskeln ist das in Rede stehende Verhältnis wie 1266.4 (Rumpf-M.) : 9495 (Gesamt-M.) = 1 : 7.5 (13.3% Rumpf-M.).

4. Die Gewichte aller Muskeln der Brustgliedmaßen stehen zu den Gesamtmuskeln im Verhältnis
wie 3684 (alle Brustglied-M.) : 9495 (Gesamt-M.) = 1 : 2.5 (38.7% Brustglied-M.).

Das ist ein Verhältnis, das den Schimpansen weit vom Orang abrückt und dem Menschen näher bringt. Freilich ist das Verhältnnis beim Vierfüßer dem beim Menschen noch weit ähnlicher.

Zum Vergleich der Gewichtsverhältnisse zwischen den Gliedmaßen- und den Gesamtmuskeln bei den Menschen und den Affen mit denen bei den Vierfüßern kann ich nicht nur die von mir beim Hund gefundenen Werte[1] benutzen, sondern kam dank dem großen Entgegenkommen meines verehrten Anstaltsnachbarn, Hrn. Geh. Regierungsrat Prof. Dr. Schmaltz, des Vorstands der Anatomischen Anstalt der Tierärztlichen Hochschule in Berlin, in die angenehme Lage, auch die Muskelgewichte eines großen Vierfüßers mit heranzuziehen. R. Schmaltz hat nämlich eine belangreiche Arbeit über Messungen und Wägungen am Pferd veröffentlicht[2] und hatte die große Liebenswürdigkeit, aus seinem eigenen Material meinen Zusammenstellungen beim Menschen, Orang und Hund entsprechende Gruppen berechnen zu lassen und mir zur Verfügung zu stellen, wofür ich ihm auch an dieser Stelle herzlichen Dank aussprechen möchte. Auch Hrn. Dr. Rieck, Assistent an der Anatomie der Tierärztlichen Hochschule, meinem früheren Hörer, der sich der mühevollen Aufgabe der Berechnung unterzog, danke ich dafür verbindlichst. Die Wägungen waren ausgeführt an einem »gesunden Gebrauchspferd«, d. h. einem schönen Kavalleriepferd, sechsjährigen gut bemuskelten Wallach von 160 cm Standhöhe (Stockmaß) und 456 kg Lebendgewicht (ohne Hufeisen).

Vor vollendeter Druckfertigmachung meiner Arbeit erschien zu meiner großen Freude noch eine vortreffliche Arbeit über Pferdemuskeln, die ich daher auch noch zum Vergleich heranziehen kann. Hr. Prosektor Schauder[3] an der tieranatomischen Anstalt der Universität Gießen hat sich nämlich der sehr großen, aber auch sehr dankenswerten Mühe unterzogen, in sehr gründlicher Weise die Schultermuskeln des Pferdes auf ihre Fleischfaserlänge, Fiederung, physiologischen und anatomischen Querschnitt sowie auf ihr Gewicht zu untersuchen. Seine Funde sind für das Verständnis der Leistung der Vorderhand des Pferdes entschieden höchst wertvoll, sind aber auch für den Vergleich mit den von mir bei Mensch, Schimpanse und Hund festgestellten Werten sehr belangreich. Die Wägungen und Querschnittberech-

---

[1] R. Fick, Über die Fleischfaserlänge beim Hund. Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss., phys.-math. Klasse 1921. — Derselbe, Über die Gewichts- u. Querschnittsverhältn. d. Hundemuskeln. Ebenda 1922. — Derselbe, Tätigkeitsanpassung d. Gelenke u. Muskeln nach Versuchen am Hund. Ebenda 1922.

[2] R. Schmaltz, Messungen u. Wägungen am Pferd mit 9 Abbildungen. Berlin 1922 bei Rich. Schötz.

[3] W. Schauder, Anatomische u. metrische Untersuchungen über die Muskeln der Schultergliedmaße des Pferdes. Ztschr. f. Anat. u. Entw. Bd. 71, 1924.

nungen (aus Volumen und Faserlänge) sind Mittelwerte aus der Untersuchung von 5 Pferden:

1. sehr schweres Zugpferd, Widerristhöhe 168 cm, sehr kräftig, guter Ernährung, Stute, 16 Jahre,
2. schweres Zugpferd, Widerristhöhe 166 cm, sehr kräftig, guter Ernährung, Stute, 11 Jahre,
3. mittelschweres Zugpferd, Widerristhöhe 162 cm, atrophisch, mittelguter Ernährung, Wallach, 5 Jahre,
4. mittelschweres Wagenpferd, Widerristhöhe 160 cm, mittelkräftig, mittelguter Ernährung, Stute, 16 Jahre,
5. sehr leichtes Wagenpferd, Widerristhöhe 134 cm, kräftig, mittelguter Ernährung, Wallach, 10 Jahre.

Einen Überblick über das Verhältnis zwischen den Gewichten der Brustgliedmuskeln und den Gesamtmuskeln bei den von mir bisher untersuchten Geschöpfen und beim Pferd gibt folgende Zahlenreihe.

Gewichtsvergleich der Muskeln der ganzen Brustgliedmaße[1] (beider Seiten) und der Gesamtmuskeln.

Mann (E. Weber-Fick)[2]	5208 g :	20964	(Gesamt-M.)	= 1	(Arme)	: 4.02	[Arme 24.3 %]
Pferd (Schmaltz)	62360 » :	224690	»	= 1	»	: 3.6	[» 27.7 %]
Hund (R. Fick)	1323.4 » :	4708	»	= 1	»	: 3.56	[» 28.1 %]
Schimpanse (R. Fick)	**3684** » :	**9495**	»	**= 1**	»	**: 2.50**	[» **38.8** %]
Erwachs. Orang (R. Fick)	7246 » :	14300	»	= 1	»	: 1.97	[» 50.7 %]

5. Die Muskeln der Beckengliedmaße (beider Seiten) stehen nach meinen Berechnungen zum Gesamtmuskelgewicht in folgendem Verhältnis:

Hund (R. Fick)	1391 g :	4708	(Gesamt-M.)	= 1	(Beine)	: 3.45	[Beine 29.5 %]
Orang (R. Fick)	4772 » :	14300	»	= 1	»	: 2.99	[» 33.4 %]
Pferd (Schmaltz)	86400 » :	224690	»	= 1	»	: 2.6	[» 38.4 %]
Schimpanse (R. Fick)	**3983** » :	**9495**	»	**= 1**	»	**: 2.30**	[» **41.9** %]
Mann (R. Fick)[2]	12864 » :	20964	»	= 1	»	: 1.63	[» 61.3 %]

Besonders belangreich ist natürlich die Untersuchung des Verhältnisses zwischen dem Muskelgewicht der Brust- und der Beckengliedmaße, da ich von diesem Verhältnis beim erwachsenen Orang fand, daß es ein umgekehrtes ist wie beim Menschen. Ich fand nämlich seinerzeit (s. nächste Seite), daß die Muskeln des Orangarmes, sogar ohne die Rumpf-Schultermuskeln, die des Orangbeines an Gewicht nicht ganz unwesentlich überwiegen, während beim Menschen die Beinmuskeln etwa $3^1/_2$mal mehr wiegen wie die »reinen« Armmuskeln. Beim Schimpansen ist das Verhältnis zwar nicht so wie beim Menschen, aber doch dem Menschen ähnlicher, insofern die Beinmuskeln

[1] D. h. mit den Rumpf-Schultermuskeln, wie Kapuzen- und Rautenmuskel, Schulterblattheber, sowie kleinem Brustmuskel und den Rumpf-Armmuskeln, dem Breitesten Rücken-, Großen Säge- und Großen Brustmuskel.

[2] Von R. Fick nach E. Webers Zahlen berechnet.

etwas schwerer sind als die Armmuskeln. Zieht man alle Muskeln der Brustgliedmaße in Betracht, so ergeben sich folgende Verhältnisse:

II. Gewichtsverhältnis der Gliedmaßenmuskeln im ganzen zueinander.

1. Verhältnis der Gewichte aller Muskeln der Brustgliedmaße zu dem der Beckengliedmaße.

Mann (E. Weber-Fick)[1]	5208 (Arme)	: 12864 (Beine)	= 1 (Arme)	: 2.47 (Beine) [40.5 % Arme]
Pferd (Schmaltz)	62360 »	: 86400 »	= 1 »	: 1.38 (Beine) [72.1 % Arme]
Schimpanse (R. Fick)	**3684** »	: **3983** »	**= 1** »	: **1.08** (Beine) [**92.5** % Arme]
Hund (R. Fick)	1323.4 »	: 1391 »	= 1 »	: 1.05 (Beine) [95.1 % Arme]
Orang (R. Fick)	7246 »	: 4772 »	= 1 »	: 0.66 (Beine) [151.9 % Arme]

Bei Berücksichtigung aller mit der Brustgliedmaße in Verbindung stehenden Muskeln wird der Unterschied zwischen Mann und Orang, wie man sieht, noch bei weitem größer, weil die Beckengürtelmuskeln bei ihm gegenüber den Schultergürtelmuskeln an Gewicht noch mehr zurückstehen als die »reinen« Beinmuskeln gegenüber den »reinen« Armmuskeln. Während beim Mann die Brustgliedmuskeln nur 40 % der Beckengliedmuskeln wiegen, erreichten sie bei unserem Riesenorang fast 152 % des Beinmuskelgewichtes. Das deutet entschieden darauf hin, daß beim Orang das Armklettern eine bei weitem größere Rolle spielt als beim Schimpansen.

Besonders auffällig wird der Unterschied, wenn man nicht die Muskeln des ganzen Brust- und Beckengliedes untereinander vergleicht, sondern, wie es Langer[2] und ich, ihm folgend, es seinerzeit getan, bei der Berechnung die »Gürtelmuskeln«, d. h. die vom Rumpf zur Schulter oder dem Arm bzw. dem Bein gehenden Muskeln außer Betracht läßt und nur die »reinen Arm-« mit den »reinen Beinmuskeln« vergleicht. Dann überwiegt beim Schimpansen das Beinmuskelgewicht natürlich noch weit mehr das Armmuskelgewicht bzw. macht das Armmuskelgewicht nur einen weit kleineren Teil des Beinmuskelgewichtes aus als bei Mitberücksichtigung der Rumpf-Gürtelmuskeln.

Die Verhältnisse sind zwischen den »reinen« Arm- und Beinmuskeln (mit Hinweglassung der kleinen Fuß- und Handmuskeln) folgende:

---

[1] Von R. Fick aus E. Webers Zahlen berechnet.

[2] C. Langer, Die Muskulatur der Extremitäten des Orang als Grundlage einer vergleichend-myologischen Untersuchung. Wiener Akad. d. Wiss. 79. Bd. 1879.

2. Gewichtsverhältnis zwischen den „reinen“ Arm- und Beinmuskeln.

Mensch (Ed. Weber)	1780	(Arm) :	6242 (Bein)	= 1 : 3.50	(28.5% Arm)
Pferd (Schmaltz)	14380	» :	43140 »	= 1 : 3.00	(33.2% »)
Mensch (Bischoff)	1464	» :	4326 »	= 1 : 2.94	(33.8% »)
Magerer Mann (Langer)	688	» :	2025 »	= 1 : 2.94	(33.9% »)
Mensch, 4jähr. ♀ (Langer)	132	» :	365 »	= 1 : 2.76	(36.2% »)
» neugeb. (Langer)	31	» :	61 »	= 1 : 1.99	(50.8% »)
Schimpanse (R. Fick)	**1042.6**	» :	**1896.9** »	= **1 : 1.80**	(**54.1**% »)
Hund (R. Fick)	374.75	» :	672.5 »	= 1 : 1.79	(55.7% »)
Orang, 4jähr. (Langer)	251	» :	260 »	= 1 : 1.04	(96.5% »)
» erwachsen (R. Fick)	2385	» :	2250 »	= 1 : 0.94	(110.4% »)

Aus der Zahlentafel ergibt sich also, daß bei weitem die schwersten »reinen« Brustgliedmuskeln der erwachsene Orang hat, daß beim Hund und Schimpanse das in Rede stehende Verhältnis ähnlich ist wie beim menschlichen Neugeborenen und beim Pferd genau gleich wie bei manchen menschlichen Erwachsenen. Auch äußerlich ist ja beim Pferd und beim Menschen auf den ersten Blick die Beckengliedmuskulatur als weit massiger entwickelt zu erkennen als die des Brustgliedes. Beim Pferd ist übrigens der Unterschied zwischen dem Verhältnis beider Gliedmaßen bei Ein- oder Abrechnung der Gliedmaßen-Gürtelmuskeln (vgl. Zahlentafel V S. 168) nicht so groß wie beim Menschen oder bei den Menschenaffen, weil beim Pferd zwar der Viereckige und der Kleine Lendenmuskel sehr stark rückgebildet ist (Schmaltz), aber andererseits auch die Rumpf-Schultermuskeln nicht sehr massig sind.

III. Gewichtsvergleich der einzelnen Muskelgruppen der Gliedmaßen.

Wie in den früheren Arbeiten über die Muskelgewichtsverhältnisse wollen wir hier auch wieder die einzelnen einander entgegenwirkenden Muskelgruppen der Gliedmaßen miteinander vergleichen, was freilich nur bei den Scharniergelenkmuskeln durchführbar ist, da an den Kugelgelenken die Muskeln nicht in genaue Gegenwirkergruppen angeordnet und überdies die Wirkung auf die betr. Gelenke bei den verschiedenen Tieren noch gar nicht genauer untersucht sind. Wir wollen zuerst die Muskelgruppe der Brustgliedmaße betrachten.

1. Brustgliedmaße.

a. Ellenbeuger.

Bei der nochmaligen genauen Untersuchung der Ellenbeuger an verschiedenen Präparaten beim Schimpansen, beim Menschen und beim Hund ergab sich, daß der »Radiale Handbeuger« (m. flexor carpi radialis) beim Hund das Ellbogengelenk deutlich streckt, beim Schimpansen und Menschen aber bekanntlich beugt. Ferner ergab sich, daß der »Ulnare Handbeuger« (m. flexor carpi ulnaris) nicht nur beim Hund, sondern auch beim Schimpansen und auch beim Menschen das Ellbogengelenk streckt. Das letztere scheint bisher

noch nicht beachtet zu sein, was nicht auffallen kann, da die Verkürzung des Muskels bei der Ellenstreckung beim Menschen nur eine sehr unbedeutende ist.

Ferner ergab sich, daß beim Hund und beim Schimpansen der »Gemeinsame Fingerstrecker« (m. extensor digit. comm. lg.) die Elle deutlich beugt. Beim Menschen ist er meist ohne deutliche Einwirkung auf die Elle, wenn er überhaupt auf sie wirkt, was in manchen Fällen nicht ganz ausgeschlossen scheint, so geschieht es beim Menschen im Sinne der Streckung.

Endlich zeigte es sich, daß beim Hund und beim Schimpansen der »Oberflächliche Fingerbeuger« (m. flexor digitor. superficialis) die Elle beugt, beim Menschen aber von einer solchen Wirkung kaum gesprochen werden kann. Beim Hund ist auch der »Tiefe Fingerbeuger« (m. flexor digitor. prof.) ein Ellenbeuger.

Nach dieser erneuten und durch Heranziehung mehrerer Präparate verbreiterten Untersuchung habe ich die Vergleichszahlen meiner vorigen Arbeit entsprechend umgerechnet und dabei beim Orang dieselben mechanischen Verhältnisse wie beim Schimpansen angenommen, was wohl zutreffen dürfte.

α) Gewichte der Ellenbeuger.

	Schimpanse	Orang	4jähr. Mädchen	Mann	Hund	Pferd
Biceps brachii	89.9	125	6.4	125.0	15.5	
Brachialis	90.0	200	9.1	117.0	8.0	
Brachioradialis	34.0	196	2.4	58.0	nicht vorhanden	
Extensor carpi radial. lg. u. br.	44.2	80	5.0 [1]	60.0	10.5	
» digitorum comm. lg.	19.5	34	beugt nicht	beugt nicht	4.0	
Pronator teres	13.0	39	2.0	37.0	1.0	
Palmaris longus	1.2	15	2.3 [2] (zusammen mit Flexor carpi radial.)	4.7	nicht vorhanden	
Flexor carpi radial.	19.7	30		22.2	streckt	
» digitorum subl.	48.2	90	5.3 [3]	beugt nicht merklich	»	
» » prof.	nicht beugend	nicht beugend	beugt nicht	beugt nicht	»	
Gewicht der Ellenbeuger in g	359.7	809	32.4	423.9	61.9	1.290 Schmaltz 1.049 Schauder

β. Gewichtsverhältnis der Ellenbeuger zu den reinen Armmuskeln.

Die »reinen« Armmuskeln, d. h. die Armmuskeln ohne die vom Rumpf zur Schulter — und ohne die vom Rumpf unmittelbar zum Arm gehenden Muskeln, d. h. demnach die Armmuskeln mit den »Schultermuskeln i. e. Sinn« (wie der Deltamuskel) wiegen bei unseren Schimpansen 1042.6 g.

[1] Nach Langers Angaben für einen 5jähr. Knaben berechnet, bei dem der m. Ext. carpi ulnar. 22.2% des Ext. carpi ulnar. + ext. carpi radial. wog.

[2] Nach Langers Angaben für einen 5jähr. Knaben berechnet, bei dem der flex. dig. subl. 37.4% des flex. dig. subl. + prof. + flex. poll. lg. wog.

[3] Nach Langer unter Benutzung der Gewichte vom Mann geschätzt auf etwas über die Hälfte des Gewichts von Flexor carpi radial. + ulnaris + palmaris lg.

	Schimpanse	Orang	4jähr. Mädchen	Erw. Mann	Hund	Pferd nach SCHMALTZ (nach SCHAUDER)
Verhältnis der Ellenbeuger : »reinen« Armmuskeln	1 : 2.89	1 : 2.9	1 : 4.1	1 : 4.2	1 : 6.0	1 : 11.1 (10.5)
Ellenbeuger wiegen vom Gewicht der reinen Armmuskeln	34.5%	33.9%	24.5%	23.8%	16.5%	8.9% (9.5)

b. Ellenstrecker.

α. Gewichte der Ellenstrecker.

	Hund	4jähr. Mädchen	Mann	Schimpanse	Orang	Pferd
Triceps mit Anconaeus	119.2	25.5	292.0	138.5	235	
Extensor carpi ulnaris	3.5	1.4	23.0	10.0	38	
Flexor carpi ulnaris	10.0	2.1[1]	24.5	18.0	40	
» » radialis	3.0	beugt	beugt	beugt	beugt	
» digitor. sublimis	9.0	—	—	beugt	beugt	
» » profundus	13.0	—	—	—	—	
	157.7	29.1	339.5	166.5	313	4780 (n. SCHMALTZ) 4061 (n. SCHAUDER)

Wie bereits oben [unter a] bemerkt, liegen beim Hund die Verhältnisse ganz anders wie bei den Affen und Menschen, insofern bei ihm die Fingerbeuger und zwar sowohl der oberflächliche als auch der tiefe das Ellbogengelenk strecken. Aus diesem Grunde ist z. B. bei gebeugtem Ellbogengelenk eine Hand- und Fingerbeugung nicht möglich. Sowie man sie ausführen will, wird durch die bei der Ellenbeugung gedehnten Muskeln, wie durch angespannte Zugseile oder Bänder, der Oberarm nach hinten in Streckstellung gezogen.

β. Gewichtsverhältnis der Ellenstrecker zu den »reinen« Armmuskeln.

	Hund	Pferd nach SCHMALTZ (nach SCHAUDER)	4jähr. Mädchen	Mann	Schimpanse	Orang
Das Ellenstreckergewicht : Armmuskelgewicht	1 : 2.3	1 : 3.0 (1 : 2.8)	1 : 4.5	1 : 5.2	1 : 6.3	1 : 7.6
Ellenstrecker wiegen vom Gewicht der reinen Armmuskeln	42.3%	33.3% (36.8%)	22.0%	19.0%	15.9%	13.1%

[1] Nach LANGERS Angabe über das 4jährige Mädchen unter Benutzung der Gewichte beim Mann geschätzt auf etwas weniger als die Hälfte des Gewichtes vom m. flexor carpi radialis + ulnaris + palmaris longus, deren Gesamtgewicht beim 4jährigen Mädchen nach LANGER 4.5 g beträgt.

γ. Gewichtsverhältnis der Ellenbeuger zu den Ellenstreckern.

	Orang	Schimpanse	Mann	4jähr. Mädchen	Hund	Pferd nach Schmaltz (nach Schauder)
Ellenbeugergewicht : Ellenstreckergewicht	1 : 0.39	1 : 0.46	1 : 0.80	1 : 0.89	1 : 2.5	1 : 3.7 (1.38)
Ellenbeugergewicht beträgt v. Ellenstreckergewicht.	258.5%	216.0%	124.8%	111.3%	39.2%	29.9% (26.3%)

c. Hand- und Fingerbeuger.

α. Gewichte der Hand- und Fingerbeuger.

	Orang	Schimpanse	4jähr. Mädchen	Mann	Hund	Pferd
Palmaris lg.	15	1.2	} 4.5	47.0	—	
Flexor carpi radial.	30	19.7		22.2	3.0	
» » ulnar.	40	18.0		24.5	12.0	
» digitorum subl. .	90	48.2	} 14.3	62.6	9.0	
» » prof. .	150	50.2		67.8	16.3	
» »pollicis long.« . (= flex. radialis)	36	18.2		142.0	1.0	
Abductor pollicis lg. ...	32	13.2	} 1.4[1]	11.3	} streckt	
Extens. pollicis brevis . .	Beug. d. Mittelhand	Beug. d. Mittelhand		—		
Extensor carpi ulnaris	streckt	streckt	streckt	streckt	3.5	
	393.0	168.7	20.2	207.3	44.8	1471 n. Schmaltz 1158 n. Schauder

β. Gewichtsverhältnis der Hand-Fingerbeuger zu den reinen Armmuskeln.

	Orang	Schimpanse	4jähr. Mädchen	Hund	Mann	Pferd nach Schmaltz (nach Schauder)
Hand-Fingerbeugergewicht : Armmuskelgewicht	1 : 6.1	1 : 6.2	1 : 6.5	1 : 8.4	1 : 8.6	1 : 9.8 (1 : 9.6)
Hand-Fingerbeugergewicht beträgt v. Armmuskelgewicht	16.5%	16.2%	15.3%	11.96%	11.6%	10.2% (10.36%)

γ. Gewichtsverhältnis der Hand-Fingerbeuger zu den Ellenbeugern.

	Pferd[2] nach Schmaltz	Hund	4jähr. Mädchen	Mann	Orang	Schimpanse
Hand-Fingerbeugergewicht : Ellenbeugergewicht	1 : 0.88	1 : 1.4	1 : 1.6	1 : 2.0	1 : 2.06	1 : 2.13
Hand-Fingerbeugergewicht beträgt vom Ellenbeugergewicht	114%	72.04%	62.3%	50.0%	48.6%	46.9%

[1] Nach Langers Angabe unter Heranziehung der Gewichte beim 5jährigen Knaben ergibt sich das Gewicht von 2.5 g für den gemeinsamen Fingerstrecker und von 3.4 g für die tiefen Fingerstrecker und den Daumenabzieher. Unter Heranziehung der Gewichte beim Mann ergibt sich, daß der Daumenabzieher 40.2% wiegt vom Gewicht des Daumenabziehers + den tiefen Fingerstreckern. Daher wurde hier 40.2% von 3.4 (abgerundet) 1.4 eingesetzt.

[2] Nach Schauders Zahlen berechnete ich 1 : 0.90 = 111%.

d. Hand-Fingerstrecker.

α. Gewicht der Hand-Fingerstrecker.

	Schimpanse	4jähr. Mädchen	Orang	Mann	Hund	Pferd
Extensor carpi radial. longus	10.0	6.4	48	60.9	4.0	
» » » brevis	10.2		32			
» » ulnaris	10.0		38	23.5	beugt	
» digitor. lg.	19.5	4.5[1]	34	27.4	4.5	
» » quinti proprius	1.2		28			
» » secundi »	2.0			5.9	0.5	
» pollicis longus	2.7		7	5.1		
» » brev. + abd. p. lg.	beugt Mittelhand		beugt Mittelhand	beugt Hand	1.1 (streckt)	
	55.6	10.9	187	125.7	10.1	963 n. Schmaltz 893 n. Schauder

β. Gewichtsverhältnis der Hand-Fingerstrecker zu den reinen Armmuskeln.

	Schimpanse	4jähr. Mädchen	Orang	Mann	Pferd nach Schmaltz (nach Schauder)	Hund
Hand-Fingerstreckergewicht: Armmuskelgewicht	1 : 6.5	1 : 12.1	1 : 12.8	1 : 14.2	1 : 14.9 (1 : 12.2)	1 : 37
Hand-Fingerstreckergewicht beträgt vom Armmuskelgewicht	15.5%	8.3%	7.8%	7.1%	6.7% (8.2%)	2.7%

γ. Gewichtsverhältnis der Hand-Fingerstrecker zu den Hand-Fingerbeugern.

	Pferd[2] nach Schmaltz	Mann	4jähr. Mädchen	Orang	Schimpanse	Hund
Hand-Fingerstreckergewicht : Hand-Fingerbeugergewicht	1 : 1.52	1 : 1.6	1 : 1.9	1 : 2.1	1 : 3.0	1 : 4.2
Hand-Fingerstreckergewicht beträgt vom Hand-Fingerbeugergewicht	65.4%	60.6%	53.9%	47.6%	32.9%	22.6%

Der große Unterschied im obigen Gewichtsverhältnis beim Pferd und Hund beruht, auch nach der Meinung des Hrn. Kollegen Schmaltz auf der ganz verschiedenen Gehweise beider. Beim Pferd, dem Zehengänger, werden beim Abwickeln der Vorderhufe vom Boden die Strecker stark beansprucht, beim Hund nicht.

[1] 5.9 — 1.4, d. h. ohne langen Daumenabzieher, dessen Gewicht [siehe c. α.[1]] auf 1.4 von mir berechnet wurde.

[2] Nach Schauders Zahlen berechnete ich das Verhältnis auf 1 : 1.29 (Beuger) = 77.5% (Streckergewicht).

2. Beckengliedmaße.

a. Knie-Fußstrecker.

α. Gewichte der Knie- und der Fußstrecker beim Schimpansen (»Beinverlängerer«).

Rectus femoris	44.0 g
Vasti	272.0 »
Gastrocnemii + plantaris (als Fußstrecker)	49.5 »
Soleus	53.0 »
Tibialis post.	23.5 »
Flexor digit. ped. long.	13.2 »
» hallucis long.	33.0 »
Peronei	32.0 »
Knie- und Fußstreckergewicht =	520.2 g
Beinmuskelgewicht (ohne Gürtelmuskeln) =	1959.9 »
alle Beinmuskeln (mit Gürtelmuskeln) =	1991.6 »

β. Gewichtsverhältnis der Knie- und Fußstrecker zu **allen** Beinmuskeln.

	Mensch	Hund	Schimpanse	Pferd
Knie- und Fußstreckergewicht : Beinmuskelgewicht	1 : 2.55	1 : 3.40	1 : 3.83	1 : 5.72
Knie- und Fußstreckergewicht ist vom Beinmuskelgewicht	39.2%	29.4%	26.1%	17.4%

γ. Gewichtsverhältnis der Knie- und Fußstrecker zu den »reinen« Beinmuskeln (ohne Gürtelmuskeln).

	4jähr. Mädchen	Mensch	Hund	**Schimpanse**	Orang	Pferd[1]
Knie- und Fußstreckergewicht : Beinmuskelgewicht	1 : 2.44	1 : 2.43	1 : 3.30	**1 : 3.81**	1 : 4.23	1 : 5.72
Knie- und Fußstreckergewicht ist vom Beinmuskelgewicht	41.5%	41.1%	30.3%	**26.5%**	23.6%	17.4%

b. Knie- und Fußbeuger.

α. Gewichte der Knie- und Fußbeuger beim Schimpansen (»Beinverkürzer«).

Semitendineus	53.0 g	Sartorius	19.7 g
Semimembranaceus	32.0 »	Gracilis	73.5 »
Biceps femoris	61.0 »	Tibialis anterior	31.5 »
Gastrocnemii + plantaris (als Kniebeuger)	49.5 »	Extensor digit.	13.5 »
Popliteus	16.0 »	Extensor hallucis	7.0 »
			356.7 g

[1] Gürtelmuskeln rückgebildet.

β. Gewichtsverhältnis der Knie- und Fußbeuger zu allen Beinmuskeln.

	Hund	Pferd	Mann	Schimpanse
Knie- und Fußbeugergewicht aller Beinmuskeln	1 : 2.21	1 : 3.15	1 : 4.43	1 : 5.58
Knie- und Fußbeugergewicht ist vom ganzen Beinmuskelgewicht	45.24%	31.7%	22.57%	17.90%

γ. Gewichtsverhältnis der Knie- und Fußbeuger zu den »reinen« Beinmuskeln (ohne Gürtelmuskeln).

	Hund	Orang	4jähriges Mädchen	Pferd [1]	Mann	**Schimpanse**
Knie-Fußbeugergewicht : Beinmuskelgewicht	1 : 2.14	1 : 3.83	1 : 3.93	1 : 4.07	1 : 4.36	**1 : 5.5**
Knie-Fußbeugergewicht ist vom Beinmuskelgewicht	46.8%	26.1%	25.4%	24.5%	22.9%	**18.2**%

δ. Gewichtsverhältnis der Knie- und Fußbeuger zu den Knie-Fußstreckern.

	Pferd	Hund	Orang	**Schimpanse**	Mann	4jähriges Mädchen
Knie-Fußbeugergewicht : Knie-Fußstreckergewicht	1 : 0.55	1 : 0.65	1 : 0.90	**1 : 1.5**	1 : 1.79	1 : 2.02
Knie-Fußbeugergewicht ist vom Knie-Fußstreckergewicht	181.7%	154.2%	111.1%	68.6%	55.9%	49.5%

Diese Zahlen sprechen wieder eine beredte Sprache. Sie zeigen so recht die ganz verschiedene Gebrauchsweise der Gliedmaßen bei den untersuchten Geschöpfen. Am Ende der Reihe steht der Mensch mit seinem aufrechten Gang, bei dem die Kniestrecker fast doppelt so stark wie die Kniebeuger sind, dann kommt Schimpanse, der Armkletterer, der zwar zum Hochziehen vor allem die Arme benutzt (s. oben), aber zum Nachgreifen mit den Füßen doch auch starke Knie- und Fußbeuger als Beinverkürzer braucht. Am Anfang der Reihe stehen Hund und Pferd, die vierfüßigen Läufer, bei denen die Streckmuskeln der Vorderseite ganz zurücktreten und nur wenig mehr als die Hälfte der hinteren Kniemuskeln wiegen.

Freilich spielen beim letzteren die hinteren Kniemuskeln keineswegs nur als Beinverkürzer, wie beim Vorschwingen des Beines, eine Rolle. Diese beim Pferd sog. »langen Kruppenmuskeln« wirken vielmehr wegen der beim aufgesetzten Fuß eigentümlich geknickten Stellung der Knochen des Stütz-

[1] Gürtelmuskeln rückgebildet.

beines zusammen mit den Gesäßmuskeln als »Durchstrecker des Knies«, weil das Becken wegen der Steifheit seiner Verbindung mit der Wirbelsäule sich nicht auf dem Schenkelkopf nach hinten abwärts bewegen kann. Durch diese streckende »Verlängerung des Beines« wird das Becken gehoben. Diese »Durchstreckung des Stützbeines« spielt beim Lauf der Vierfüßer eine große Rolle, wurde aber bisher beim Menschen noch nicht genügend gewürdigt, obwohl diese Muskeln selbstverständlich auch bei ihm unter den gleichen oder ähnlichen Umständen dieselbe Wirkung haben müssen. Neuerdings hat der Heidelberger Orthopäde H. v. Bayer, offenbar ohne die Verhältnisse bei den Vierfüßern zu kennen, den Vorgang auch beim Menschen beschrieben. Daß umgekehrt auch eine Kniebeugung und Hüftbeugung möglich sei, »wenn der Muskel einen größeren Abstand von der Kniegelenkachse als von der Hüftachse hat«, ist aber natürlich ausgeschlossen, da der Abstand des Sitzhöckers von der Hüftachse immer bei weitem größer ist als die größte Entfernung, die die Beugesehnen von der Knieachse erlangen können.

H. v. Bayer lenkt bei dieser Gelegenheit höchst erfreulicher- und nützlicherweise die Aufmerksamkeit der Mediziner überhaupt auf die vielfach zunächst auffällig erscheinenden Muskelwirkungen bei Gelenkketten, deren Enden festgestellt sind. Er hat auch sehr handliche Modelle gebaut, an denen man sich von diesen »Kettenwirkungen«, wie ich sagen möchte, oder »geführten« Muskelwirkungen, wie sie v. Bayer nennt[1], ein genaueres Bild machen kann.

In einer neuen, mir erst während der Drucklegung dieser Abhandlung zugegangenen Arbeit faßt v. Bayer sehr dankenswerterweise seine bisherigen Betrachtungen über verschiedene Kettenwirkungen der Arm- und namentlich der Beinmuskeln zusammen[2]. Freilich handelt es sich bei diesen Kettenwirkungen, wie ich hier bemerken möchte, z. B. bei der Anzieherwirkung auf das in sich leicht gebeugte, mit dem Fuß auf den Boden gestützte Bein, nicht um Drehungen um die gewöhnlichen Hauptgelenkachsen, z. B. nicht um Pro-Supinationen (»Innen- und Außenrotationen«) des Oberschenkels im Hüftgelenk, sondern um ganz anders geartete Drehungen des ganzen Beines um eine schief zu allen »Hauptrichtungen« des Hüftkopfes durch den Hüftmittelpunkt hindurchgehende Achse, die man nicht mit der gewöhnlich als »Innen-« oder »Außenrotation« des Oberschenkels bezeichneten Bewegung verwechseln darf.

Auf alle Fälle ist es aber als ein wichtiger Fortschritt für die Anwendung und Einführung der Lehren der anatomischen Mechanik in die praktische Medizin außerordentlich zu begrüßen, daß v. Bayer auf die im gewöhnlichen Gliedergebrauch so vielfach vorkommende Kettenwirkung der Muskeln hinweist und sie dem Verständnis der Praktiker und auch der mechanisch ungeschulten Anatomen näher zu bringen versucht. Ganz mit Recht hebt v. Bayer hervor, daß die anatomischen Lehrbücher bisher die Gelenkmuskelmechanik viel

---

[1] H. v. Bayer, Geführte Wirkung der Muskeln (Allergismus), Verh. d. anat. Gesellsch. in Heidelberg 1923. Ergänzungsheft z. Anat. Anz.

[2] H. v. Bayer, Die Wirkung der Muskeln auf die menschlichen Gliederketten in Theorie und Praxis. Zeitschr. f. Orthopäd. Chirurg. 46. Bd. 1924.

zu allgemein behandelt haben. Ich darf wohl behaupten, daß ich in meinen Vorlesungen und meinem Handbuch der Gelenkmuskelmechanik wohl mit zuerst auch die im täglichen Leben und bei den Turnübungen usw. sich geltend machenden Anwendungen der anatomischen Mechanik ausgiebiger berücksichtigt habe. Viele meiner Anwendungen und Anregungen hat kürzlich Braus in sein Lehrbuch aufgenommen und verarbeitet, und es ist zu hoffen, daß alle anatomischen Lehrbücher immer mehr und mehr die Gelenkmuskelmechanik in einer ihrer Bedeutung für die Praxis entsprechenden Weise berücksichtigen werden.

IV. Vergleich des Muskel- und Körpergewichtes.

Das Gesamtmuskelgewicht verhält sich zum Körpergewicht beim

[Pferd	wie 224.690 (Musk.)	: 411.500 (Körper ohne E.I.)[1]	= 1 : 1.78	(54.6 °/o Musk.)]
Hund	» 4.708 »	: 9.500 (»)	= 1 : 2.02	(49.5 °/o »)
Pferd	» 224.690 »	: 456.000 (» mit E.I.)[1]	= 1 : 2.02	(49.5 °/o »)
Mann	» 20.964 »	: 64.000 (»)	= 1 : 3.0	(32.8 °/o »)
Schimpansen	» 9.495 »	: 37.000 (»)	= 1 : 3.9	(25.6 °/o »)
Orang	» 14.300 »	: 76.500 (»)	= 1 : 5.3	(18.9 °/o »)

Wie man sieht, sind die von uns untersuchten Menschenaffen erheblich weniger muskelschwer als die Menschen, bei denen öfters fast dieselben Verhältniszahlen wie beim Pferd und beim Hund gefunden wurden. Vielleicht ist der Grund dafür in der Bewegungsbeschränkung zu sehen, die den von uns untersuchten Menschenaffen in der Gefangenschaft aufgezwungen war.

V. Knochengewichte.

Die Gewichte der Knochen beider Körperseiten zeigten fast alle das gleiche Gewicht, bei einigen war es rechts, bei anderen links eine Kleinigkeit schwerer, was auf etwas ungleicher Trockenheit beruhen dürfte. Ich gebe daher die Mittelwerte aus den Knochen beider Seiten an.

1. Gewicht der oberen Gliedmaßenknochen (frisch) einer Seite.

	frisch	(mazeriert)
Schlüsselbein	16.5 g	[15.5 (mazeriert)]
Schulterblatt	78.0 »	[75.75 »]
(Schultergürtel 94.5 g)		
Oberarmbein	164.5 »	[157.0 »]
Speiche	67.5 »	[65.0 »]
Elle	74.5 »	[72.5 »]
Alle Handknochen	81.0 »	[52.5 »]
	482.0 g	[438.25 »]
Schultergürtel	94.5 »	
Obere Gliedmaße ohne Gürtel	387.5 g	

[1] E.-I. = Eingeweideinhalt.

2. Gewicht der unteren Gliedmaßenknochen einer Seite.

Beckenhälfte	221.5 g	[208.75 (mazeriert)]
Kreuzbeinhälfte	24.5 »	[23.25 »]
(Beckengürtel 246.0 g)		
Oberschenkelbein	235.0 »	[221.5 »]
Schienbein	113.0 »	[107.0 »]
Wadenbein	31.0 »	[30.25 »]
Kniescheibe	5.5 »	[5.0 »]
Alle Knochen d. unt. Gliedmaße	720.5 g	[595.75 »]
Beckengürtel	246.0 »	
Beinknochen ohne Gliedmaßen	474.5 g	

Rumpfknochengewicht.

Wirbelsäule ohne Kreuzbein	271.0 g	[261.5 (mazeriert)]
Rippen beider Seiten	323.5 »	[156.25 »]
Brustbein mit Rippenknorpeln	55.5 »	[52.0 »]
	650.0 g	[469.75 »]

3. Gewichtsverhältnis der oberen Gliedmaßen- zu den unteren Gliedmaßenknochen.

Das Gewicht der Knochen der Brustgliedmaße verhält sich zu dem der Beckengliedmaße beim

Mann	wie 798	(Br.[1] mit G.[2])	: 2391	(Bein mit G.)	= 1 : 2.99	(33.3%	Br.-Kn.[3])
»	» 623	(» ohne »)	: 1912	(» ohne »)	= 1 : 3.07	(32.5%	»)
Pferd	» 5750	(» mit »)	: 9300	(» mit »)	= 1 : 1.61	(61.7%	»)
»	» 4650	(» ohne »)	: 7390	(» ohne »)	= 1 : 1.58	(62.9%	»)
Schimpansen	» **482**	(» mit »)	: **720.5**	(» mit »)	= **1 : 1.5**	(**67.0%**	»)
»	» **387.5**	(» ohne »)	: **474.5**	(» ohne »)	= **1 : 1.2**	(**81.7%**	»)
Hund	» 127.0	(» mit »)	: 151.5	(» mit »)	= 1 : 1.19	(83.8%	»)
»	» 107.0	(» ohne »)	: 122.0	(» ohne »)	= 1 : 1.14	(87.7%	»)
Orang	» 1445	(» mit »)	: 1305	(» mit »)	= 1 : 0.90	(109.9%	»)
»	» 1199	(» ohne »)	: 995	(» ohne »)	= 1 : 0.83	(120.5%	»)

Sehr belangreich scheint mir der Umstand, daß beim Menschen die Brustgliedknochen mehr wiegen im Vergleich zum Beckenglied, wenn man die Gürtelknochen mitberücksichtigt, während bei den Menschenaffen und auch beim Hund und Pferd das Gegenteil der Fall ist. Man könnte vielleicht denken, das Becken nähme durch den aufrechten Gang weniger an Gewicht zu als die eigentlichen Beinknochen, die rein als Stütze zu dienen haben. Aber diese Erklärung dürfte kaum zutreffen, weil bei den Menschenaffen, im Gegensatz zum Hund und auch zum Pferd, die Beckenknochen ganz besonders schwer sind, wie die folgende Zahlenreihe deutlich erkennen läßt.

[1] Br. = Brustgliedmaße. [2] G. = Gürtel. [3] Br.-Kn. = Brustgliedknochen.

4. Gewichtsvergleich der Gürtelknochen zu den reinen Gliedmaßenknochen.

a. Brustgliedmaße.

Die Gürtelknochen der Brustgliedmaße verhalten sich zu den »reinen« Armknochen beim

Hund	wie	20	(G.[2]):	107	(Armkn.)	= 1 : 5.3	(18.7% Br.-Gürtelkn.)
Orang	»	246	(»):	1199	(»)	= 1 : 4.9	(20.5% »)
Pferd	»	1100	(»):	4650	(»)	= 1 : 4.19	(23.6% »)
Schimpansen (Loka)	»	94.5	(»):	387.5	(»)	= 1 : 4.1	(24.4% »)
» (Terzera)	»	87.7	(»):	391.5	(»)	= 1 : 3.5	(28.1% »)
Mann	»	175	(»):	623	(»)	= 1 : 3.4	(28.1% »).

b. Beckengliedmaße.

Die Gürtelknochen der Beckengliedmaße verhalten sich zu den »reinen« Beinknochen beim

Hund	wie	29.5	(G.):	122.0	(Beinkn.)	= 1 : 4.1	(24.2% Becken)
Mann	»	479	(»):	1.912	(»)	= 1 : 3.9	(25.0% »)
Pferd	»	1.915	(»):	7.390	(»)	= 1 : 3.85	(25.9% »)
Orang	»	310	(»):	995	(»)	= 1 : 3.2	(31.1% »)
Schimpansen (Loka)	»	246	(»):	474.5	(»)	= 1 : 1.9	(51.8% »)
» (Terzera)	»	205	(»):	391.5	(»)	= 1 : 1.91	(52.4% »).

Ganz eigentümlich ist es, daß beim Schimpansen das Becken so ganz besonders schwer ist gegenüber den anderen Beinknochen, gerade doppelt so schwer im Verhältnis wie beim Pferd und auch beim Menschen. Es lohnte wohl, diesem Umstand noch weiter nachzugehen. Daß nur ein persönlicher Zufall vorliegt, dürfte sehr unwahrscheinlich sein, weil sich auch bei Terzera das gleiche bzw. noch übertriebenere Vergleichsbeckengewicht ergab.

5. Knochen- : Muskelgewicht.

a. Gewicht der Armknochen : Muskelgewicht.

Das Gewicht der Armknochen verhält sich zu den Armmuskeln beim

Pferd	wie	4.650	(ohne G.):	31.180	(Musk.)	= 1 : 6.70	(14.9% Knochen)
»	»	5.750	(mit »):	31.180	(»)	= 1 : 5.42	(18.4% »)
Hund	»	107	(ohne »):	662	(»)	= 1 : 6.2	(15.9% »)
»	»	127	(mit »):	662	(»)	= 1 : 5.2	(19.2% »)
Schimpansen	»	387.5	(ohne »):	1.841.8	(»)	= 1 : 4.7	(21.0% »)
»	»	482.0	(mit »):	1.841.8	(»)	= 1 : 3.8	(26.2% »)
Mann	»	623	(ohne »):	1.850	(»)	= 1 : 2.9	(33.2% »)
»	»	798	(mit »):	1.850	(»)	= 1 : 2.3	(43.1% »)
Orang	»	1.199	(ohne »):	2.643	(»)	= 1 : 2.20	(45.3% »)
»	»	1.445	(mit »):	2.643	(»)	= 1 : 1.83	(54.6% »).

Die Zahlentafel zeigt, daß die Armknochen des Schimpansen sehr wesentlich leichter im Verhältnis zu den zugehörigen Muskeln sind als beim Menschen, und daß das Verhältnis dem beim Hund näher steht als dem beim Menschen. Sehr belangreich scheint es mir zu sein, daß die von Hrn. Kollegen Schmaltz angestellten Wägungen ergeben, daß das in Rede stehende Verhältnis beim Pferd dem beim Hund außerordentlich ähnlich ist, nur daß die Knochen im Verhältnis zu den Muskeln beim Pferd noch schwächer sind wie beim kleinen Vierfüßer. Es ist daher wohl zu vermuten, daß Knochenbrüche der »Vorderhand« bei den Pferden häufiger sein werden wie bei den Hunden, um so mehr, als der Bau des unteren Teiles des Vorderbeines bei den Hunden durch die schmiegsame Pfote weit biegsamer ist und weit mehr Federkraft besitzt als bei den Huftieren mit den vergleichsweise starren, plumpen Hufen.

b. Gewicht der Beinknochen : Muskelgewicht.

Das Beinknochengewicht verhält sich zum Beinmuskelgewicht beim

Hund	wie	122	(ohne Beck.) :	672.5 (Musk.)	= 1 : 5.5	(18.1% Kn.)
Pferd	»	7390	(» ») :	43200 (»)	= 1 : 5.14	(19.4% »)
Hund	»	151.5	(mit ») :	672.5 (»)	= 1 : 4.5	(22.5% »)
Schimpansen	»	**474.5**	(ohne ») :	**1991.6** (»)	= **1 : 4.2**	(**23.8**% »)
Pferd	»	9305	(mit ») :	43200 (»)	= 1 : 4.13	(24.2% »)
Mann	»	1912	(ohne ») :	6317 (»)	= 1 : 3.3	(30.2% »)
Schimpansen	»	**720.5**	(mit ») :	**1991.6** (»)	= **1 : 2.7**	(**36.1**% »)
Mann	»	2391	(» ») :	6317 (»)	= 1 : 2.6	(37.8% »)
Orang	»	995	(ohne ») :	2328 (»)	= 1 : 2.23	(42.8% »)
»	»	1305	(mit ») :	2328 (»)	= 1 : 1.78	(56.0% »)

Die Zahlentafel gibt das sehr beachtenswerte Ergebnis, daß beim Schimpansen die gesamten Beckengliedknochen in sehr ähnlichem Gewichtsverhältnis zu den Beinmuskeln stehen wie beim Menschen (36.1% Schimp. : 37.8% Mann), während die Beinknochen ohne das Becken einen sehr wesentlich kleineren Teil des Muskelgewichtes wiegen wie beim Menschen (23.8% Schimpanse : 30.2% Mann) und daß das letztere Verhältnis dem entsprechenden Verhältnis beim Pferd (19.4%) oder beim Hund (18.1%) nähersteht als dem beim Mann usw. Daß der Orang so ganz auffällig schwere Beckengliedknochen im Verhätnis zu seinen verhältnismäßig leichten Beinmuskeln hat, wurde bereits in der vorigen Abhandlung betont und anderseits wurde oben gezeigt, daß der Schimpanse besonders schwere Beckengürtelknochen besitzt gegenüber den »reinen« Beinknochen.

VII. Knochengewicht (beider Seiten) : Körpergewicht.

a. Gewichtsverhältnis zwischen den Brustgliedknochen und dem Körpergewicht.

Das Gewicht der Brustgliedknochen (mit Gürtel) beider Seiten verhält sich zu dem Körpergewicht beim

Mann	wie 1596 (Br.-Kn.)	: 64000 (Körp.)	= 1 : 40.1	(2.5 % Br.-Kn.)
Pferd[1]	» 11500 (»)	: 456000 (»)	= 1 : 39.6	(2.52% »)
Schimpansen	» 964 (»)	: 37000 (»)	= 1 : 39.4	(2.6 % »)
Hund	» 254 (»)	: 9500 (»)	= 1 : 37.6	(2.7 % »)
Pferd[2]	» 11500 (»)	: 411500 (»)	= 1 : 35.7	(2.8 % »)
Orang	» 2890 (»)	: 76400 (»)	= 1 : 26.4	(3.7 % »)

b. Gewichtsverhältnis zwischen den Beckengliedknochen und dem Körpergewicht.

Das Gewicht der Beckengliedknochen (mit Gürtel) beider Seiten verhält sich zum Körpergewicht beim

Hund	wie 303.0 (B.-Knochen)[3]	: 9400 (Körper)	= 1 : 31.3	(3.2%)
Orang	» 2610 (»)	: 76500 (»)	= 1 : 29.3	(3.4%)
Schimpansen	» 1441 (»)	: 37000 (»)	= 1 : 25.7	(3.8%)
Pferd	» 18610 (»)	: 456000 (»)	= 1 : 24.5	(4.08%)
Mann	» 4782 (»)	: 64000 (»)	= 1 : 13.4	(7.5%)

Die Zahlentafeln zeigen sehr deutlich, wie beim Menschen mit seinem voll aufrechten Gang die Beinknochen über doppelt so schwer im Verhältnis zum Körpergewicht sind wie bei den armkletternden Menschenaffen, bei denen umgekehrt die Armknochen, namentlich beim Orang, wesentlich schwerer im Verhältnis zum Körpergewicht sind. Beim Arm steht der Mann am Anfang, beim Bein am Ende der Reihe.

c. Gewichtsverhältnis zwischen allen Gliedmaßenknochen und dem Körpergewicht.

Das Gewicht aller Gliedmaßenknochen beider Seiten verhält sich zum Körpergewicht beim

Hund	wie 557 (Gl.-Kn.)[4]	: 9.500 (Körper)	= 1 : 17.1	(5.9% Gl.-Kn.)
Pferd	» 30110 (»)	: 456.000 (»)	= 1 : 15.1	(6.38% »)
Schimpansen	» 2405 (»)	: 37.000 (»)	= 1 : 15.4	(6.5% »)
Orang	» 5500 (»)	: 76.500 (»)	= 1 : 13.9	(7.2% »)
[Pferd[5]	» 30110 (»)	: 411.500 (»)	= 1 : 13.6	(7.31% »)]
Mann	» 6378 (»)	: 64.000 (»)	= 1 : 10.03	(9.9% »)

Die Zahlenreihe läßt schlagend erkennen, wie ähnlich sich Hund und Pferd im Gewichtsverhältnis zwischen den Gliedmaßenknochen und dem Körpergewicht verhalten, wie nahe aber auch noch der Schimpanse ihnen darin steht, während beim Menschen die Gliedmaßenknochen sehr wesentlich schwerer

[1] Körpergewicht, lebend. [2] Körpergewicht, ohne Eingeweide. [3] B. = Beckenglied. [4] Gl. = Gliedmaßen. [5] Körpergewicht, ohne Eingeweideinhalt.

sind im Vergleich zum Körpergewicht selbst als bei den Menschenaffen. (In meiner letzten Abhandlung war durch ein Versehen in der entsprechenden Zahlentafel beim Orang die Muskelgewichtszahl statt der Körpergewichtszahl in Rechnung gestellt, was ich hierdurch richtigstellen möchte.)

B. Querschnittgrößen.

In mehrfachen Arbeiten und in meinem Handbuch der Gelenk-Muskelmechanik habe ich immer wieder darauf hingewiesen, daß es zur Beurteilung der Muskelkraft nicht ausreicht, das Muskelgewicht zu bestimmen (vgl. namentlich R. Fick, Über die Gewichts- u. Querschnittsverhältnisse der Hundemuskeln. Abh. d. Preuß. Akad. d. Wiss., phys.-math. Kl. 1922 S. 336), weil das Gewicht nicht nur von der Muskelkraft, sondern ebensosehr auch von der Muskelbündellänge abhängt. Ich betonte ferner ausdrücklich, daß es ein grober Irrtum ist, wie es leider (s. a. a. O.) sogar in medizinischen Lehrbüchern geschehen ist, zu glauben, daß die Länge der Muskelfasern etwas mit ihrer Kraft zu tun habe. Da die Unabhängigkeit der Kraft von der Länge nicht jedem von vornherein selbstverständlich zu sein scheint, möchte ich an dieser Stelle noch mit einigen Worten auf diese Frage eingehen.

In der Tat könnte vielleicht jemand meinen, wenn man einen Stab oder ein Faserbündel sich in verschiedene hinter- oder übereinanderliegende gleich dicke Glieder oder Scheiben zerlegt dächte, müßte man von vornherein sagen können, daß eine Last, auf 100 solcher Glieder oder Scheiben verteilt, vielleicht getragen werden könne, von 50 aber vielleicht nicht. Es könnte sich jemand denken, daß sich bei der Belastung des Stabes oder des Bündels der Zug von unten nur bis zum soundsovielten Glied fortsetzte und dadurch »verbraucht«, »aufgezehrt« würde, vielleicht durch innere Reibung. Das ist aber eine falsche Vorstellung, denn durch das oberste »noch beanspruchte« Glied hinge die Last dann doch auch noch an den Oberen, oberhalb des nach der (falschen) Annahme »zuletzt beanspruchten« Gliedes. In Wahrheit wird eben jede »Querscheibe« oder jedes »Glied« des Stabes bis zum obersten hinauf von der ganzen Last getroffen, sie kann sich nicht unterwegs verflüchtigen. Und deshalb kann die »Kraft« oder auch die »Zugfestigkeit« eines Stabes durch Verlängerung nicht größer werden, gleichgültig, aus was für Stoff er besteht, ob seine Dehnung noch dem Hookeschen Gesetz entspricht oder nicht. In der Ausdehnung, die er erfährt, macht das letztere einen Unterschied, in der Kraft aber nicht. Immer kommt es nur darauf an, wie zugfest der Körper für die Querschnittseinheit ist, denn wenn die unterste »Scheibe« oder das unterste »Glied« durch eine gewisse Belastung zerrissen würde, so nützte es der Scheibe nichts, daß über ihr eine weitere oder noch tausend weitere wären. Zerreißt die Scheibe nicht, so wird sie eben nur bis zu einem gewissen Grad gedehnt, und von da an kann sie gegenüber dem betreffenden Zug gewissermaßen als starr angesehen werden. Dann überträgt sich durch sie der Zug auf die nächste Scheibe, belastet sie oder zerrt an ihr in ganz gleicher Weise wie auf die unterste. Für die Kraft kommt es also nur auf die Dicke oder auf die Zahl der nebeneinander vorhandenen

Scheiben oder Glieder einer Kette an, nicht auf die Zahl der hintereinander geschalteten Teile. Ebenso ist es beim Muskel. Auch bei ihm hängt die Kraft nur von seiner Dicke und der Kraft der Querschnittseinheit ab, nicht im mindesten von der Länge seiner Bündel.

Wie bei den Muskelgewichten wollen wir auch bei den Querschnitten die einzelnen Muskelgruppen miteinander vergleichen. Dieser Vergleich ist unmittelbar ein Vergleich der Kraft der betreffenden Muskelgruppen.

Muskelquerschnittgrößen in cm².

Da sich beim Wiegen herausgestellt hatte, daß die Muskeln beider Körperseiten im Gewicht keine irgendwie wesentliche Verschiedenheit zeigten, so war von vornherein wahrscheinlich, daß auch im Querschnitt zwischen den Muskeln beider Seiten keine wesentlichen Unterschiede bestehen würden. Das ergaben dann auch viele Stichproben, so daß bei den meisten Muskeln der Querschnitt nur auf der rechten Körperseite bestimmt wurde. Wo er auf beiden Seiten gemessen wurde, gebe ich den Mittelwert an.

I. Kaumuskeln.

Muskel	cm²
Masseter	5.0 cm²
Temporalis	8.0 »
Pterygoideus ext.	2.0 »
» int.	3.0 »
	18.0 cm²

II. Hals- und Nackenmuskeln.

Muskel	cm²
Cleido Atlanticus	0.5 cm²
Sternomasticus	2.15 »
Sternohyalis	1.1 »
Sternothyricus	0.12 »
Longus capitis	2.5 »
» colli	2.0 »
Scalenus anterior	1.3 »
» medius	0.75 »
» minimus	0.3 »
Splenius capitis	3.5 »
» colli	1.2 »
Semispinalis capit.	2.4 »
Longissimus cervic. + cap.	2.5 »
Transverso-spinal. cervic. + cap.	3.0 »
Rectus capitis maj.	0.75 »
» » min.	0.7 »
Obliquus capitis inf.	0.75 »
» » sup.	0.25 »
	25.77 cm²

III. Rumpfmuskeln.

Muskel	cm²
Serratus post. sup.	0.6 cm²
» » inf.	1.5 »
Iliocostalis	3.5 »
Longissimus dorsi	7.5 »
Transverso-spinal. lumb. + dorsi	15.0 »
Intercost. ext. + int. cartil. + lev. cost.	26.0 »
Intercostalis int.	25.0 cm²
Triangularis sterni	1.0 »
½ Zwerchfell (etwa)	10.0 »
Rectus abdominis	2.5 »
Obliquus abdominis ext.	8.0 »
» » int.	7.0 »
Transversus abdom.	4.0 »
Pyramidalis	0.2 »
	111.8 cm²

IV. Brustgliedmaße.

Muskel	cm²
Trapezius	11.0 cm²
Rhomboidei	5.0 »
Levator scap.	1.75 »
Serratus ant.	10.25 »
Subclavius	0.4 »
(Rumpf-Schultermuskeln = 28.40)	
Latissimus dorsi	7.75 »
Pectoralis maj.	9.0 »
» minor.	1.5 »
(Rumpf-Armmuskeln = 18.25)	
Deltoides	12.25 »
Supraspinatus	7.6 »
Infraspinatus	9.0 »
Teres minor.	2.0 »
» major.	4.75 »
Subscapularis	11.25 »
Latissimo-condyl.	1.25 »
Triceps 19.75 – cpt. long.	4.5 »
Triceps – » lat.	6.0 »
Triceps – » med.	9.0 »
Triceps – anconeus	0.25 »
Biceps brachii cpt. lg.	2.25 »
» » » br.	3.5 »
Coraco-brachialis	2.8 »
Brachialis	6.3 »
Brachioradialis	1.5 »

Muskel			
Extensor carpi rad. lg.		1.0	cm²
» » » br.		1.6	»
» digit. comm.		1.75	»
» » V. proprius		0.1	»
» carpi ulnaris		1.0	»
Supinator		4.0	»
Abductor pollicis lg.		1.25	»
Extensor pollicis brev.«		1.10	»
» » lg.		0.4	»
» digiti II. propr.		0.3	»
Palmaris longus		0.23	»
Flexor carpi radialis		2.6	»
Pronator teres		2.25	»
Flexor carpi ulnaris		2.8	»
Flexor digit. subl. manus: cpt. digiti V.	7.05	0.8	»
» » IV.		1.75	»
» » III.		2.30	»
» » II.		2.0	»
Flexor pollicis cpt. superf.		0.2	»
»Flexor pollicis longus«		2.0	»
Flexor digit. prof.		5.5	»
Pronator quadratus		1.5	»
Flexor pollic. brev. uln. (tief)		0.32	»
» » » rad. (oberfl.)		0.30	»
Opponens pollicis		0.32	»
Adductor pollicis		1.10	»
Abductor » brevis		0.50	»
» digiti V.		1.0	»
Opponens » V.		0.4	»
Lumbricales		0.25	»
Interosseus volaris I.		0.75	»
» » II.		0.5	»
» » III.		0.3	»
» dorsalis I.		1.0	»
» » II.		0.20	»
» » III.		0.25	»
» » IV.		0.3	»

Alle Muskeln d. oberen Gliedmaße . . 581.30 cm²

Kleine Handmuskeln (7.49) + Rumpf-Schulterm. (28.40) = ... 35.89 »

Brustgliedmuskeln ohne kl. Hand- und Rumpf-Schulterm. = ... 545.16 »

»Reine« Brustgliedmuskeln ohne Rumpf-Schulterm. (28.40) u. Rumpf-Armmuskeln (18.25) = ... 534.40 »

V. Beckengliedmaßenmuskeln

Muskel			
Quadratus lumborum		4.0	cm²
Psoas minor		1.5	»
(Beckengürtelmuskeln = 5.5)			
Psoas major		7.0	»
Iliacus		16.0	»
Sartorius		0.6	»
Tensor fasciae		0.3	»
Rectus femoris	30.6	3.6	»
Vastus medialis		8.0	»
» intermed.		7.0	»
» lateralis		12.6	»
Gracilis		1.75	cm²
Pectineus medial.	4.0	2.5	»
» lateral.		1.5	»
Adductor long.		1.5	»
» brevis		2.5	»
»Adductor posterior« (»Jobert«)		5.0	»
» minimus		2.75	»
» magnus		7.0	»
Glutaeus maximus		10.0	»
» medius		17.0	»
» minimus		2.0	»
Scansorius		2.25	»
Piriformis		3.0	»
Obturator int.		5.0	»
Gemellus sup. + inf.		0.75	»
Obturator externus		3.5	»
Quadratus femoris		1.0	»
Biceps femoris cpt. long.		2.0	»
» » » brev.		2.75	»
Tubero-femoralis		6.0	»
Semitendineus (oberer Teil etwas dicker; unterer Teil nur 2.3—2.4)		2.5	»
Semimembranaceus (hat ganz lange Fasern)		1.75	»
Plantaris		0.25	»
Gastrocnemius med.		3.0	»
» lat.		3.2	»
Soleus		12.0	»
Popliteus		3.0	»
Flexor hall. lg.		4.8	»
» digit. comunis lg.		2.0	»
Tibialis post.		2.8	»
Peroneus long.		3.5	»
» brevis		2.0	»
Extensor digit. lg.		1.0	»
» hallucis lg.		0.5	»
Tibialis anterior		3.0	»
Flexor digit. brev.		0.25	»
Abductor hallucis		0.5	»
Flex. hall. brev. med.		0.8	»
» » » lat.		0.3	»
Quadratus plantae		0.25	»
Abduct. dig. V. pedis		0.4	»
Flexor » V. »		0.25	»
Opponens dig. V. pedis		0.15	»
Abduct. halluc. obl.		1.5	»
» » transv.		1.8	»
Interossei plant.		1.25	»
» dorsal.		1.5	»
Lumbricales		0.65	»

Alle Beckengliedmuskeln . . . . 195.15 cm²

Gürtelmuskeln (5.5) + kleine Fußmuskeln (9.6) = ... 15.10 »

Beinmuskeln ohne Gürtel und Fuß = 180.05 cm²

»Reine Beckengliedmuskeln« ohne Gürtel-, aber mit kleinen Fußmuskeln = ... 189.65 »

Zusammenstellung der Querschnittgrößen der Muskeln des Schimpansen.

I.	Kaumuskeln	18.00 cm^2
II.	Hals- und Nackenmuskeln	25.77 »
III.	Rumpfmuskeln	111.80 »
IV.	a) Obere Gliedmaße, alle Muskeln	581.30 »
	b) Obere Gliedmaße, ohne kleine Hand- und Rumpf-Schultermuskeln	(545.16) »
	c) »Reine« obere Gliedmaßenmuskeln, d. h. ohne Rumpf-Schultermuskeln u. Rumpf-Armmuskeln	(534.40) »
V.	a) Untere Gliedmaße, alle Muskeln	195.15 »
	b) Untere Gliedmaße, ohne Gürtel- und kleine Fußmuskeln	(180.05) »
	c) »Reine« untere Gliedmaßenmuskeln, d. h. ohne Gürtelmuskeln, aber mit kleinen Fußmuskeln	(189.65) »
	Gesamtquerschnitt der Muskeln einer Seite	932.02 cm^2
	Gesamtquerschnitt der Muskeln beider Seiten	1864.00 »

I. Querschnittvergleich der Hauptmuskelgruppen des ganzen Körpers.

1. Der Kaumuskelquerschnitt verhält sich zum Gesamtmuskelquerschnitt beim

Menschen[1]	wie 24.0 : 1.518	(Gesamt-Q.[2])	= 1 : 63.3	(1.52% Kaumuskel-Q.[2])
Schimpansen	» 18.0 : 932	(»)	= 1 : 51.7	(1.93% »)
Hund	» 26.5 : 390	(»)	= 1 : 14.7	(6.8% »).

Dem Gewicht nach machten die Kaumuskeln beim Schimpansen nur 1.3% aus, der Kraft nach also wesentlich mehr, weil sie stark gefiedert sind, also einen großen physiologischen Querschnitt haben.

2. Der Querschnitt der Hals- und Nackenmuskeln verhält sich zum Gesamtmuskelquerschnitt beim

Schimpansen	wie 25.8 : 932	(Gesamt-Q.)	= 1 : 36.1	(2.8% Hals-Nackenmusk.)
Hund	» 30.0 : 390	(»)	= 1 : 13.0	(7.7% »).

Offenbar sind beim Hund namentlich die Nackenmuskeln stärker, um den Kopf, trotz des größeren Schwerkraftmomentes gegenüber der Kopfstellung beim fast aufrechtgehenden Schimpansen, kräftig heben zu können. Beim Schimpansen ist das Gewicht der Hals- und Nackenmuskeln verhältnismäßig größer wie die Kraft, weil sie längerfasrig sind.

3. Der Querschnitt der Rumpfmuskeln verhält sich zum Gesamtmuskelquerschnitt beim

Schimpansen	wie 111.8 : 932	(Gesamt-Q.[2])	= 1 : 8.3	(12.0% Rumpfmuskeln)
Hund	» 126.6 : 390	(»)	= 1 : 3.08	(32.4% »).

[1] Nach Ed. Webers Zahlen von mir berechnet. [2] Q. = Querschnitt.

Die Berechnung ergibt demnach für das Verhältnis der Rumpfmuskelkraft ein dem Gewichtsverhältnis ähnliches Verhalten, nur ist die Kraft etwas kleiner (12.0% gegen 13.3%) im Verhältnis zur Gesamtkraft als das Gewicht im Verhältnis zum Gesamtmuskelgewicht.

4. Der Querschnitt aller Brustgliedmuskeln verhält sich zum Gesamtmuskelgewicht beim

Schimpansen	wie 581.3 : 932	(Gesamt-Q.[1])	= 1 : 1.6	(62.4% Br.[2]-Q.)
Menschen[3]	» 284.6 : 1518	(»)	= 1 : 5.3	(18.7% »)
Hund	» 107.1 : 390	(»)	= 1 : 3.7	(27.4% »).

5. Der Querschnitt aller Beckengliedmuskeln verhält sich zum Gesamtmuskelquerschnitt beim

Schimpansen	wie 195.1 : 932	(Gesamt-Q.)	= 1 : 4.7	(20.9% Be.[4]-Q.)
Menschen[3]	» 578.6 : 1518	(»)	= 1 : 2.66	(37.59% »)
Hund	» 97.0 : 390	(»)	= 1 : 4.1	(24.9% »).

Der Vergleich der beiden Zahlentafeln 4 und 5 zeigt im Vergleich mit den Gewichtszahlen, daß auffälligerweise beim Brustglied der Querschnitt, beim Beckenglied hingegen das Gewicht sehr viel größer ist, das letztere besitzt eben eine große Zahl langer, schwerer Muskeln von kleinem Querschnitt, während das Brustglied, namentlich auch der Schultergürtel, neben langfasrigen, aber zugleich auch sehr dicken Muskeln eine große Zahl von kurzfasrigen, aber dicken besitzt.

II. Querschnittverhältnis der Gliedmaßenmuskeln im ganzen zueinander.

1. Verhältnis der Querschnitte **aller** Muskeln der Brust- zu dem der Beckengliedmaße beim

Menschen	wie 284.6 (Br.-M.[5])	: 578.6 (Be.-Q.)	= 1 : 2.03	(49.4% Br.-M.)
Hund	» 107.0 (»)	: 97.0 (»)	= 1 : 0.91	(110.3% »)
Schimpansen	» 581.3 (»)	: 195.1 (»)	= 1 : 0.33	(297.9% »)

Diese Zahlen zeigen in noch weit deutlicherer Weise wie die Gewichtszahlen, daß der Schimpanse ein Armkletterer ist, der Mensch ein Beinläufer.

2. Verhältnis der Querschnitte der »reinen« Armmuskeln zu dem der »reinen« Beinmuskeln beim

Schimpansen	wie 534.0 (»r.« A.-M.[6])	: 190.0 (»r.« B.-M.[7])	= 1 : 0.37	(281.0% r. A.-M.-Q.[8])
Hund	» 87.9 (»)	: 86.4 (»)	= 1 : 0.98	(101.7% »)
Menschen[9]	» 226.0 (»)	: 511.6 (»)	= 1 : 2.3	(43.5% »)

[1] Q. = Querschnitt. [2] Br. = Brustgliedmuskeln. [3] Siehe vor. Abhandlung S. 343. [4] Be. = Beckengliedmuskeln. [5] Br.-M. = Brustgliedmuskeln. [6] »r.« A.-M. = »reine« Armmuskeln. [7] »r.« B.-M. = »reine« Beinmuskeln. [8] r. A.-M.-Q. = reiner Armmuskelquerschnitt. [9] Siehe R. Fick, Über d. Gewichts- u. Querschn.-Verh. d. Hundemuskeln. Diese Berichte 1922 S. 343.

Auch der Vergleich dieser Zahlentafel mit der vorigen weist auf den vorwiegenden Gebrauch der Brustgliedmaßen beim Schimpansen zum Klettern hin, denn er zeigt, daß gerade die Schultergürtelmuskeln beim Schimpansen besonders kräftig sind, die »reinen« Armmuskeln gegenüber den Beinmuskeln daher weit weniger überwiegen wie die ganzen Brustgliedmuskeln. Beim Menschen ist der Unterschied weit geringer. Beim Hund ist das Verhältnis ähnlich wie beim Schimpansen, weil beim vierfüßigen Laufen natürlich auch die Gürtelmuskeln eine sehr große Rolle spielen.

III. Querschnittsvergleich der einzelnen Muskelgruppen der Gliedmaße.

1. Brustgliedmaße.

a. Ellbogenbeuger.

α. Querschnittgröße der Ellbogenbeuger in cm².

	Schimpanse	Mann (n. Fick Bd. III)	Hund
Biceps brachii	5.25	6.55	3.2
Brachialis	6.30	6.40	1.1
Brachioradialis	1.50	1.86	nicht vorhanden
Extensor carpi rad. lg. + brev.	2.60	5.36	1.3
» digit. comm. long	1.85	4.30	0.9
Pronator teres	2.25	3.24	1.3
Palmaris longus	0.23	0.93	—
Flexor carpi radialis	2.60	2.16	0.6
» digit. sublimis	7.05	kaum beugend	streckt
	30.13	30.80	8.4

β. Querschnittverhältnis der Ellenbeuger zum Querschnitt aller Brustgliedmuskeln beim

Schimpansen wie 30.13 (Ellenbe.) : 581.3 (alle Arm-M.) = 1 : 19.2 (5.01% = Ellenbe.)
Hund » 8.40 (») : 107.1 (») = 1 : 12.8 (7.9 % = »)
Menschen » 30.80 (») : 284.6 (») = 1 : 9.2 (10.8 % = »)

γ. Verhältnis des Querschnittes der Ellenbeuger zu dem der »reinen« Armmuskeln beim

Schimpansen wie 30.13 (Ellenbe.) : 534 (»reine« Arm-M.) = 1 : 17.7 (5.8 % = Ellenbe.)
Hund » 8.40 (») : 87.9 (») = 1 : 10.4 (9.5 % = »)
Menschen » 30.80 (») : 226 (») = 1 : 73 (13.6 % = »)

Die beiden Zahlentafeln ergeben, daß die Kraft der Ellenbeuger beim Schimpansen um mehr als das Doppelte hinter der übrigen »Armkraft« zurücksteht wie beim Menschen. Beim Hund stellen die Ellenbeuger einen wesentlich größeren Teil zur Armkraft wie beim Schimpansen.

b. Ellbogenstrecker.

α. Querschnittgröße der Ellbogenstrecker in cm².

	Schimpanse	Mann	Hund
Triceps + aucon	19.75	20.37	15.3
Extensor carpi ulnaris	1.00	5.30	3.0
Flexor carpi ulnaris	2.80	5.03	6.3
» » radialis	beugt	beugt	0.6
» digitorum sublimis	»	»	2.9
» » profundus	—	—	4.5
Summe des Querschnittes der Ellenbeuger.	23.55	30.70	32.6

β. Verhältnis des Querschnittes der Ellenstrecker zu dem **aller** Brustgliedmuskeln beim

Schimpansen wie 23.55 (Ellenstr.): 581.3 (alle Arm-M.) = 1 : 24.7 (4.04 % = Ellenstr.)
Menschen » 30.70 (»): 284.6 (» ») = 1 : 9.2 (10.8 % = »)
Hund » 32.6 (»): 107.1 (» ») = 1 : 3.3 (30.4 % = »)

γ. Verhältnis des Querschnittes der Ellenstrecker zu dem der »reinen« Armmuskeln beim

Schimpansen wie 23.55 (Ellenstr.): 534 (»r.« A.-M.[1]) = 1 : 22.6 (4.4 % = Ellenstr.)
Pferd (Schauder)[2] » 243.36 (»): 2270.03 (» ») = 1 : 9.3 (10.7 % = »)
Mann » 30.70 (»): 226 (» ») = 1 : 7.3 (13.6 % = »)
Hund » 32.6 (»): 87.9 (» ») = 1 : 2.7 (37.1 % = »)

Die beiden Zahlentafeln zeigen, daß beim Schimpansen die Ellbogenmuskeln, sowohl die Beuger wie die Strecker, einen bei weitem kleineren Teil der ganzen Armkraft aufbringen als beim Menschen, weil beim Schimpansen (Armkletterer) die Schultermuskeln vergleichsweise viel mächtiger sind als beim Menschen. Das Umgekehrte ist beim Hund der Fall, wo die Ellbogenmuskeln eine sehr große Rolle bei der Fortbewegung spielen.

δ. Verhältnis des Querschnittes der Ellenbeuger zu dem der Ellenstrecker beim

Schimpansen wie 30.13 (Ellenb.): 23.55 (Ellenstr.) = 1 : 0.78 (127.9 % = Ellenb.)
Mann » 30.8 (»): 30.7 (») = 1 : 0.99 (100.3 % = »)
Pferd (Schauder)[2] » 242.7 (»): 242.4 (») = 1 : 1.003 (99.7 % = »)
Hund » 8.4 (»): 32.6 (») = 1 : 3.9 (25.6 % = »)

Die Zahlen zeigen sehr deutlich, daß beim Hund die Kraft der Ellenbeuger vergleichsweise sehr gering ist, da die ganzen Fingerbeuger, wie wir oben sahen, Ellbogen*strecker* sind, und durch ihre Kürze zwangsmäßig bei der Krallenbeugung die Armstreckung bewirken, was beim Laufen sehr wesentlich ist.

[1] »r.« A.-M. = »reine« Armmuskeln. [2] Von mir nach Schauders Zahlen berechnet.

Auffällig ist der große Unterschied zwischen dem Gewichts- und dem Querschnittsverhältnis beim Pferd. Im Gewicht sind die Beuger den Streckern stark unterlegen, da sie nicht einmal ein Drittel von ihnen wiegen. Da sie aber außerordentlich stark gefiedert sind, haben sie fast die gleiche Kraft wie die Strecker.

c. Hand-Fingerbeuger.

α. Querschnittgröße der Hand-Fingerbeuger in cm².

	Schimpanse	Mann	Hund
Palmaris longus	0.23	0.93	—
Flexor carpi radialis	2.60	2.16	0.6
» » ulnaris	2.80	5.03	9.4
» digitorum sublimis	6.85	10.69	2.9
» » profundus	5.50	10.77	5.6
» »pollicis longus« (d. h. flex. digit. prof. radialis)	2.00	2.90	0.3
Abductor pollicis longus	2.35 beugen die Mittelhand	1.84	streckt
Extensor pollicis brevis		—	
» carpi ulnaris	—	streckt	3.0
	22.33	34.32	21.8cm²

β. Verhältnis des Querschnittes der Hand-Fingerbeuger zu dem aller Brustgliedmuskeln beim

Schimpansen wie 22.33 (H.-F.-B.[1]) : 581.3 (alle A.[2]) = 1 : 21.6 (3.8 % = H.-F.-B.)
Mann » 34.32 (») : 284.6 (») = 1 : 8.2 (12.0 % = »)
Hund » 21.80 (») : 107.1 (») = 1 : 5.4 (20.4 % = »).

γ. Verhältnis des Querschnittes der Hand-Fingerbeuger zu dem der »reinen« Armmuskeln beim

Schimpansen wie 22.33 (H.-F.-B.) : 534 (reine A.) = 1 : 23.9 (4.2 % = H.-F.-B.)
Mann » 34.32 (») : 226 (») = 1 : 6.6 (15.2 % = »)
Hund » 21.80 (») : 87.9 (») = 1 : 4.0 (24.8 % = »)
Pferd (Schauder)[3] » 1135.54 (») : 2270.16 (») = 1 : 1.99 (53.0 % = »).

δ. Verhältnis des Querschnittes der Hand-Fingerbeuger zu dem der Ellenbeuger beim

Schimpansen wie 22.33 (H.-F.-B.) : 30.13 (E.-B.[4]) = 1 : 1.3 (74.1 % = H.-F.-B.)
Mann » 34.32 (») : 30.80 (») = 1 : 0.81 (111.1 % = »)
Hund » 21.80 (») : 8.40 (») = 1 : 0.38 (259.5 % = »)
Pferd (Schauder)[3] » 1135.54 (») : 242.69 (») = 1 : 0.21 (467.1 % = »).

[1] H.-F.-B. = Hand-Fingerbeuger. [2] A. = Armmuskeln.
[3] Verhältniszahlen von mir aus den Wägungen Schauders berechnet.
[4] E.-B. = Ellenbeuger.

Die geringe Kraft der Hand-Fingerbeuger im Verhältnis zur Ellenbeugerkraft beim Schimpansen im Gegensatz zum Menschen und namentlich zum Hund ist wohl leicht aus dem Gebrauch der Affenhand zu erklären. Die Hundepfote muß nämlich beim Laufen kräftig mitwirken, und auch die Hand des Menschen wird im täglichen Gebrauch, namentlich bei Handwerkern, kräftigere Leistungen zu vollführen haben als die Affenhand, die beim Klettern im Vergleich zu den Schultermuskeln und den Ellenbeugern nur geringe Arbeit zu leisten hat und auch sonst wohl nur zu leichten Arbeiten, wie zum Pflücken von Früchten, Blättern und Blattstielen, verwendet wird.

d. Hand-Fingerstrecker.

α. Querschnittgröße der Hand-Fingerstrecker.

	Schimpanse	Mann	Hund
Extensor carpi radial. lg. + brevis...	2.60	3.14	1.3
» » ulnaris	1.00	5.30	3.0
» digitorum longus	1.85	4.28	1.2
» pollicis lg. + indicator.....	0.70	{ 0.56 1.17 }	0.3
» » brevis	} Mittelhand	1.12	} 0.6
Abductor pollicis longus	} beugend	beugt	
	6.15	15.57	6.4

β. Verhältnis des Querschnittes der Hand-Fingerstrecker zu dem aller Brustgliedmuskeln beim

Schimpansen wie 6.15 (H.-F.-St.[1]) : 581 (alle A.[2]) = 1 : 94.5 (1.06 % = H.-F.-St.)
Menschen » 15.57 (») : 284.6 (») = 1 : 18.3 (5.5 % = »)
Hund » 6.4 (») : 107.1 (») = 1 : 16.7 (5.9 % = »).

γ. Verhältnis des Querschnitts der Hand-Fingerstrecker zu dem der reinen Armmuskeln beim

Schimpansen wie 6.15 (H.-F.-St.) : 534 (reine A.) = 1 : 86.8 (1.15 % = H.-F.-St.)
Pferd (SCHAUDER)[3] » 86.25 (») : 2270 (») = 1 : 26.3 (3.8 % = »)
Menschen » 15.57 (») : 226 (») = 1 : 14.5 (6.9 % = »)
Hund » 6.4 (») : 87.9 (») = 1 : 13.6 (7.4 % = »).

δ. Verhältnis des Querschnittes der Hand-Fingerstrecker zu dem der Hand-Fingerbeuger beim

Pferd (SCHAUDER)[3] wie 86.25 (Hd.-Fgst.[1]) : 1135.54 (Hd.-Fgbg.[4]) = 1 : 13.2 (7.51 % Hd.-Fgst.)
Schimpansen » 6.15 (») : 22.33 (») = 1 : 3.6 (27.5 % »)
Hund » 6.4 (») : 21.8 (») = 1 : 3.4 (29.3 % »)
Menschen » 15.57 (») : 34.32 (») = 1 : 2.2 (45.4 % »)

---

[1] H.-F.-St. = Hand-Fingerstrecker. [2] A. = Armmuskeln.
[3] Verhältniszahlen von mir berechnet aus SCHAUDERS Wägungen.
[4] Hd.-Fgbg. = Hand-Fingerbeuger.

Daß die Streckkraft beim Hund vergleichsweise groß ist, beim Schimpansen klein, hängt offenbar damit zusammen, daß beim Hund der lange Daumenabzieher und kurze Daumenstrecker die Pfote strecken, beim Schimpansen aber beugen.

2. Beckengliedmaße.

a. Knie- und Fußstrecker.

α. Querschnittgröße der Knie- und Fußstrecker beim Schimpansen.

Tensor fasciae	0.3
Rectus femoris	3.6
Vasti	27.6
Gastrocnemius + plantaris (als Fußstrecker)	6.45
Flexor digitorum tibialis	2.0
« » fibularis	4.8
Alle Peronei	5.5
	50.25 cm².

β. Querschnittgröße der Knie-Fußstrecker: Querschnitt aller Beinmuskeln beim

Schimpansen wie	50.2 (Knie-Fußst.)	: 195.15 (alle Bein-M.)	= 1 : 3.88	(25.7% Knie-Fußst.)
Menschen »	218.2 (»)	: 578.6 (»)	= 1 : 2.6	(37.7% »)
Hund »	39.6 (»)	: 97.0 (»)	= 1 : 2.4	(41.7% »)

Der vergleichsweise geringe Anteil der Kraft der Knie-Fußstrecker an der Gesamtbeinkraft beim Schimpansen steht offenbar im Zusammenhang damit, daß er kein Bodenläufer ist, wie die Vierfüßer und der Mensch, sondern ein Armkletterer.

γ. Querschnittgröße der Knie-Fußstrecker: Querschnitt der »reinen« Beinmuskeln (d. h. ohne Gürtel- aber mit Sohlenmuskeln) beim

Schimpansen wie	50.2 (Knie-Fußst.)	: 189.65 (»r.« B.-M.[1])	= 1 : 3.77	(26.52% Knie-Fußst.)
Menschen »	218.2 (»)	: 511.6 (»)	= 1 : 2.34	(42.70% »)
Hund »	39.6 (»)	: 90.4 (»)	= 1 : 2.53	(39.5% »)

b. Knie- und Fußbeuger.

α. Querschnittgröße der Knie- und Fußbeuger beim Schimpansen.

Sartorius	0.6
Gracilis	1.75
Semitendineus	2.5
Semimembranaceus	1.75
Biceps femoris	4.75
Popliteus	3.0
Gastrocnemius + Plantaris (als Kniebeuger)	6.45
Tibialis anterior	3.0
Extensor digitorum long.	1.0
» hallucis long.	0.5
	25.30 cm²

[1] »r.« B.-M. = »reine« Beinmuskeln.

β. Querschnittgröße der Knie- und Fußbeuger : allen Beinmuskeln beim

Schimpansen wie	25.3 (Knie- u. Fußb.)	: 195.15 (alle B.-M.[1])	= 1 : 7.71	(12.9% Knie- u. Fußb.)
Menschen »	98.7 (»)	: 578.6 (»)	= 1 : 5.86	(17.0% »)
Hund »	33.8 (»)	: 97.0 (»)	= 1 : 2.75	(34.8% »)

γ. Querschnittgröße der Knie- und Fußbeuger : »reinen« Beinmuskeln ohne Gürtelmuskeln beim

Schimpansen wie	25.3 (Knie- u. Fbg.[2])	: 189.65 (»r.« B.-M.[3])	= 1 : 7.50	(13.46% Knie- u. Fbg.)
Menschen »	98.7 (»)	: 511.6 (»)	= 1 : 5.08	(19.68% »)
Hund »	33.8 (»)	: 90.4 (»)	= 1 : 2.67	(37.45% »)

δ. Querschnittgröße der Knie- und Fußbeuger : Querschnitt der Knie- und Fußstrecker beim

Schimpansen wie	25.3 (Kn.- u. Fb.[4])	: 50.25 (Kn.- u. Fußst.[5])	= 1 : 1.99	(50.37% Kn.- u. Fb.)
Menschen »	98.7 (»)	: 218.2 (»)	= 1 : 2.21	(45.2% »)
Hund »	33.8 (»)	: 39.6 (»)	= 1 : 1.17	(85.3% »)

Im Querschnittsverhältnis der Knie- und Fußbeuger zu den Streckern stehen sich Schimpanse und Mensch näher, als man nach dem Querschnittsverhältnis zwischen den Streckern und den Gesamtbeinmuskeln vielleicht anzunehmen geneigt wäre. Offenbar spielen eben beim kletternden Affen die Pro-Supinationsmuskeln der Hüfte eine verhältnismäßig größere Rolle bei der Gesamtbeinkraft als beim gehenden Menschen. In der Tat haben diese Muskeln beim Schimpansen einen Querschnitt von etwas über 20 cm² bei einem Gesamtquerschnitt von nicht 200 cm², machen also über $^1/_{10}$ desselben aus; beim Menschen hingegen haben sie einen Querschnitt von etwas weniger als 30 cm², während der Gesamtbeinmuskelquerschnitt fast 580 cm² beträgt.

IV. Muskelquerschnitt und Knochengewicht.

1. Brustgliedmaße.

a. Gewicht **aller** Brustgliedknochen : Querschnitt **aller** Brustgliedmuskeln beim

Schimpansen wie 482.0 g (alle Armkn.) : 581.3 cm² (alle A.-M.[6]) $= \frac{482.0}{581.3} = 0.83$ g auf 1 cm²

Menschen » 798.0 » (») : 284.6 » (») $= \frac{798.0}{284.6} = 2.80$ » » 1 »

Hund » 127 » (») : 107.1 » (») $= \frac{127.1}{107.1} = 1.19$ » » 1 »

Beim Schimpansen sind also nach meiner Untersuchung die Knochen der Brustgliedmaße im Verhältnis zur Muskelkraft nicht nur wesentlich leichter

[1] alle B.-M. = alle Beinmuskeln. [2] Knie- und Fußbeuger. [3] »r.« B.-M. = »reine« Beinmuskeln. [4] Kn. u. Fb. = Knie- und Fußbeuger. [5] Kn. u. Fußst. = Knie- und Fußstrecker. [6] A.-M. = Armmuskeln.

als beim Menschen, sondern auch als beim Hund, und wie beim Gewicht (s. S. 182), steht das Verhältnis daher dem beim Hund viel näher als dem des Menschen.

b. Gewicht der »reinen« Armknochen : Querschnitt der »reinen« Armmuskeln beim

Schimpansen wie 387.5 g (»r.« Armkn.[1]) : 534 cm² (»r.« Arm-M.[2]) = $\frac{387.5}{534.0}$ = 0.73 g auf 1 cm²

Menschen » 623.0 » (») : 226 » (») = $\frac{623}{226}$ = 2.80 » » 1 »

Hund » 107 » (») : 80 » (») = $\frac{107}{80}$ = 1.34 » » 1 »

Beim Schimpansen kommt, wie die Tafel zeigt, bei den »reinen« Armmuskeln und dem Arm selbst noch weniger Knochenmasse auf 1 cm² Muskelmasse als beim ganzen Brustglied mitsamt dem Brustgürtel. Der Abstand zwischen Mensch und Schimpanse ist daher hier noch größer als beim ganzen Brustglied, denn begreiflicherweise ist beim Menschen das Verhältnis zwischen Knochengewicht und Muskelkraft genau dasselbe, ob wir das ganze Brustglied oder den »reinen Arm« betrachten.

2. Beckengliedmaße.

a. Gewicht **aller** Beckengliedknochen : Querschnitt **aller** Beckengliedmuskeln beim

Schimpansen wie 720.5 g (a. B.-K.[3]) : 195.5 cm² (a. B.-M.[4]) = $\frac{720.5}{195.5}$ = 3.63 g auf 1 cm²

Menschen » 2391 » (») : 578.6 » (») = $\frac{2391}{578.6}$ = 4.11 » » 1 »

Hund » 151.5 » (») : 97 » (») = $\frac{151.5}{97}$ = 1.56 » » 1 »

b. Gewicht der »reinen« Beinknochen : Querschnitt der »reinen« Beinmuskeln beim

Schimpansen wie 474.5 g (r. B.-K[5]) : 190 cm² (r. B.-M.[6]) = $\frac{474.5}{190}$ = 2.49 g auf 1 cm²

Menschen » 1912 » (») : 511.6 » (») = $\frac{1912}{511.6}$ = 3.73 » » 1 »

Hund » 122 » (») : 90.4 » (») = $\frac{122}{90.4}$ = 1.35 » » 1 »

[1] »r.« Armkn. = »reine« Armknochen. [2] »r.« Arm-M. = »reine« Armmuskeln. [3] a. B.-K. = alle Beckengliedknochen. [4] a. B.-M. = alle Beckengliedmuskeln. [5] r. B.-K. = reine Beinknochen. [6] r. B.-M. = reine Beinmuskeln.

Bei der Beckengliedmaße ist das Verhältnis zwischen dem Knochengewicht und der Muskelkraft beim Schimpansen bei weitem ähnlicher wie das des Menschen als bei der oberen Gliedmaße. D. h. die Beinknochen sind beim Schimpansen nicht viel weniger schwer im Verhältnis zur Muskelkraft wie beim Menschen. Beim Menschen ist hier übrigens das Verhältnis für das ganze Beckenglied und das »reine« Bein nicht gleich, sondern beim ganzen Beckenglied für den Knochen günstiger. Hier kommen über 4 g, beim »reinen« Bein nur $3^3/_4$ g Knochen auf je 1 cm^2 Muskelfleisch. Beim Hund ist das in Rede stehende Verhältnis beim Brust- und Beckenglied untereinander weit ähnlicher wie beim Menschen und beim Hund, wo zwischen Brust- und Beckenglied ein großer Unterschied im Knochen- und Muskelverhältnis herrscht.

V. Verhältnis des Körpergewichts zum Gesamtmuskelquerschnitt.

Das in der Überschrift genannte Verhältnis ist beim

Menschen wie 64.000 g (Körp. leb.[1]) : 3036 cm^2 (G.-M.-Q.[2]) $= \frac{64.000}{3036} = 21.1$ g auf 1 cm^2

Schimpansen » 37.000 » (») : 1864 » (») $= \frac{37.000}{1864} = 19.9$ » » 1 »

Hund » 9.500 » (») : 780 » (») $= \frac{9.500}{780} = 12.2$ » » 1 »

Wie schon in der vorigen Abhandlung betont, zeigen die gefundenen Zahlen, daß der Hundekörper weit muskelstärker im Verhältnis zum Körpergewicht ist als der Mensch. Die Untersuchung des Schimpansen hat nun ergeben, daß der Schimpanse sich in diesem Verhältnis fast genau so verhält wie der Mensch. Ja es kann gar kein Zweifel darüber sein, daß es Schimpansen geben wird, bei denen auf 1 cm^2 Muskelquerschnitt sogar genau wie bei unserem Mann 21.1 g Körpergewicht treffen und daß es Menschen gibt, bei denen gerade 9.9 g Körpergewicht auf je 1 cm^2 Muskel treffen wie bei unserem Schimpansen.

[1] Körp. leb. = Körper lebend. [2] G.-M.-Q. = Gesamtmuskelquerschnitt.

Lans i. Tirol, Ansitz Heimkehr, Herbst 1924.

Ausgegeben am 21. April.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1925

X. Gesamtsitzung. 19. März.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Wilcken sprach über den angeblichen Staatsstreich des Octavian im Jahre 32 v. Chr.

Es wird der Nachweis geführt, daß das 2. Quinquennium des Triumvirats nicht mit dem Jahre 33, sondern mit dem Jahre 32 zu Ende gegangen ist. Dadurch wird die herrschende Annahme, daß Octavian im Jahre 32 einen Staatsstreich begangen habe, hinfällig.

2. Vorgelegt wird die Veröffentlichung der Eusko-Ikaskuntza Sociedad de Estudios Vascos, »Guillermo de Humboldt y el Pais Vasco« (San Sebastián 1925).

Ausgegeben am 21. April.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1925

XI. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 26. März.

Vorsitzender Sekretar i. V.: Hr. Engler.

Hr. Hellmann sprach über die »Grenzwerte der Klimaelemente auf der Erde«.

Es wird der Versuch gemacht, für die wichtigsten Klimaelemente, für die genügendes Vergleichsmaterial vorliegt, nämlich für Temperatur, Feuchtigkeit, Bewölkung, Niederschlag und Wind, die Grenzwerte festzustellen, zwischen denen die Jahres- und Monatsmittel, bei der Temperatur auch die Einzelwerte, auf der ganzen Erde schwanken; z. B. Jahresmittel der Temperatur, höchstes 30.2°, niedrigstes —25.8°; größte Jahressumme der Niederschläge 12609 mm, kleinste weniger als 1 mm, usw.

Grenzwerte der Klimaelemente auf der Erde.

Von G. Hellmann.

Zur richtigen Beurteilung des Klimas eines Ortes bedarf es nicht bloß der Kenntnis der mittleren und extremen Werte der zugehörigen Klimaelemente, sondern es ist auch wichtig, die Grenzen zu kennen, innerhalb deren diese Elemente auf der ganzen Erde schwanken. Erst dann läßt sich zuverlässig beurteilen, welche Stellung der betreffende Ort in klimatischer Beziehung einnimmt.

Die Erforschung der Klimaverhältnisse der Erde ist nunmehr so weit vorgeschritten, daß man wagen darf, die Bearbeitung dieser Frage vorzunehmen. Allerdings muß man von vornherein daran festhalten, daß die jetzt aufgestellten Grenzwerte keine endgültigen sein können, sondern daß, wie bei allen Extremen, auch hierbei nach Einbeziehung weiterer Beobachtungsjahre und -orte eine Erweiterung der Grenzen möglich, ja sehr wahrscheinlich ist. Gerade einige in den letzten Jahrzehnten gemachte Erfahrungen sprechen dafür. So haben uns erst die jüngsten Südpolarexpeditionen den Ort der niedrigsten Jahrestemperatur, außerdem auch die windigste Gegend der Erde kennengelehrt, und die neuerdings durchgeführte geologische Aufnahme der Hawaiischen Inseln hat die Feststellung einer jährlichen Regenmenge ergeben, die der größten bisher bekannten den Rang streitig macht. Es ist also sehr wohl möglich, daß wir mit weiterer geographischer und damit Hand in Hand gehender meteorologischer Erforschung der Erde von Gebieten Kenntnis erhalten, deren Klimaelemente die jetzt festgestellten Grenzen überschreiten.

In der folgenden Untersuchung konnten natürlich nur die wichtigsten Klimaelemente, für die reichliches Vergleichsmaterial vorliegt, berücksichtigt werden, also Lufttemperatur, Luftfeuchtigkeit, Bewölkung, Niederschlag und Wind. Es werden noch viele Jahrzehnte vergehen, ehe wir auch für die übrigen Elemente ein gleiches tun können.

Lufttemperatur. Als Ort der höchsten mittleren Jahrestemperatur mit 30.2° muß Massaua am Roten Meer angesehen werden, das auf einer kleinen der Küste vorgelagerten Insel liegt. Wie dieser Wert entstanden ist, ersieht man aus der folgenden Übersicht über die mittleren Maxima und Minima in den Monaten und im Jahre, die aus 16jährigen Aufzeichnungen italienischer Kolonialbeamter von F. Eredia und G. Memmo berechnet worden sind (Contributo alla climatologia di Massaua. Boll. Soc. Geogr. Ital. 1907 fasc. IV):

	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jahr
Mittl. Max.	29.4	29.6	31.6	33.2	35.2	38.6	39.5	38.7	36.8	34.2	32.3	30.6	34.1
» Min.	22.5	22.4	23.1	25.2	26.9	29.0	31.0	30.6	29.2	27.3	25.4	23.0	26.3

Es sind also hauptsächlich die gleichmäßig hohen Minima, welche die hohen Mitteltemperaturen zustande bringen. Die mittleren Minima von Massaua liegen im Winter um 20°, im Sommer um 8° über den mittleren Maxima von Berlin. Es kühlt in der Nacht nicht ab, und man versteht, wenn es in den Reiseberichten heißt, daß in Massaua die warmen Nächte bei gleichzeitig herrschender Windstille und feuchter Luft unerträglich sind. Die Lage auf einer kleinen, von warmem Meerwasser umspülten Insel hat hauptsächlich schuld daran. Da die aus den täglichen Extremen abgeleiteten Tagesmittel von den wahren etwas abweichen, gebe ich noch die aus der Kombination Max., Min., 9^a, 9^p gebildeten Mittel, die den wahren sehr nahekommen; sie entstammen der Arbeit des italienischen Marinearztes Dr. GIOVANNI PETELLA, Massaua ed Assab (Roma 1894. 8°. 95 S.) und beziehen sich auf die 8 Jahre von Mai 1885 bis April 1893:

Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jahr
25.6	26.0	27.2	29 0	31.3	33.5	34.8	34.7	33.3	31.7	29.0	27.0	30.26

Also der gleiche Wert für das Jahresmittel wie vorher.

Die erste Nachricht über die Hitze in Massaua brachte wahrscheinlich der Frankfurter Naturforscher und Reisende E. RÜPPELL, der in den Jahren 1831 bis 1834 Abessinien bereiste (vgl. sein Werk: Reisen in Abessinien. Frankfurt a. M. 1838—1840. 2 Bde. 8°. II, 433—448). Aus seinen etwas mehr als sechs Monate umfassenden Beobachtungen in Massaua hat MÄDLER ein Jahresmittel von 31° abgeleitet. Es fiel wahrscheinlich etwas zu hoch aus, weil die eingehaltenen Beobachtungsstunden $5^1/_2{}^h$, 9^h, $12^1/_2{}^h$, $3^1/_2{}^h$[1] für die Bildung guter Tagesmittel nicht günstig liegen (vgl. A. d'ABBADIE, Observations relatives à la Physique du Globe faites au Brésil et en Ethiopie, redigées par R. Radau. Paris 1873. 4°. S. 146). Vielleicht war auch das Jahr, in dem RÜPPELL beobachtete, besonders heiß; denn in der obengenannten italienischen Beobachtungsreihe kamen gleichfalls höhere Jahresmittel vor:

1890	1891	1898	dagegen	1888	1894	1901
31.1°	31.1°	31.3°		29.4°	29.6°	29.6°

d. h. Unterschiede von fast 2°. Das ist auffällig und rührt z. T. daher, daß die meteorologische Station mehrfach verlegt wurde, wovon auch PETELLA a. a. O. spricht.

Es ist nicht ausgeschlossen, daß die Massaua gegenüberliegende Küstenebene von Yemen, die Tihama, ungefähr dieselbe oder eine noch höhere Jahrestemperatur hat. Messungen aus Hodeida oder einem anderen Küstenort liegen aber meines Wissens nicht vor.

Sodann ist zu erwähnen, daß sich für den Ort Lugh am Juba im italienischen Somaliland (etwa 3° 55′ S., 42° 35′ E., 266 m) aus neueren, 13 Monate umfassenden Messungen an Extremthermometern eine Jahrestemperatur von 30.8° ergibt, ein Wert von derselben Größenordnung wie der von Massaua (vgl. F. EREDIA, Sul clima della Somalia italiana meridionale. Roma 1913. 8°. S. 7 und Meteorol. Zeitschr. 1914 S. 458).

Der ostafrikanische Kolonialbesitz Italiens hat also die höchsten Jahrestemperaturen aufzuweisen, nämlich 30° bis vielleicht 31°; sie könnten im be-

[1] Die genauen Beobachtungsstunden waren $5^h 40^m$, $9^h 6^m$, $12^h 33^m$, $3^h 33^m$. Ob sie wirklich immer genau eingehalten wurden?

nachbarten englischen Somaliland gleichfalls vorkommen; Berbera an der Küste (10° 22′ N., 45° 2′ E.), gegenüber von Aden, also mit Nordexposition, hat nach 12jährigen Beobachtungen allerdings nur 29.4° Jahrestemperatur (Quart. Journ. R. Met. Soc. 1920, 435).

Sehr hoch ist auch die Jahrestemperatur von Berber am oberen Nil, in 18° n. Br. und 350 m Seehöhe; sie beträgt 29° und würde im Meerespiegel etwa 30.8° sein.

Die deutschen Saharareisenden Barth, von Beurmann, Rohlfs und Nachtigal sollen, wie mir Schweinfurth erzählte, immer als heißesten ihnen bekannten Ort die Oase Kauar (18° 57′ N., 495 m), auf dem Karawanenwege von Murzuk nach Kuka, bezeichnet haben. Die von Hann berechneten Rohlfschen Beobachtungen ergeben auch wirklich sehr hohe Mai- und Junimittel (38.1° bzw. 36.6°); da aber die Wintertemperaturen in der Sahara relativ niedrig sind, kann das Jahresmittel von Kauar dasjenige von Massaua nicht erreichen (vgl. Ergänzungsheft 34 zu Petermanns Mitt. und Hann, Klimatologie III, 71).

Früher galt Pondichéry an der Koromandelküste südlich von Madras als Ort der höchsten Jahrestemperatur, die nach dem vom französischen Astronomen Le Gentil vom März 1768 bis Dezember 1769 täglich zur Zeit des Sonnenaufgangs und »au moment le plus chaud du jour« angestellten Beobachtungen 31.0° betragen sollte (vgl. Voyage dans les mers de l'Inde. Paris 1779—1781. 2 Bde. 4°. I, 474 ff.), ein Wert, der durch Doves Temperaturtafeln weitere Verbreitung gefunden hat. Er ist aber zu hoch; denn nach den neuen Beobachtungen des indischen meteorologischen Dienstes, deren Ergebnisse im Climatological Atlas of India eine schöne kartographische Darstellung gefunden haben, kann die mittlere Jahrestemperatur von Pondichéry höchstens 28° betragen; diejenige des mehr nördlich gelegenen Madras ist 27.7°.

Der zu hohe Wert der von Le Gentil für Pondichéry bestimmten Lufttemperatur erklärt sich wahrscheinlich durch eine fehlerhafte Aufstellung der Thermometer. Für Manila, wo er gleichfalls längere Zeit Temperaturmessungen gemacht hat, ist ein solcher Fehler von F. J. F. Meyen durch eigene Beobachtungen auf seiner Reise um die Erde nachgewiesen worden (vgl. Reise um die Erde, ausgeführt auf dem Königlich Preußischen Seehandlungsschiffe Prinzeß Louise, Commandiert von Capitain W. Wendt, in den Jahren 1830, 1831 und 1832. Von Dr. F. J. F. Meyen. Berlin 1835. 2 Bde. 4°. II, 281—282).

Die durch wirkliche Beobachtungen verbürgte *niedrigste mittlere Jahrestemperatur* hat Framheim (78° 38′ S., 163° 37′ W.), das Standquartier von Amundsen auf seiner Südpolarexpedition. Nach den Berechnungen und Reduktionen, die zuerst Mohn und Hann, neuerdings Simpson an den 11 Monate lang gemachten Beobachtungen vorgenommen haben, kann man für diesen Punkt am Rande der antarktischen Eisbarriere rund — 26° annehmen. Es ist vorzugsweise Strahlungskälte, die bei häufigen Windstillen einen so niedrigen Wert bedingt. Die einzelnen reduzierten Monatsmittel sind folgende:

Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Jahr
−9.7	−15.4	−21.5	−27.6	−35.4	−34.4	
Juli	August	September	Oktober	November	Dezember	−25.8
−36.5	−44.8	−37.5	−24.2	−15.5	−6.7	

Näheres in: British Antartic Expedition 1910—1913, Meteorology, Vol. I. Discussion by G. C. Simpson. Calcutta 1919. 4°. S. 21 ff. und in dem eingehenden Referat von E. Barkow in Annal. d. Hydrogr. u. marit. Meteorol. 1921 S. 308 ff.

Da der Südpol sehr hoch liegt — 2454 m nach Mohn, 2765 m nach Simpson —, wird diesem die niedrigste Jahrestemperatur zukommen; sie muß erheblich unter —30° liegen, doch sind die Unterlagen für eine genauere Berechnung zu unsicher, und ich will sie daher lieber unterlassen. Für den zentralen und höchsten Teil des grönländischen Inlandeises (etwa 75° N., etwa 3000 m) nimmt A. Wegener eine mittlere Jahrestemperatur von rund —32° an (vgl. A. Wegener, Durch Grönlands Eiswüste, in der Zeitschrift »Himmel und Erde« XXVI S. 505).

Bisher wurde als niedrigste Jahrestemperatur —20.4° angesehen, die aus den an Fort Conger in der Lady-Franklin-Bai (81° 44′ N., 65° 3′ W.) während des »internationalen (meteorologischen) Polarjahres« von der amerikanischen Expedition unter Leitung von Greely angestellten Beobachtungen abgeleitet war (ausführliches Referat von Hann in der Met. Zeitschr. 1890, 1—18). Fast einen Grad höher fiel der Wert aus, den Mohn aus den auf der Drift der »Fram« gemachten Messungen für den dem Nordpol nächsten Punkt im Polarmeer (83° N., 89° E.) ableitete, nämlich —19.2°, während er mittels einer Art von thermischer Windrose für den Nordpol selbst die mittlere Jahrestemperatur zu —22° berechnete[1]. Wirkliche Temperaturmessungen vom Nordpol sind seitdem nicht hinzugekommen; denn Peary, der den Pol erreicht haben will, scheint diese Seite der Polarforschung arg vernachlässigt zu haben, (vgl. F. Nansen, The Norwegian North Polar Expedition. Scientific Results, vol. VI, Kristiania 1905. 4°. S. 570 ff).

Das höchste Monatsmittel der Temperatur gehört nicht, wie man leicht glauben könnte, dem Ort der höchsten Jahrestemperatur an. Es ist vielmehr mit 38.9° das Julimittel der Station Greenland Ranch im Death Valley, einer zwischen meridional verlaufenden Bergketten (Telescope Range und Funeral Mountains) liegenden und unter den Meeresspiegel herabgehenden Einsenkung nördlich von der Mohawewüste in Nordamerika (35° 40′ bis 36° 35′ N., 116° 15′ bis 117° 5′ W., —55 m). Auch der August hat daselbst noch das hohe Mittel von 38.2° (vgl. M. W. Harrington, Notes on the climate and meteorology of Death Valley, California. Washington 1892. 8°. 50 S. und Meteorol. Zeitschrift 1893 S. 19).

Bemerkenswert hoch ist die mittlere Junitemperatur von Jacobabad im westlichen Indien (28° 17′ N., 68° 29′ E., 57 m), nämlich 36.5° (August noch 35.0°) und die Julitemperatur von Berbera mit 36.3°, während die höchsten Monatsmittel am Roten Meer 35.2° (Juli) in Massaua und 35.3° (Juli) in dem südlich davon gelegenen Assab sind; in Berber am oberen Nil hat der Juni eine Mitteltemperatur von 34.8°.

---

[1] Es ist wiederholt versucht worden, die mittlere Temperatur des Nordpols durch Extrapolation zu berechnen, sie wurde bestimmt von J. Mayer (1775) zu 0°, Kirwan (1787) —0.5°, Scoresby (1820) —11.1°, Arago (1820) —25°, Dove (1852) —16.5°.

Das niedrigste Monatsmittel haben wir am sibirischen Kältepol, in Werchojansk (67° 6′ N., 133° 9′ E., 100 m), zu suchen, wo das Januarmittel —51.2° beträgt. Diese tiefe Temperatur ist aber nach Woeikof lokaler Natur, da sich die kalte Luft in dem zwischen Höhenzügen eingeschnittenen Tal der Jana, in dem Werchojansk liegt, ansammelt, während die benachbarten Plateaus wärmer sind (vgl. Woeikof, Le climat de la Sibérie orientale. Annal. d. Géogr. 1897/98). Jakutsk, das 5 Breitengrade südlicher liegt und früher als kältester Ort der Erde galt, hat ein Januarmittel von nur —42.9°.

Die große Kälte in Sibirien wird, da sie gewöhnlich mit Windstille verbunden ist, verhältnismäßig leicht ertragen. Man muß nur die Vorsicht gebrauchen, die Luft nicht direkt einzuatmen, sondern sie erst durch die Haare des Pelzes, der auch den Mund schützt, streichen zu lassen. Dagegen erzeugt tiefe Temperatur, verbunden mit starker Luftbewegung, wie jedermann aus Erfahrung weiß, ein durchdringendes Kältegefühl und bedingt die eigentliche Strenge des Klimas. An einigen Stellen am Rande des antarktischen Kontinents ist diese Winterstrenge besonders stark ausgeprägt, wie zuerst der Meteorologe der Schwedischen Südpolarexpedition, G. Bodman, an der Überwinterungsstation Snow Hill gezeigt hat. (Das Klima als Funktion von Temperatur und Windgeschwindigkeit in ihrer Verbindung, in Wissensch. Ergebnisse d. Schwedischen Südpolar-Expedition 1901—1903, unter Leitung von Dr. Otto Nordenskjöld. Bd. II. Lfg. I. Stockholm 1908. 4°, vgl. auch O. Baschin, Die Winterstrenge als klimatischer Faktor »Das Wetter« 1918 S. 101—108.) Seitdem wurden die Windverhältnisse der weiter unten noch näher zu erwähnenden antarktischen Station im Adelieland unter 67° S. bekannt, die wohl kaum einen Zweifel darüber lassen, daß hier das härteste Polarklima zu suchen ist.

Die Jahresschwankung der Temperatur, d. h. die Differenz zwischen der mittleren Temperatur des wärmsten und des kältesten Monats, hat ihren größten Wert am eben erwähnten sibirischen Kältepol, der nur vom November bis März als solcher besteht und dann allmählich so hohe Temperaturen annimmt, daß die mittlere Julitemperatur bis auf 15.1° steigt. Infolgedessen ist die Spanne zwischen höchster und niedrigster mittlerer Monatstemperatur daselbst sehr groß, nämlich 66.3°.

Am kleinsten fällt die mittlere Jahresamplitude aus auf kleinen Inseln in niederen Breiten des Stillen Ozeans, so z. B. auf der Koralleninsel Jaluit in der Gruppe der Marschallinseln, wo sie nur 0.4° beträgt, auf der nahe südlich vom Äquator gelegenen Insel Nauru (0.6°) und auf der den westlichen Karolinen angehörigen Insel Yap (0.8°). Auf dem Festland sind durch kleine Jahresschwankung der Temperatur ausgezeichnet das eigentliche Äquatorialgebiet sowie hochgelegene Orte, z. B. Luluaburg (0.7°) und Herbertshöhe (0.7°) in Afrika; Colon (0.5°) in Amerika; Padang auf Sumatra (0.9°); Batavia auf Java (1.1°); Cayenne und Georgetown in Guyana, Pará und Manaos am Amazonas, je 1.5°; Quito (0.4° in 2850 m Höhe und Arequipa (0.8° in 2450 m).

Bezüglich der aperiodischen Tagesschwankung der Temperatur mag es genügen, darauf hinzuweisen, daß sie in hochgelegenen Steppen- und Wüsten-

gebieten besonders groß ist, z. B. in Calama in Chile (22.5° S., 2250 m), wo sie im Jahresdurchschnitt 22.8° beträgt (Met. Zeitschr. 1916, 381), in Kelat im afghanischen Grenzgebiet von Indien (2070 m) 21.6° (Hann, Klimatologie II, 205), daß sie aber sehr kleine Werte annimmt auf dem Ozean[1] und in Polargebieten, nämlich nur 0.5 bis 2°.

Die Frage nach der höchsten auf der Erde beobachteten Temperatur hat von jeher großes Interesse erweckt, sie ist aber schwer sicher zu beantworten, weil die genaue Bestimmung hoher Lufttemperaturen wegen der nicht leicht auszuschaltenden Fehler der Thermometeraufstellung oder, beim Aspirations- und beim Schleuderthermometer, wegen der Rückstrahlung vom Boden großen Schwierigkeiten begegnet. Wenn der Erdboden in der Wüste bis zu 70° erhitzt ist, hält es schwer, die Bodenstrahlung auf das Thermometer ganz unwirksam zu machen. Man darf daher von vornherein annehmen, daß die gemessenen Temperaturmaxima eher zu hoch als zu niedrig sind, und man darf es mit dem Zehntel Grad nicht zu genau nehmen.

Die höchste bisher in einer festen Thermometeraufstellung (einem amerikanischen Thermometerstand vom Typus des Stevenson screen) gemessene Lufttemperatur war 56.6° am 10. Juli 1913 in dem schon erwähnten Todestal (Death Valley) an der Grenze von Kalifornien und Nevada. Diese ungewöhnliche Wärme, die an der tiefsten Stelle der Bodensenke wahrscheinlich noch größer war, trat in einer siebentägigen Hitzeperiode auf, die durch folgende Maxima gekennzeichnet ist:

1913 Juli	8	9	10	11	12	13	14
	53.3	53.8	56.6	53.8	54.4	54.8	52.7°

Eine solche Folge von extremen Temperaturwerten dürfte selbt im Todestale selten vorkommen.

Im Innern von Neusüdwales sind 54° und am 21. Januar 1845 sogar 55° gemessen worden (Hann, Klimatologie III, 485). An mehreren Orten der nordamerikanischen Wüsten von Arizona, Kalifornien und Neumexiko, wie Salton, Mammoth Tank, Mohawk Summit, hat es Maxima von 51° bis 54.4° gegeben (ebenda III, 425 ff.). Im Juli 1921 wurde in Basra am unteren Euphrat ein Maximum von 53.8° festgestellt (Quart. Journ. R. Met. Soc. 1922, 278). Rohlfs beobachtete in der obengenannten Oase Kauar im Mai 53°, und fast ebenso hohe Werte werden im Wüstengebiet von Indien erreicht; Jacobabad (28° 17′ N., 68° 29′ E.) an der Grenze von Beludschistan hatte am 13. Juni 1897 ein Maximum von 52.2°.

Man liest hin und wieder von noch viel höheren Temperaturen als den vorstehend genannten, aber sie sind entweder von vornherein als falsch zu bezeichnen oder so fraglich und unwahrscheinlich, daß sie nicht verdienen, hier mitgeteilt zu werden (man vergleiche z. B. Meteorol. Zeitschr. 1893 S. 62, 279). Ich glaube, man darf als höchste beobachtete und genügend verbürgte Lufttemperatur 55° bis 56° annehmen; denn die in dem amerikanischen Thermo-

[1] Vgl. Braak, Het Klimaat van Nederlandsch-Indië I, 5 S. 309 (Batavia 1924, 8°): Bei trockenem, sonnigem Wetter im Indischen Ozean 0.5°. Als Durchschnittswert für alle Meere gilt 0.65° (H. Meyer in den Annal. d. Hydrographie 1912 S. 531).

meterstand im Death Valley abgelesene Temperatur von 56.6° ist wegen der Beeinflussung von dem durch die Sonnenstrahlung erhitzten Stand, der nur eine geringe Höhe über dem Erdboden hatte, wahrscheinlich um 1° oder mehr zu hoch ausgefallen.

Nachträglich ersehe ich aus einer Notiz im Quart. Journ. R. Met. Soc. 1924 S. 324 (The highest recorded shade temperature) bzw. in der Met. Zeitschr. 1925 S. 39, daß nach einer Angabe von F. Eredia in seiner Schrift »Il clima di Azizia (Tripolitania)« am 13. September 1922 in Azizia, etwa 40 km südlich von Tripolis, bei wolkenlosem Himmel und Südwestwind ein Maximum der Temperatur von 58° beobachtet worden sein soll. Es schien mir sogleich auffällig, daß relativ nahe dem Meer und in einer Gegend mit nur halb wüstenartigem Charakter eine so hohe Temperatur vorgekommen sein sollte. Ein Vergleich mit den übrigen tripolitanischen Stationen in der Veröffentlichung des »R. Ufficio Agrario, Sezione Meteorologica« (Nr. 4, 5) zeigte auch, daß die Angabe um rund 10° höher ist als die am gleichen Tage bzw. am Tage vorher an anderen Stationen abgelesenen Maxima: Tripolis 45.9°, Sidri Mesri 44.0°, Homs 44.5°, Zuana Marina 47.4°. Auch im Jahre 1923, in dem die genannte Veröffentlichung für Azizia als Maximum 57.3° verzeichnet, haben alle übrigen Stationen, deren Zahl auf neun gestiegen ist, Maximaltemperaturen, die 10 oder mehr Grad niedriger sind. Andererseits erscheint es auffällig, da die in Azizia beobachteten Minima niedriger sind als die der übrigen Stationen. Ich möchte daher glauben, daß mangelhafter Schutz gegen Ein- und Ausstrahlung vorliegt oder daß sich die Thermometeraufstellung in einer Bodensenke befindet.

Nicht geringeren Schwierigkeiten begegnet eine zuverlässige Angabe über die niedrigste bisher beobachtete Lufttemperatur. Das Quecksilber wird bei — 39.5° fest, und das alsdann an Stelle des Quecksilberthermometers gebrauchte Alkoholthermometer (bzw. neuerdings Toluolthermometer) ist aus mancherlei Gründen, auf die ich hier nicht einzugehen brauche, nicht so genau wie das Quecksilberthermometer.

Lange Zeit galt als niedrigste Temperatur die vom Kaufmann Nemérov am 21. Januar 1838 in Jakutsk gemachte Ablesung von — 48° R = — 60° C, die aber nach von Middendorff nur als »annähernd« betrachtet werden darf (vgl. Sibirische Reise, Bd. IV T. 1 3. Lfg.: Klima 1861, 4°, S. 343 ff.). Auf keiner Polarexpedition ist eine so niedrige Temperatur beobachtet worden; das tiefste Minimum war — 58.8° in Floeberg Beach (82° 27′ N., 61° 22′ W.), — 57.1° in der bereits genannten Lady-Franklin-Bai und — 57.8° in der bemerkenswert niedrigen Breite von Fort Confidence (66° 40′ N., 119° W.). Auf einer Schlittenreise zwischen Kap Evans und Kap Crozier (76° S., 168° W.) wurde auf der antarktischen Eisbarriere einmal — 76° F = — 59.9° C beobachtet (vgl. das oben genannte Werk von Simpson S. 8). Seitdem aber zu Ende der siebziger Jahre der sibirische Kältepol von Werchojansk bekannt geworden ist, sind wiederholt tiefere Temperaturen zur Ablesung gekommen. An diesem Ort beträgt bereits das mittlere Jahresminimum — 62.2°, und das im Januar 1892 festgestellte absolute war — 67.8°. Eine ähnlich tiefe Ablesung am Weingeistthermometer war die vom 3. (15.) Januar 1885, näm-

lich —68°, die nach H. WILD auf das Luftthermometer reduziert sogar einer Temperatur von —76° entsprechen würde (H. WILD, Temperatur-Minimum in Werchojansk im Winter 1884 auf 1885, in Mélanges phys. et chim., Acad. des sciences, St. Pétersbourg, Tome XII pag. 349—350; Met. Zeitschr. 1886, 178). Für Marinskoe, 2 Bogenminuten nördlich von Jakutsk, wird ein Minimum von —65° angegeben (HANN, Klimatologie III, 641), woraus hervorgeht, daß die erwähnte Beobachtung von NEMÉROV im Jahre 1838 doch richtig gewesen sein kann.

Vergleicht man miteinander die äußeren Bedingungen, unter denen die größten Temperaturextreme, die höchste und die niedrigste Lufttemperatur, vorgekommen sind, so erkennt man, daß in beiden Fällen eine sehr ähnliche orographische Beschaffenheit der Terrains vorhanden war: die Bodensenke des Todestales, in die wie in einen Hohlspiegel die Sonne hineinbrennt, und das eingeschnittene Tal der Jana, in dem sich die durch Ausstrahlung erkaltete Luft ansammelt, also beidemal konkave Formen der Erdoberfläche.

Luftfeuchtigkeit. Bei der großen Unsicherheit der hygrometrischen Methoden und der wahrscheinlich infolgedessen zurückgebliebenen Bearbeitung der Feuchtigkeitsbeobachtungen lassen sich nur ungefähre Angaben über die Extreme der absoluten und der relativen Feuchtigkeit auf der Erde machen. Es ist für den Stand der Frage sehr bezeichnend, daß MOHN, der in der ersten Auflage seiner »Grundzüge der Meteorologie« (Berlin 1875) auf zwei Tafeln zu S. 84 Karten der Verteilung des »Dunstdrucks« im Januar und im Juli gegeben hatte, sie von der dritten Auflage (1883) ab »als minder zuverlässig« wieder wegließ.

Das höchste Jahresmittel des Dampfdrucks wird in tropischen Gewässern zu suchen sein, wo bei hoher Temperatur des Meerwassers und der Luft sowie bei genügender Ventilation eine starke Verdunstung stattfindet. Das wäre im Indischen Ozean, namentlich im Bereich des Inselarchipels, der Fall. Das höchste Jahresmittel dürfte 25 bis 26 mm betragen. Port Blair auf den Andamanen im südöstlichen Teil des Bengalischen Meerbusens (11° 40′ S.) hat einen Jahreswert von 24 2 mm.

Da der Wasserdampfgehalt der Atmosphäre mit sinkender Temperatur abnimmt, wird der niedrigste Dampfdruck in den kältesten Gegenden anzutreffen sein. In der Tat hat Framheim nicht nur die niedrigste Jahrestemperatur, sondern auch den kleinsten Wert der absoluten Feuchtigkeit im Jahresmittel aufzuweisen. Interpoliert man nämlich die beiden fehlenden Monate Februar und März 1911, so erhält man als wahrscheinlichstes Jahresmittel 0.9 mm, während der August das niedrigste Monatsmittel mit 0.1 und der Dezember das höchste mit 2.4 mm hat (vgl. H. MOHN, Roald Amundsens Antarctic Expedition, Scientific Results, Meteorology. Kristiania 1915. 8°. S. 31). Das niedrigste Monatsmittel 0.1 mm findet sich nach dem russischen Klimaatlas auch bei Werchojansk und Jakutsk im Januar, also im Gebiet des sibirischen Kältepols.

Die relative Feuchtigkeit ist auf tropischen Meeren und an deren Küsten das ganze Jahr hindurch so groß, daß sich hohe Jahresmittel ergeben. Ich nenne Pará an der Mündung des Amazonenstromes mit 90 Prozent und

das regenreiche Debundja am Fuß des Kamerunberges, wo die Monatsmittel zwischen 88 und 93 Prozent schwanken. Aber auch in hohen südlichen Breiten gibt es Orte mit gleichmäßig großer Feuchtigkeit, wie auf der Insel Laurie (60° 44′ S., 44° 39′ W.), mit einem Jahresmittel von 90 Prozent und geringen Schwankungen, August 94 Prozent, Januar 87 Prozent. Auch auf der Macquerie-Insel (54° 45′ S., 159° E.) konnte die Australische Antarktische Expedition vier Monate hintereinander durchschnittlich 93 Prozent Feuchtigkeit feststellen. Noch höher sind die Jahresmittel auf Berggipfeln, die häufig in Wolken gehüllt sind, wie z. B. auf dem Ben Nevis (1343 m) in Schottland, 94 Prozent und dem 2877 m hohen Singgalang auf der Westseite von Sumatra, 93 Prozent (C. Braak, Het Klimaat van Nederlandsch Indië S. 349). Die größten langjährigen Monatsmittel betragen hier 96 bis 97 Prozent.

Die niedrigsten Jahresmittel der relativen Feuchtigkeit gehören den Wüstengebieten im Innern der Kontinente an und gehen bis unter 30 Prozent herab. Khartum am Nil (15° 38′ N., 370 m) hat nach der Monographie von L. J. Sutton, The climate of Khartum. Cairo 1923. 8°. ein Jahresmittel von 28 Prozent (April 13 Prozent, August 49 Prozent), Berber am Nil (18° N.) 29 Prozent, Wadi Halfa, gleichfalls am Nil (21° 55′ N., 130 m), 32 Prozent, Timbuktu am Niger 33 Prozent. Mitten in der Wüste, wo keine Oase und kein Gewässer vorhanden ist, werden die Jahresmittel sicher unter 30 Prozent bleiben.

Bewölkung. Dieses auf Schätzungen beruhende Klimaelement bietet naturgemäß bei Vergleichen einige Unsicherheiten dar, die auch bei extremen Werten sehr störend wirken können.

Die Gegend, wo der Himmel durchschnittlich am meisten mit Wolken bedeckt ist, liegt wahrscheinlich im europäischen Nordmeer und am Weißen Meer sowie im Südpolarmeer. O. V. Johansson hat für den unter dem nördlichen Polarkreise und am Ostrande der Halbinsel Kola liegenden Leuchtturm Sosnowez ein Jahresmittel von 8.8 und fast ebenso hohe Werte für einige Orte auf den Faeröer gefunden (Met. Zeitschr. 1911, 409). Die Monatsmittel von November und Dezember erreichen in Sosnowez den Wert 9.4. In hohen Breiten der Südhalbkugel werden wahrscheinlich ebenso trübe oder noch trübere Gegenden existieren. So nimmt G. Schott (Geographie des Atlantischen Ozeans. Hamburg 1912. 8°. S. 212, Tafel XXIII) im östlichen Teil des Weddell-Meeres ein Gebiet mit mehr als 9.0 mittlerer Bewölkung an. Er stützt sich dabei auf die Beobachtungen der »Valdivia«- und der »Scotia«-Expeditionen.

Die kleinste mittlere Bewölkung geht zwar nicht bis zur möglichen unteren Grenze (Null) herab, bleibt aber unter 1; denn für Assuan am oberen Nil wird sie mit 0.5 angegeben. In einzelnen Monaten ist sie hier und an andern Wüstenorten auch im Durchschnitt wirklich 0. Eine sehr geringe mittlere Bewölkung haben auch: Bahrein im Persischen Golf mit 0.8 (vgl. Schott, Ozeanographie und Klimatologie des Persischen Golfes und des Golfes von Oman) sowie Orte im indischen Wüstengebiet, wie Multan im Punjab mit 1.7, Quetta in Britisch-Beludschistan mit 1.9, ferner Yuma in der nordamerikanischen Gila-Wüste mit 1.7.

Niederschlag. Als regenreichster Ort der Erde wird seit langem Cherrapunji in Indien angesehen, das eine mittlere Jahresmenge von rund 11000 bis 12000 mm hat. Es liegt auf dem 1250 m hohen Plateau der Khasi-Hills, die nordöstlich von Calcutta aus der Ebene von Bengalen steil aufragen und ganz im Luv des Südwestmonsuns liegen. Es sind also Steigungsregen, welche die große Menge bedingen. Das am Südfuße der Hügel gelegene Sylhet erhält bloß den dritten Teil (4033 mm) und das auf der Nordseite, also im Regenschatten liegende Shillong sogar nur 2057 mm. Man weiß auch seit mehreren Jahrzehnten, daß der Betrag der Regenmenge in Cherrapunji mit dem Aufstellungsort des Regenmessers auf dem Plateau stark wechselt. H. F. Blanford hat im Quart. Journ. R. Meteorol. Soc. XVII, 1891 S. 146—154 einen ausführlichen Bericht mit Lageplan über diese Verschiedenheiten des Regenfalls gegeben und viele interessante Einzelheiten über exzessive Monats- und Tagesmengen mitgeteilt. Vor kurzem wurden von G. T. Walker neue Mittelwerte aus den Beobachtungen in den Jahren 1878—1920 veröffentlicht, an die ich mich hier halten werde (Monthly and annual normals of rainfall and of rainy days from records up to 1920. Mem. Indian Meteorol. Department, vol. XXIII, part. VII. Calcutta 1924. Fol.).

Die den folgenden Stationsnamen in Klammern beigefügten Zahlen bedeuten die Anzahl der Beobachtungsjahre.

Jährlicher Regenfall in Cherrapunji:

Polizeistation (49)	10867 mm	158.5 Tage
Walliser Missionshaus (18)	11219 »	162.4 »
Shadwells Haus (12)	11421 »	162.1 »
Röm.-Kathol. Missionshaus (11)	9690 »	162.9 »

Weiterhin wird aber in derselben Gruppe von Stationen in den »Khasi and Jaintia-Hills« für die Station Manoyuram (5), die, nach den beigefügten Bezeichnungen zu urteilen, inzwischen eingegangen ist und über 3500 feet (1067 m) hoch liegt, ein alle vorhergehenden und nachfolgenden übertreffender Wert angegeben, nämlich 12665 mm. Etwas Näheres über die Lage dieser Station wird nicht mitgeteilt, auch habe ich sie auf Karten nicht auffinden können. Es wäre möglich, daß unter den 5 Beobachtungsjahren, aus denen das Mittel gebildet ist, einige besonders nasse waren; denn auch in Cherrapunji unterliegt der jährliche Regenfall sehr erheblichen Schwankungen.

Dieses erstaunlich hohe Jahresmittel der Regenmenge in Indien wird fast erreicht auf einer Station, die auf Kauai, der nördlichsten Insel der Hawaigruppe, liegt. Bei der neuen geologischen Aufnahme dieser Inseln hat man die gute Idee gehabt, auf dem Gipfel (1547 m) des vulkanischen Berges Waialeale, der fast die ganze kleine Insel Kauai einnimmt, einen Regenmesser aufzustellen, an dem regelmäßige Messungen ausgeführt wurden. Die ersten 5 Jahrgänge ergaben einen Mittelwert von 12090 mm[1] (Monthly Weather Re-

[1] Ortsnamen mit der Anfangs- bzw. Stammsilbe Wai kommen auf den Hawaiischen Inseln wiederholt vor; wie die Karte Nr. 81 in Stielers Handatlas erkennen läßt, besonders häufig auf den Nord- und Nordostseiten, also in Lagen, die dem Regen bringenden Nordostpassat ausgesetzt sind. Es lag daher die Vermutung nahe, daß Wai etwas mit Wasser zu tun hat oder

view, vol. 47, 305—308). Es sind außerdem noch folgende Einzelsummen bekannt geworden: 21. Mai 1915 bis 30. Mai 1916 14249 mm, Jahr 1922 11481 mm (ebenda, vol. 51, 141). Auch diese Regen sind Geländeregen, die der Nordostpassat beim Aufsteigen auf die ganz frei gelegene Insel erzeugt.

Die mehr in der Mitte der Inselgruppe befindliche Insel Maui, mit einem Vulkanberge von 3058 m Höhe, erhält gleichfalls große Regenmengen. An der angeführten amerikanischen Quelle wird eine Station Puu Kukui mit 9372 mm mittlerem Regenfall und sogar mit 14275 mm im Jahre 1918 genannt. Cherrapunji soll im Jahre 1854 als größte Jahressumme 15011 mm gehabt haben, doch wird diese Zahl von Blanford mit einem Fragezeichen versehen.

Eine dritte Stelle auf der Erde mit ungewöhnlich großem Regenfall ist der Westfuß des Kamerunpiks am Golf von Guinea. Die nur 5 m über dem Meeresspiegel liegenden Pflanzungen Debundja und Bibundi, die durch die Fürsorge A. v. Danckelmans frühzeitig von der deutschen Kolonialverwaltung mit Regenmessern (darunter auch einem selbstregistrierenden) versehen wurden, haben nach 11- bzw. 8½jährigen Beobachtungen eine mittlere Jahresmenge von 10469 mm bzw. 10242 mm, oder Bibundi, nach Maurer auf Debundja reduziert, sogar 11050 mm (Hann, Klimatologie II 71). Zieht man in Betracht, daß diese Mengen fast im Meeresspiegel gemessen worden sind und daß in größerer Höhe am Abhang des Kamerunberges noch viel mehr Regen fallen bzw. eine Zone maximalen Regenfalls existieren muß, so kommt man zu dem Schluß, daß die regenreichste Gegend der Erde der Westabhang des Kamerunberges ist.

Welcher ist der niederschlagsärmste Ort der Erde? Zunächst kann man fragen: gibt es einen Ort ohne jeden Niederschlag? Ich glaube nicht. Auch in den trockensten Wüstengebieten kommt es gelegentlich einmal zum regnen; und die von den »ältesten« Eingeborenen oftmals gemachte Aussage, daß es an ihrem Ort noch nie geregnet habe, ist häufig genug durch wissenschaftliche Reisende widerlegt worden. Die mittlere Jahresmenge des Regens wird also nirgends Null sein. Es gibt aber sicherlich Orte, an denen in einzelnen Jahren oder sogar in mehreren Jahren hintereinander keine meßbaren Niederschläge fallen. An den trockenen Küsten von Chile und Peru, im ehemaligen Deutsch-Südwestafrika, in Oberägypten, in Australien sind solche Fälle wiederholt festgestellt worden. Früher galt das Nilgebiet bei und oberhalb Assuan als ganz regenlos, seitdem es aber in Ägypten einen geordneten meteorologischen Beobachtungsdienst gibt, sind kleine Regenfälle daselbst mehrfach konstatiert worden. So gab es in Wadi Halfa (21° 55′ N.) im Jahrzent 1891—1900 keinen meßbaren Niederschlag, Regentropfen aber wurden während dieser zehn Jahre im ganzen an 22 Tagen beobachtet, 1895 und 1898 auch nicht einmal diese. Es wird aber hinzugefügt: in der angrenzenden Wüste gibt es in langen Zwischenräumen schwere Regenstürme

---

es direkt bedeutet. Ich fand das auch wirklich bestätigt in dem Werk von A. Krämer, Hawaii, Ostmikronesien und Samoa (Stuttgart 1906. 8°), in dem auf S. 84 Waialeale als »sprudelndes Wasser« übersetzt wird. Nachträglich sehe ich, daß auch das Dictionary of the Hawaiian language von L. Andrews (Honolulu 1865. 8°) eine derartige Deutung bzw. die Übersetzung »wogendes Wasser« rechtfertigt.

(Met. Zeitschrift 1904, 285). Vor einigen Jahren berichteten die Tageszeitungen von einem ungewöhnlich starken Regenfall in Assuan, der die leichtgebauten Häuser der Eingebornen arg beschädigte bzw. ganz zerstörte. Ebenso wissen wir, daß solche Regengüsse bald hier, bald da in der Wüste Sahara sowie in den Wüstengebieten von Amerika und Australien vorkommen. Messungen liegen allerdings höchst selten vor, aber die vom Wasser ins Erdreich gerissenen Wadis und Barrancos sind die besten Beweise für das Vorkommen solcher Regengüsse. Wie bei uns in trockenen Gegenden starke Regenfälle in kurzer Zeit relativ häufig auftreten, so kommen auch in den Wüsten gelegentlich Überschwemmungen vor, die durch exzessive Regenfälle hervorgerufen werden (vgl. Petermanns Mitt. 1899 S. 174 und für die südamerikanischen Wüsten das Buch von B. Vicuña Mackenna, Ensayo historico sobre el clima de Chile desde los tiempos prehistoricos hasta el gran temporal de Julio de 1877. Valparaiso 1877. 8°. XI, 490 S.).

Die kleinsten mittleren Jahresmengen des Regens, die durch wirkliche Messungen ermittelt wurden, sind: in Chile 5 mm in Iquique (20° 2′ S.), 6 mm in Antofagasta (23° 6′ S.), 21 mm in Caldera (27° S.), im ehemaligen Deutsch-Südwestafrika 10 mm in Walfischbai.

Die größte mittlere Monatsmenge des Regenfalls gehört dem obengenannten indischen Ort Manoyuram an, wo im Juli durchschnittlich 2852 mm fallen. Die kleinste mittlere Monatsmenge ist natürlich 0, die an vielen Orten, die ich hier nicht zu nennen brauche, vorkommt.

Bei der sehr verschieden gehandhabten Zählungsweise der Niederschlagstage, nämlich ohne jede untere Grenze, mit der unteren Grenze 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 1.0 und sogar 2.5 mm (0.1 inch, wie z. B. in Indien), ist ein strenger Vergleich der Zahl der Tage mit Niederschlag an verschiedenen Orten ganz unmöglich.

Eine ungewöhnlich große Regenhäufigkeit herrscht jedenfalls auf der schon genannten Insel Jaluit in der Gruppe des Marschallinseln. Nach den von deutschen Kolonialbeamten gemachten Beobachtungen gab es daselbst

	Tage mit	
	Regen überhaupt	mehr als 1 mm
1893	343	274
1894	335	268
1895	329	253
Mittel	336	265

Die absolute Regenwahrscheinlichkeit auf Jaluit ist also 0.92, die anderswo wohl kaum übertroffen werden wird. Aber eine ähnlich große Regenhäufigkeit kommt noch einmal im Stillen Ozean vor, jedoch in höherer südlicher Breite. Die nahe dem Westeingang der Magellanstraße liegende Islote de los Evanjelistas, ein ödes Inselchen von 53 m Höhe, zählt nämlich durchschnittlich 317 Tage mit meßbarem Niederschlag im Jahre. Beim Leuchtturm dieser Insel besteht eine meteorologische Station, von der im Anuario del Servicio Meteorologico de Chile für die 11 Jahre 1899—1909 die dreimal täglich angestellten Beobachtungen in extenso veröffentlicht sind, während später der meteorologische Dienst von Chile noch die Beobachtungen von 1912 und 1913

bekanntgegeben hat. In den einzelnen Jahren war die Zahl der Tage mit meßbarem Niederschlag:

1899.. 305	1904.. 315	1909.. 316
1900.. 285	1905.. 332	1910.. ?
1901.. 308	1906.. 332	1911.. ?
1902.. 314	1907.. 308	1912.. 329
1903.. 332	1908.. 326	1913.. 323

Die meisten Niederschlagstage hat durchschnittlich der März mit 28.2 und der Dezember mit 28.0, die wenigsten der August mit 23.8. Wiederholt ist es vorgekommen, daß an allen Tagen eines Monats meßbare Niederschläge fielen. Die längste Regenperiode dauerte 121 Tage, nämlich 1908 April 30, Mai 30, Juni 30, Juli 31 Tage. Unter 16 ist die Zahl der Niederschlagstage eines Monats in dem 13jährigen Zeitraum nicht herabgegangen.

Die Niederschläge erfolgen auf Evanjelistas in der Form von »chubascos«, d. h. mit starkem Wind verbunden, was bei dem höchst unruhigen Wetter um die Südspitze von Südamerika verständlich ist. Wahrscheinlich haben noch andere exponierte Stellen an den südlichen Küsten von Chile dieselbe oder gar eine noch größere Niederschlagshäufigkeit. W. Knoche nennt z. B. in der Met. Zeitschr. 1912, 540 das nördlich von Evanjelistas gelegene Kap Raper als sehr niederschlagsreich, und ich finde im chilenischen meteorologischen Jahrbuch für 1913, daß das südlich gelegene Kap Felix (52° 57′ S.) in den Monaten Juni bis September, für die Angaben gemacht werden, die allergrößten Mengen erhielt.

Orte mit mehr als 300 Niederschlagstagen sind, allerdings nur nach kurzen Beobachtungsreihen beurteilt, Südgeorgien (301 Tage), Kerguelen (303), Orangebai bei Kap Horn (306), also alles Orte in höheren südlichen Breiten. Eine auffällig große Regenhäufigkeit in niederen Breiten findet sich auf einigen westindischen Inseln, wie St. Vincent, Martinique und Trinidad, und an der Ostküste von Mittelamerika: Porto Bello auf Panama — in Stielers Handatlas »Puerto Belo« — dürfte 310 und Bluefield an der Ostküste von Nicaragua rund 300 Regentage haben. Alle westindischen Orte mit 300 oder mehr Regentagen liegen im Luv des Nordostpassates, der hier eine mehr östliche Richtung hat.

Über Gegenden ohne jeden Niederschlag im Jahre habe ich schon oben gesprochen, dagegen ist über die größte Zahl von Niederschlagstagen in einem Monat noch einiges zu sagen. Diese kann in Gegenden mit einer stark ausgesprochenen Regenzeit das größtmögliche Maximum, nämlich 30 bzw. 31, ganz oder nahezu erreichen. So führt die obenerwähnte Veröffentlichung von Walker über den Regen in Indien einige Orte an, bei denen im Juli bzw. im August, wenn die Regenfälle des Südwestmonsuns ihre Höhe erreicht haben, die mittlere Zahl der Regentage zwischen 30 und 31 liegt; z. B. auf S. 250 der Publikation in Birma, Distrikt Tounga, Thandaung Juli 30.2, August 30.2 Tage; S. 348 in Bombay, Distrikt Satara, Malcolmpeth Juli 30.0, August 29.8 Tage; auf S. 406, 409 verschiedene Orte an der Malabarküste mit 29 Tagen im Juli. Dabei ist zu bedenken, daß im indischen Beobachtungsnetz als Regentag nur ein solcher gezählt wird, an dem min-

destens 0.1 inch = 2.5 mm gefallen ist. Wäre die untere Grenze, wie bei uns, 0.1 mm, dann würde die mittlere Zahl von 30 bzw. 31 Regentagen in einem Monat sehr viel häufiger vorkommen.

Natürlich gibt es auch in andern Gegenden mit streng periodischem Regenfall Monate mit durchschnittlich 30 bis 31 Regentagen; so in Baliburg (Kamerun), Adis Abeba (Abessinien), Baguio (Philippinen), Nossi-Bé (Madagaskar) usw.

Ungewöhnlich viel **Gewitter** hat Abessinien, wo zwischen 7° und 14° n. Br. durchschnittlich 214 Tage mit Gewitter im Jahre nach A. D'ABBADIE gezählt werden; vgl. die oben bei der Temperatur genannte Schrift des Verfassers S. 165 ff. und seine Monographie »Sur le Tonnerre en Éthiopie« (Paris 1858, 4°, S. 19 ff.). Diese Zahl bezieht sich aber auf einen Raum von 7 Breitengraden Erstreckung und läßt nicht erkennen, wieviel Gewitter an einem Ort vorkommen. Andere gewitterreiche Orte sind: Entebbe am Nordufer des Victoria-Nyanza in Ostafrika (200 Gewittertage), Baliburg im Kamerungebiet (5° 53′ N., 10° 2′ E., 1340 m) (212 Tage), Salaga (8° 32′ N., 0° 11′ W., 170 m) (188 Tage), Yaúnde, östlich vom Kamerunberg (3° 49′ N., 11° 38′ E., 750 m) (165 Tage) usw.

Ob freilich diese Häufigkeitszahlen untereinander wirklich vergleichbar sind, lasse ich dahingestellt; denn die Auffassung der Gewitter und der Gewittertage ist ja immer noch schwankend, und in der Zeit, in der die diesen Ergebnissen zugrunde liegenden Beobachtungen gemacht wurden, sicherlich sehr ungleich gewesen.

Die Gewitter fehlen ganz in den beiden Polarkappen, und zwar in der Arktis jenseits 70 bis 80° Breite, in der Antarktis jenseits 55 bis 60° (vgl. N. KALLIO, Die Erstreckung des Gewitters nach dem Nord- und Südpol. Soc. Scient. Fennica. Comment. phys.-math. II 10, 1924).

Wind. Bei der Windrichtung handelt es sich um die Feststellung der Gegensätze: größte Beständigkeit und häufigster Wechsel.

Die Gegenden mit der beständigsten Windrichtung sind offenbar die von den Passatwinden überwehten Meere. Genauere zahlenmäßige Angaben darüber liegen vom Südostpassat des Atlantischen Ozeans vor, der von HANN an der Hand der Beobachtungen auf den in ihm gelegenen Inseln Fernando de Noronha (3° 50′ S., 32° 25′ W.) und Ascension (7° 55′ S., 14° 25′ W.) näher untersucht worden ist (Meteorologie von Fernando de Noronha, einer kleinen ozeanischen äquatorialen Insel. Sitzungsber. d. Wiener Ak., math.-natwiss. Cl. CXXIII Abt. IIa, Juni 1914). Die nach der LAMBERTschen Formel berechnete mittlere Windrichtung ist für Fernando de Noronha im Jahresdurchschnitt E. 33° S., für Ascension E. 39° S.; sie schwankt in den zwölf Monatsmitteln nur um 13° bzw. 8°. Dabei ist zu beachten, daß auf dem offenen Ozean die Richtung des Südostpassats vielleicht noch beständiger ist, weil die Inseln möglicherweise eine kleine, mit der Jahreszeit wechselnde Störung in der Richtung des Windes hervorrufen.

Die häufigsten Windrichtungswechsel werden da stattfinden, wo am häufigsten barometrische Depressionen vorbeiziehen. Eine die ganze Erde umfassende Statistik darüber gibt es nicht, so daß eine auf Zahlen sich stützende

Angabe unterbleiben muß. Der Nordatlantische Ozean südwestlich von Island, der nördliche Teil der Vereinigten Staaten von Nordamerika (Grenzgebiet von Kanada), die Gewässer um Kap Horn und ostwärts zum Südatlantischen Ozean gehören offenbar zu diesen Gebieten. Früher, als man das Dovesche Winddrehungsgesetz zu begründen suchte, berechnete man für manche Orte die Häufigkeit der Winddrehungen, doch sind das nicht gerade Orte, die eine besonders große Zahl von solchen Drehungen haben; sie kommen daher hier nicht in Betracht.

Genügend sicher vergleichbare Angaben über die mittlere Stärke oder Geschwindigkeit des Windes an verschiedenen Orten aller Festländer fehlen fast ganz, da die Art der Aufstellung, insbesondere die Höhe der Instrumente über dem Boden, von Station zu Station zu stark wechselt. Es gibt aber eine Gegend auf der Erde, deren Windverhältnisse so ungewöhnliche sind und von den uns bekannten so stark abweichen, daß wir wohl unbedenklich sagen können, das ist die windigste Gegend der Erde. Ich meine die Commonwealthbai in Adelieland am Rande des antarktischen Kontinents (67° S., 42° 40′ E.), die von dem Leiter der australischen Südpolarexpedition (1911—1914) Sir Douglas Mawson den Namen »the home of the blizzard« erhalten hat. »Of one thing we were certain, and that was, that Adelieland was the windiest place in the world«, heißt es auf S. 156 des zweiten Bandes des Reiseberichtes. Die mittlere Windgeschwindigkeit betrug im ersten Jahr (1912/13) 22.3 mps, einzelne Tagesmittel erreichten 44 mps und einzelne Windstöße 90 mps. Das letztere war z. B. am 22. Mai der Fall bei einer Temperatur von —33.3°, so daß die Bemerkung gerechtfertigt ist: »Still air and low temperature, or high winds and moderate temperature, are well enough, but the combination of high winds and low temperature is difficult to bear.«

Eine eingehende wissenschaftliche Bearbeitung der offenbar höchst interessanten und unter schwierigen Verhältnissen gemachten meteorologischen Beobachtungen dieser Expedition ist meines Wissens noch nicht erschienen, man ist vorerst auf die kurzen Angaben im Reisebericht angewiesen: The Home of the Blizzard. Being the Story of the Australian Antarctic Expedition, 1911—1914. By Sir Douglas Mawson. London (1915), 8°, 2 Bde.

Die windstillste Gegend der Erde dürfte im Innern eines Kontinents, und zwar im Windschatten von Bergen liegen.

Zum Schluß lasse ich eine Gegenüberstellung der im vorstehenden nachgewiesenen Grenzwerte folgen:

	Maximum	Minimum
Jahresmittel der Temperatur	30.2°	— 25.8° (— 32°)
Monatsmittel der Temperatur	38.9°	— 51.2°
Mittlere Jahresschwankung der Temperatur	66.3°	0.4°
Mittlere jährliche Tagesschwankung der Temperatur	22.8°	0.5°
Absolute Temperaturextreme	56°	— 68°
Jahresmittel des Dampfdrucks	25 mm	0.9 mm
Monatsmittel des Dampfdrucks	28 »	0.1 »
Jahresmittel der relativen Feuchtigkeit	90 Prozent	28 Prozent
Monatsmittel der relativen Feuchtigkeit	95 »	13 »
Jahresmittel der Bewölkung (Skala 0.10)	9.0	0.5
Monatsmittel der Bewölkung (Skala 0.10)	9.4	0.0

	Maximum	Minimum
Mittlere jährliche Niederschlagshöhe	12665 mm	< 1 mm
Mittlere monatliche Niederschlagshöhe	2852 »	0 »
Mittlere Zahl der Niederschlagstage im Jahre	336	< 1
Mittlere Zahl der Niederschlagstage im Monat	30 (31)	0
Mittlere Zahl der Gewittertage im Jahre	214	0

Es wäre interessant, noch festzustellen, innerhalb welcher Grenzen diese größten und kleinsten Mittelwerte — nur die Rubrik »Temperaturextreme« enthält Einzelwerte — schwanken können. Einiges ist darüber im vorstehenden bereits gesagt worden, aber zur allgemeinen Beantwortung der Frage reicht das vorhandene Beobachtungsmaterial nicht aus bzw. liegt nicht in dazu geeigneter Form veröffentlicht vor.

Überblickt man zum Schluß die hier aufgestellten Grenzwerte der Klimaelemente und die Verhältnisse, unter denen sie auftreten, so erkennt man, daß sie zwar alle übrigen Werte übertreffen, aber doch nicht so vereinzelt dastehen, daß zwischen ihnen und den nächstfolgenden Werten ein großer Abstand wäre. Bei den niedrigsten Jahrestemperaturen könnte es so scheinen, aber es ist zu bedenken, daß aus dem antarktischen Gebiet noch viel zu wenig wirkliche Beobachtungen vorliegen. Auch da werden Übergänge von —26 zu —32 oder noch tieferen Graden vorhanden sein.

Sodann geht aus dem Vorhergehenden zur Genüge hervor, daß sich weder Ort noch Betrag der Grenzwerte theoretisch voraussehen und vorausbestimmen lassen. Nur aus den Ergebnissen wirklicher Beobachtungen können sie abgeleitet werden, und darum müssen sie, wie ich bereits eingangs bemerkte, in Zukunft Änderungen erfahren, wenn die klimatische Erforschung der Erde weitere Fortschritte gemacht haben wird.

Ausgegeben am 21. April.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1925 XII. XIII

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

Library of Congress
AUG 27 1925
Smithsonian Deposit

BERLIN 1925

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang einer aufzunehmenden Mitteilung soll in der Regel in den Sitzungsberichten bei Mitgliedern 32, bei Nichtmitgliedern 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte, in den Abhandlungen 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Abhandlungen nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 200 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1925

XII. Gesamtsitzung. 2. April.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Bieberbach sprach über »Die Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie im 19. Jahrhundert«. (Ersch. später.)

Neben der Darlegung dieser Entwicklung seit Bolyai und Lobatschefskij und an Hand derselben wird von den Wandlungen berichtet, die der Wahrheitsbegriff innerhalb der Mathematik im Laufe der letzten 100 Jahre erfahren hat.

2. Hr. Penck sprach über den postglazialen Vulkan von Köfels im Ötztale.

Das von Pichler zuerst und neuerlich von Wilhelm Hammer beschriebene Bimssteinvorkommen von Köfels liegt am Boden eines großen Sprengtrichters am linken Gehänge des Ötztales. Der Wall des Maurach, welcher letzteres quert, ist das abgesprengte Material, das aus großen zerrütteten Gesteinsschollen und losen Blöcken besteht. Das Maurach ist postglazial und liegt nicht weit von der Stelle, wo die Endmoränen des Gschnitzstadiums zu mutmaßen sind. Die Explosion kann deswegen höchstens so alt wie letzteres sein und hat frühestens vor 10000 Jahren stattgefunden.

3. Die Akademie hat zu wissenschaftlichen Zwecken bewilligt:
durch ihre philosophisch-historische Klasse:

1500 *RM* zur Fortsetzung der wissenschaftlichen Arbeiten Prof. Sthamers über die Register Friedrichs II. und der Anjous und zur Drucklegung des 2. Bandes seines Werkes »Dokumente zur Geschichte der Kastellbauten Kaiser Friedrichs II. und Karls I. von Anjou«,
3000 *RM* als Beitrag der Akademie zu den Kosten der Preußischen Kommission (für 1925),
3000 *RM* für die Herausgabe der Briefe Berthold Georg Niebuhrs,
1800 *RM* zur Fortsetzung des Ägyptischen Wörterbuches,
600 *RM* für die Herstellung der Tafeln zu der von Prof. Lüders bearbeiteten Ausgabe des Kalpasâmaṇḍitikā;

durch ihre physikalisch-mathematische Klasse:

2000 *RM* zur Fortführung des Unternehmens »Das Tierreich«,
2000 *RM* als Zuschuß für eine Forschungsreise des Professors Penck nach Südamerika.

Die Akademie hat die korrespondierenden Mitglieder ihrer physikalisch-mathematischen Klasse HH. Viktor Ebner-Rofenstein in Wien am 20. März und Carl Neumann in Leipzig am 27. März durch den Tod verloren.

Der postglaziale Vulkan von Köfels im Ötztale.

Von Albrecht Penck.

Mitte des vorigen Jahrhunderts kamen durch den Kuraten Trientl zu Köfels im Ötztale von dort Stücke eines schlackigen porösen Gesteins an das Museum zu Innsbruck, das die Tischler wie Bimsstein gebrauchten. 1863 hat Adolf Pichler[1] das Vorkommen untersucht und beschrieben. Es liegt an der linken Seite des Ötztales auf der Terrasse, welche sich neben der Maurachschlucht erstreckt. Hier finden sich einzelne Bimssteinbrocken zwischen dem groben Blockwerke des Maurach, und nördlich vom Weiler Köfels tritt ein Bimssteingang im festen Gesteine auf. Das Maurach ist ein mehr als 400 m hoher Wall, welcher die Talweitungen von Längenfeld und Umhausen scheidet. v. Sonklar[2] und Supan[3] deuteten ihn als Felsriegel, Löwl[4] hingegen als Endmoräne eines Ötztalgletschers; daß sich Moräne an seinem Aufbau beteiligt, hat auch Pichler angenommen. Aber Blaas[5] konnte keine ganz sicheren Glazialprodukte finden; er stellte in der Enge des Maurach anstehendes Gestein fest und fand Gründe für Annahme eines linksseitigen Bergsturzes. Aus den Geländeformen schloß ich auf einen großen Bergsturz und wies auf eine große Ausbruchnische an der linken Seite des Ötztales zwischen Wurzberg und Wenderkogl hin. Bimssteinfragmente habe ich bei meinem Besuche der Gegend (1884) nicht gefunden und deswegen zu den Angaben von Pichler über deren Vorkommen nicht Stellung genommen[6]. Eine einschlägige Notiz des Pfarrers Trientl[7] in einer Tageszeitung war mir nicht zugänglich.

Seither hat O. Ampferer das Vorkommen besichtigt und 1915 von der Wiener Akademie der Wissenschaften eine Subvention für dessen Erschließung erhalten[8]. Der Krieg hat sie vereitelt. Die Neuaufnahme des Blattes Ötztal führte den dermaligen Direktor der geologischen Bundesanstalt Wilhelm Hammer abermals auf das Problem. Er fand 1922 in der Gegend von Köfels Bims-

[1] Zur Geognosie Tirols. Jahrb. k. k. geol. Reichsanstalt XIII. 1863. S. 589. II. Die vulkanischen Reste von Köfels. S. 591. — Verhandlungen. S. 77.

[2] Die Ötztaler Gebirgsgruppe. Gotha 1861. S. 28.

[3] Studien über Talbildung. Mitteilungen k. k. geographische Gesellschaft Wien 1877. S. 348.

[4] Über den Terrassenbau der Alpentäler. Petermanns Mitteilungen 1882. S. 132, 142.

[5] Notizen über diluvio-glaziale Ablagerungen im Inntale. Bericht d. naturw.-mediz. Vereins Innsbruck 1890—1891. S. 34 d. Sonderabdrucks. Vgl. auch Blaas, Geologischer Führer durch die Tiroler und Vorarlberger Alpen. Innsbruck 1902. S. 438.

[6] Penck und Brückner, Die Alpen im Eiszeitalter. Leipzig 1908. (1902) S. 296.

[7] Tiroler Landeszeitung. 1895. Nr. 50, S. 6.

[8] Anzeiger d. k. Akademie d. Wissensch. Wien, math.-naturw. Kl. 52. 1915. S. 29.

steinlava[1], wovon sich auch G. Geyer vergewisserte, und erhielt 1923 von der Akademie in Wien eine Unterstützung[2], um das Anstehende bloßlegen zu können. Darüber hat er 1924 berichtet[3].

Es war überaus dankenswert, daß anläßlich des Naturforschertages in Innsbruck Septemter 1924 Wilhelm Hammer eine Exkursion nach Köfels (unweit Umhausen) führte, um den bloßgelegten Bimssteingang zu zeigen; denn das Vorkommnis ist räumlich so beschränkt — es ist 10 m lang und 0.4 m breit — und liegt im Walde so versteckt, daß man es ohne Führung nicht zu finden vermöchte. Die nicht gerade große Zahl von Teilnehmern hatte gleich mir das Empfinden, daß nur durch die überaus sorgfältige Begehung des Geländes durch Hammer das wichtige Vorkommen neuerlich festgestellt werden konnte, wobei es sich aller Wahrscheinlichkeit nicht um denselben Gang handelt, den Pichler bereits bloßlegen ließ. Der Beschreibung der Örtlichkeit durch Hammer ist nichts hinzuzufügen als vielleicht der Wunsch, daß die für die Alpengeologie so hervorragend wichtige Stelle als Naturdenkmal geschützt werden möchte. Wird sie so häufig besucht, wie sie es verdiente, und nimmt jeder Besucher Bimssteinstücke mit, so wird der Vorrat binnen kurzem erschöpft sein.

Beim Besuche von Köfels drängte sich mir die Frage auf, welche Beziehungen zwischen dem Bimssteinvorkommen und dem Walle des Maurach bestehen. Um sie zu klären, trennte ich mich von der Exkursion, um das Gebiet neuerlich zu durchstreifen. Hr. Direktor Hammer förderte meine Absicht ganz wesentlich, indem er mir die Wege angab, welche die Möglichkeit zu erfolgreichen Beobachtungen gewährten. Er hat mir dann weiter eine Kopie seiner geologischen Aufnahme des Maurach zur Verfügung gestellt und gestattet, sie in der beiliegenden Karte zu verwerten. Dafür sowie für seine Führung und seine Rätschläge sei ihm auch hier auf das wärmste gedankt. Mein Vortrag über das Antlitz der Alpen auf dem Naturforschertage bot mir Gelegenheit, über die gewonnenen Ergebnisse kurz zu berichten[4].

Ob man von Norden her aus dem Umhausener Becken im Ötztale aufwärts blickt oder von Süden aus der Gegend von Längenfeld talabwärts schaut, beide Male sieht man einen Damm, der sich — vergl. unsere Karte — wie ein Fremdkörper quer über das Tal legt und nicht wie ein Ausläufer des einen oder andern Talgehänges erscheint. Das ist das Maurach, d. h. Blockwerk oder Steingerümpel. Im Osten schiebt es sich, bis auf beinahe 1700 m ansteigend, in das Tal von Niederthei des Hairlachbaches, dessen Hänge steil neben ihm ansteigen. In der Mitte senkt es sich im Tauferer Berge auf 1450 m herab. Hier durchbricht ihn die Ötztaler Ache in wilder Schlucht. Im Westen lehnt es sich als Terrasse von Köfels an das linke Gehänge des Ötztales, ebenso hoch ansteigend wie am Tauferer Berge. Diese Terrasse hat keinerlei Ähnlichkeit mit den Felsterrassen, die sonst im Ötztal, z. B. am Burgstein bei Längenfeld,

---

[1] G. Geyer. Jahresbericht f. 1922. Verh. geol. Bundesanstalt 1923. S. 10 u. S. 12.

[2] Anzeiger der Akademie d. Wissensch. Wien. 66. Math.-naturw. Kl. S. 168.

[3] Über das Vorkommen jungvulkanischer Gesteine im Ötztal (Tirol) und ihr Alter. Sitzungsberichte d. Akademie d. Wissensch. Wien. Math.-naturw. Kl., Abt. I. Bd. 132. 1923. S. 329.

[4] Das Antlitz der Alpen. Die Naturwissenschaften. XII. 1924. Heft 47.

Halden — Geschichtete Sande u. Schotter an den Flanken der Schlucht — Seebeckenfüllung in Niederthei
Moränen — Gneisblockwerk — Zerrütteter Maurach-Gneisgranit — Bimsstein-Gang und Blöcke
Wandungen des Sprengtrichters — × Diese große Schliffläche kann möglicherweise auch eine Felsgleitfläche sein.
0 200 400 600 800 1000 2000 3000 m

Der Vulkan von Köfels im Ötztale. 1 : 60000.
Die Wandungen des Sprengtrichters sind durch Bergschraffen hervorgehoben, das ausgesprengte Material des Maurach durch Ringel und Kreuzschraffen dargestellt.

auftreten. Da gibt es keine Rundhöcker, die sich in Schwärmen anordnen, sondern wir haben es ebenso wie auf dem Tauferer Berge mit Trümmerhaufen zu tun, die sich nicht an das Talgehänge anschließen, sondern von diesem durch eine flache Einsenkung getrennt sind. Nach Norden zu tritt der Rand der Terrasse bis an diese Einsenkung heran. Hier liegen an deren Saum die Häuser von Köfels. Nordöstlich von ihnen, dort wo die Terrasse sich auf die schmale Fläche des Naderberges am Fuße des Wenderkogls beschränkt, tritt mit leicht nach Norden von West abweichendem Streichen der Bimssteingang auf, und in seiner Nachbarschaft klafft weithin eine offene schmale Spalte. Das umgebende Gestein ist Gneisgranit, der auch das Material des Maurach liefert; ihm ist in der Nachbarschaft des Ganges eine Scholle von glimmerreichem Schiefergneis eingeschaltet.

Die Umgrenzung des Maurachwalles ist nach Norden, Osten und Süden eine sehr scharfe. Steil fällt der Tauferer Berg im Norden gegen die Tal-

weitung von Umhausen ab. Gleiches tut der Rücken des Wolfsecks gegen Osten; er streckt in das Tal von Niederthei mehrere Zungen vor. Vom rechten felsigen Ötztalgehänge ist er durch den tiefen Einschnitt des Hairlachbaches getrennt, der sich neben unserm Walle über festen, unzerrütteten Gneisgranit im Stuibenfalle 150 m tief herabstürzt und dann Stuibenbach heißt. Weiter südlich setzt sich der bis 1699 m ansteigende Wall scharf vom Fuße des Hämmererkogls ab. Der Weg von Niederthei über das Wiesle ins Ötztal gegen Au führt weiterhin an der Grenze entlang, im Osten fester Fels, im Westen zertrümmertes Gestein, dazwischen an einer Stelle ein Seelein, an einer andern die Wiesenfläche des Wiesle. Im Süden scharfes Absetzen des Maurach gegen den fast ebenen Boden des Ötztales unterhalb Längenfeld. Der Abfall erfolgt links der Ache in Absätzen, der obere liegt 1365 m, der untere 1236 m hoch, er wird vom oberen durch einen talartigen Einschnitt getrennt und fällt mit einem 50 m hohen Steilrande zur Talsohle ab. Ebenso grenzt der Saum des Maurach scharf ab gegen die unteren Partien des Wurzberges, und zwar in derselben Weise, wie es der Damm südlich von Wolfseck gegen den Abfall des Hämmererkogls tut. Im Westen ist das Gelände zwischen Wurzberg und Wenderkogls anders geformt als die gegenüberliegenden Seiten des Ötztales. Es fehlt hier die glaziale Rundung. Mit konkav bogenförmigem Verlaufe steigt es jähe an. Am Fuße erstrecken sich Schutthalden, wie man sie auf der Ostseite nirgends sieht. Diese losen schüttigen Halden begrenzen zwischen Köfels und Wurzberger Alp das Maurach.

Dieses hat in seiner ganzen Ausdehnung auffällige Formen. Es ist überschüttet mit grobem Blockwerk, zwischen dem sich die Waldwege vorsichtig durchwinden. So ist es zwischen Köfels und Pürsting, so auf dem Tauferer Berg zwischen Umhausen und Au. Namentlich gegen das Wiesle hin sieht man Riesenblöcke von 50 m Höhe auf dem Kopf stehen, dazwischen tiefe Löcher. Manche Blöcke zeigen auf einer Seite glaziale Rundung und erweisen sich als Trümmer einer zersprengten Rundhöckerlandschaft. Weiter gegen Norden am Wolfseck hingegen finden sich ausgedehntere Felspartien, wie Hammer richtig bemerkt, mit Rundhöckerformen. Aber diese Felspartien sind unzusammenhängend und von zahlreichen Rissen und Klüften durchsetzt, welche beim Durchsteigen zu großer Vorsicht nötigen. Blöcke und Gesteinspartien bestehen aus Gneisgranit, nur am Ostsaum des Maurach gegen das Tal von Niederthei und dem Hämmererkogl gesellen sich dazu einzelne gerundete Gerölle und Geschiebe mutmaßlich glazialen Ursprungs, wohl aufgeschürftes Material. Das ganze Maurach entbehrt des Wassers. Nirgends ist ein Quell oder ein Bach. Kiefern zeugen von trockenem Boden, der alles Wasser aufschluckt. Nur hier und da südlich vom Wolfseck liegen moosige Stellen in den Vertiefungen.

Die 400 m tiefe Schlucht der Ötztaler Ache gibt einen guten Einblick in den geologischen Aufbau des Maurach. An der linken Seite hat man sehr ausgedehnte Gesteinsausbisse, aber nirgends ist hier der Maurach-Gneisgranit fest, wie sonst an den Gehängen des Ötztales. Allenthalben ist er sehr klüftig und zerfällt leicht in große Scherben, die sich am Fuße der steilen Ausbisse in steilen Schutthalden sammeln. Auch an der rechten Seite der Schlucht finden

wir in der Nähe der beiden Brücken das gleiche klüftige Gestein, an einer Stelle hoch oben zwischen den beiden Brücken bedeckt von grusiger Grundmoräne mit einzelnen gut gekritzten Geschieben. Weiter gegen Norden aber wird die Flanke der Schlucht von dicht gelagertem Blockwerk gebildet, lauter eckige Trümmer, die allmählich aus dem Felsen hervorgehen. Eine scharfe Grenze ist nicht vorhanden. Rundhöckerformen fehlen allenthalben in der Schlucht. Nirgends sieht man Abwaschformen, wie man sie sonst in den Klammen und Schluchten der Zentralalpen so deutlich erkennen kann, nirgends stürzt sich die Ache über ein Felsenriff, sie schäumt lediglich zwischen großen Blöcken dahin. Sie quert ein gänzlich zerrüttetes Gestein. Und ebenso wie in der Schlucht das zerrüttete Gestein allmählich in großes Blockwerk übergeht, so ist es auch auf der Höhe des Wolfsecks sowie links der Ache beim Rechenstiel. Man ist vielfach ganz im unsichern, ob man noch auf Fels oder bereits auf Blockwerk steht. Die hochgradige Klüftigkeit des Gneisgranites beschränkt sich auf das Gebiet des Maurach und ist sonst dem Gestein nicht eigentümlich.

Die große Ausdehnung solcher zerrütteten Gesteinspartien schließt zwar nicht aus, daß der Damm des Maurach das Trümmerwerk eines bloßen Bergsturzes sei. Aber dagegen spricht die Tatsache, daß das Oststück des Maurach die größte Höhe erreicht, und daß gerade hier am Wolfseck die zusammenhängendsten Felspartien auftreten, während man sonst an der Stirn eines Bergsturzes einzelne Tomahaufen besonders weit gewanderten und zerkleinerten Schuttes antrifft. Nahe an seinem Ostende erhebt sich das Maurach auf 1699 m; man ist da 5 km vom oberen Rande der Nische am linken Talhange entfernt. Dieser erhebt sich hier an der niedersten Stelle des Schartle nur auf 2088 m, also kaum 400 m höher als die höchste und zugleich entfernteste Partie des Maurach. Letztere aber steigt 250 m über das Schutt- und Trümmergelände des Tauferer Berges und Hohen Büchels südöstlich von Köfels an. Die Nische westlich vom Maurach reicht durch den Scheidekamm zwischen Fundustal und Ötztal beinahe hindurch. Auf 1 km ist das Schartle an den Fundusbach herangerückt, und unschwer kann dessen Wasser hier über die Scheide hinweggeleitet werden, um die Wiesen von Köfels zu netzen. Sichtlich fehlt hier ein ganzes Kammstück von mehr als 1 km Breite. Für die Entstehung einer derartigen Nische fehlt jede Veranlassung, sobald man sie als Ausbruchstelle eines Bergsturzes ansehen will. Die benachbarten Hangpartien des Ötztales sind nirgends übersteil, und es liegt kein Anhalt dafür vor, daß sich gerade an Stelle unserer Nische ein übersteiles Stück erstreckt habe. Es fehlt jede Andeutung einer Unterschneidung durch den Fluß oder einen Gletscher. Auch knüpft sich die Nische nicht an eine Gesteinsgrenze, sie erstreckt sich senkrecht zum Streichen der Gneisgranitmasse quer durch diese hindurch. Weder die Bildung der Nische noch die Entstehung des Maurach mit seinen großen Felspartien können wir auf bloße Schwerewirkungen zurückführen. Wir müssen vielmehr annehmen, daß eine Nische in den Berg hineingesprengt worden ist, wobei dessen Material auf die andere Talseite nicht nur hinübergeschleudert, sondern auch in zusammenhängenden Partien herübergeschoben worden ist. Das Bimssteinvorkommen von Köfels liefert uns den Schlüssel für das Ver-

ständnis eines solchen Vorgangs. Wir haben in der Nische einen halben Explosionstrichter vor uns, entstanden bei der Eruption des Bimssteins. Das Maurach ist das zugehörige Trümmerfeld. Nach dieser Auffassung liegt in der Nähe von Köfels eine maarähnliche Bildung vor. Aber das Maar ist nicht eingesprengt in eine fast ebene Oberfläche, sondern in ein steiles Talgehänge. Hier liegt die eine Wandung des Maares in unserer Nische vor. Auf der Ostseite ist sie gänzlich abgesprengt worden und bildet den Trümmerhaufen des Maurach. Der hier befindliche zerrüttete Fels ist nicht anstehend, sondern hat in der Explosion gleichfalls eine Ortsveränderung erfahren. Die Experimente von W. Kranz[1] zeigen, wie solches bei Explosion von Fladderminen geschieht, und um den Explosionstrichter herum werden ganze Schollen nach auswärts und aufwärts verschoben. Dies konnte hier im Hochgebirge nur nach einer Seite hin erfolgen; einseitig, wie sich die Maarwandung erhalten hat, ist das Trümmerwerk in Bewegung gekommen und liegt heute als ein Damm fremdartig quer über das Tal.

In dieser Einseitigkeit liegt der Unterschied zwischen dem Sprengtrichter von Köfels und den Maaren der Eifel, deren Wandungen in der Regel wenigstens ringsum erhalten sind und überragt werden von dem ausgeworfenen Trümmerwerke. Letzteres ist allerdings reichlicher mit vulkanischem Material durchsetzt, als dies im Bereiche des Maurach der Fall ist, wo Bimssteinfunde lediglich auf der Terrasse von Köfels und nie auf dem Tauferer Berge gemacht worden sind. In bezug auf die Spärlichkeit an ausgeworfenem Material ist unser Sprengtrichter mit dem riesigen Explosionsloche des Nördlinger Rieses vergleichbar. Die von letzterem ausstrahlenden Schuttmassen bestehen größtenteils aus ausgesprengtem Material, welches eine weite horizontale Bewegung zurückgelegt hat, wie dies bei vulkanischen Schuttströmen ja nicht selten zu beobachten ist. Dabei ist der Untergrund in ähnlicher Weise geschrammt worden wie durch einen Gletscher, so daß der Gedanke entstehen konnte, hier lägen Moränen vor[2]. Derartige Schrammung des Untergrundes ist auch von vulkanischen Gasexplosionen bewirkt worden[3], von Bergstürzen ist sie mir nicht bekannt geworden. Diese Tatsache schon weckt Zweifel an der Annahme, daß die Trümmerströme von den Flanken eines seither in die Tiefe gesunkenen Lakkolithen wie Bergstürze abgelaufen seien. Eine neuere Bohrung im Riese hat dem gemutmaßten Lakkolithen die geologische Fundierung entzogen. Im Nördlinger Ries endlich haben wir auch eine weitgehende Zerrüttung des Felsen, die bekannte Vergrießung, entstanden bei der Verschiebung ganzer Schollen. Die Schuttströme des Rieses endlich passen sich auch der Oberflächengestalt des Landes an, nach Norden strahlt das Trümmerwerk in die Dogger- und Liaslandschaft hinein, die bei Entstehung des Rieses bereits von der Weißjuradecke befreit gewesen ist. Daß neben großen Schuttströmen auch

---

[1] Das Nördlinger Riesproblem II. Jahresber. u. Mitteil. d. oberrheinischen geologischen Vereins, N. F. II, H. 1, 1912, S. 54 (60).

[2] Dagegen wandte ich mich bereits 1884. Pseudoglaziale Erscheinungen. Das Ausland, 1884. S. 641—646.

[3] E. O. Hovey, Striations and U-shaped valleys produced by other than glacial action. Bull. Geolog. Soc. of America. XX. 1909. p. 409.

einzelne Blöcke beim Riese in die Luft geschleudert worden sind, habe ich bei meinen Aufnahmen auf der oberbayerischen Hochebene feststellen können, wobei ich in der weiteren Umgebung von Augsburg da und dort eckige Jurablöcke mitten in den tertiären Sanden fand. Sie können dahin nur durch die Luft gekommen sein[1].

Die gewaltige, durch die Explosion in Bewegung gesetzte Trümmermasse des Maurach hat sich quer vor das Tal von Niederthei gelegt und dort in rund 1560 m Höhe zeitweilig einen See aufgestaut, dessen sandige Sedimente seither von Schluchten zerschnitten worden sind. Fossilien habe ich in diesen lakustren Ablagerungen nicht gefunden. Dagegen läßt sich nicht nachweisen, daß der Trümmerwall im Ötztal einen See aufgestaut habe. Oberhalb von ihm hat das Tal allerdings einen sehr ebenen Talboden von rund 1150 m Höhe, der möglicherweise durch Verschüttung eines Sees entstanden ist. Aber der Spiegel dieses Sees wäre 300 m tiefer gelegen als der Tauferer Berg und der Hohe Büchel auf der anderen Seite der Ache. Über dem ebenen Talboden finden sich nirgends lakustre Terrassen oder deltaartige Aufschüttungen der Flüsse, und solche fehlen namentlich an der Mündung des Baches vom Sulztale bei Längenfeld. Da finden sich wohl hier und da Moränenreste in weniger als 1400 m Höhe, aber nirgends eine Andeutung eines Deltas. Es erscheint daher ausgeschlossen, daß durch Ablagerung des Maurach eine entsprechende hohe Aufstauung des Wassers im Ötztale stattgefunden habe. Der Ablagerung des Maurach muß die Durchschneidung durch die Ache unmittelbar gefolgt sein. Allerdings fehlen in der Maurachschlucht nicht Geröllablagerungen, welche von einem höheren Laufe der Ache zeugen. Sie verzahnen sich bei der oberen Brücke mit Gehängeschuttpartien. Nach meinen Beobachtungen reichen sie nicht höher als die Talsohle von Au und Winklen und Dorf unterhalb Längenfeld, nämlich 1150 m; nach den Aufnahmen von Hammer, die in unserem Kärtchen verwertet sind, steigen sie jedoch höher an. Am Ausgange der Schlucht setzen diese Geröllablagerungen in zusammenhängender Weise in 1113 m Höhe ein an der Spitze des großen Schuttkegels der Ache, auf dem Umhausen gelegen ist. Dieser Schuttkegel liegt stellenweise noch auf dem Trümmerwerke des Maurach, das weiter im Norden in einem kleinen Hügel, gerade am Rande unserer Karte, aus ihm emporragt. Bei Österreiten setzt er sich gegen die nun folgende ebene Talsohle von Tumpen ab, die sich oberhalb des Bergsturzes von Habichen erstreckt. Nirgends wird auf der ganzen Strecke zwischen Längenfeld und Tumpen Fels durch die Ache angeschnitten, nirgends ist die alte Talsohle bloßgelegt. Sie ist allenthalben tief verschüttet, und die Höhe des Tauferer Berges über der Ache (350 m) gibt uns noch nicht die gesamte Mächtigkeit unseres Dammes.

Er ist, wie bereits von Pichler und Hammer hervorgehoben ist, postglazial. Wenn sich auf ihm zwar in beinahe 1500 m Höhe eine Moränenpartie fin-

---

[1] Die hier vorgetragenen Ansichten über die Entstehung des Rieses habe ich seit meiner letzten Exkursion dahin (Pfingsten 1907) in meinen Vorlesungen regelmäßig vorgetragen; sie decken sich mit den seither von W. Kranz entwickelten vollständig. Vgl. dessen Ausführungen: Der geologische Aufbau und der Werdegang des Nördlinger Rieses im Rieser Heimatbuch. München 1922.

det, so zeugt diese doch nicht davon, daß sich ein Gletscher an den Wall gelehnt habe, sondern es handelt sich hier um Moränen, die mit ihrer zerrütteten Felsunterlage bei der Explosion verschoben worden sind. Das benachbarte Trümmergewirr gegen das Wiesle hin schließt durchaus aus, daß Eis über das Maurach je hinweggegangen sei. Wir haben es daher mit einem postglazialen Vulkan zu tun. Für die nähere Altersbestimmung liegen nur wenige Anhaltspunkte vor. Wir kennen im Ötztale noch nicht die Lage des Gschnitzstadiums der sich zurückziehenden Vergletscherung. Doch dürften dessen Grenzen, nach der Analogie mit dem Gschnitztale selbst zu urteilen, nicht gerade weit vom Maurach gelegen sein, dessen Entstehung daher keinesfalls wesentlich vor das alpine Gschnitzstadium fallen kann. Nun haben sich Anhaltspunkte dafür ergeben, das Gschnitzstadium mit den mittelschwedischen Endmoränen zu parallelisieren, deren Entstehung nach der Warfenzählung von Gerard de Geer vor 10000 Jahren erfolgte. Auf höchstens 10000 Jahre dürfen wir danach das Alter des Vulkanes von Köfels schätzen. Er ist der einzige seiner Art in den Alpen, und wie unbedeutend er auch in deren Antlitz erscheint, so groß ist seine theoretische Wichtigkeit; denn er lehrt, daß auch bei der Entstehung der Alpen noch in allerjüngster geologischer Vergangenheit vulkanische Kräfte tätig gewesen sind. Daß der dabei geförderte Bimsstein lediglich Bestandteile des Maurach-Gneisgranites einschließt und keinerlei Fragmente von Kalken enthält, über welche das alte Gestein des Ötztales hinweggeschoben sein könnte, ist bereits von Hammer hervorgehoben worden. Auch ist der Kalkgehalt des Bimssteines (1.6 Prozent) nicht so groß, um an eine wesentliche Einschmelzung von Kalken denken zu können. So gewährt denn unser kleiner Vulkan keinen Anhalt für einen an anderen Stellen sicher nachgewiesenen Deckenbau der Alpen.

Das Maurach bei Umhausen mahnt in vieler Hinsicht an einen Bergsturz. Aber seine Entstehung blieb lange Zeit zweifelhaft und wurde erst klar durch den neuerlichen Nachweis des Bimssteins bei Köfels. Welche Unterschiede gegenüber echten Bergstürzen vorliegen, ist gezeigt worden. Solche finden sich in der Nachbarschaft. Da ist zunächst der von Habichen, der die untere Talstufe des Ötztales verursacht. In der Mündung des Ötztales liegen die Trümmer, die vom Tschirgant abgegangen sind. Wenig nördlich davon liegt der große Bergsturz des Fernpasses, und diesem wiederum benachbart ist der Bergsturz, der den Eibsee abdämmt. Alle diese Bergstürze sind postglazial. Keiner von ihnen bietet zwingende Veranlassung, an eine Entstehung während des Eisrückzuges zu denken, dadurch, daß durch das Schwinden des Eises dem unterschnittenen, übersteil gewordenen Gehänge das Widerlager genommen wurde. Angesichts der nachgewiesenen großen Explosion von Köfels darf man vielleicht die genannten Bergstürze zurückführen auf eine gewaltige Erschütterung der Alpen, die bei jener Explosion erfolgte.

Ausgegeben am 28. Mai.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1925

XIII. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 16. April.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

Hr. Correns sprach von seinen Untersuchungen über polygame Blütenpflanzen. I. *Silene Roemeri* Friv.

Silene Roemeri ist subdiözisch mit rein weiblichen und ± männlichen Individuen (mit zwittrigen und rein männlichen Blüten).

Die ± männlichen Pflanzen zeigen alle Abstufungen von stark zwittrig bis rein männlich. Sie bringen, wie immer sie auch entstanden sind (durch Selbstbefruchtung oder Befruchtung eines Weibchens) nur ihresgleichen hervor. Der Grad, bis zu dem sie noch zwittrig sind, ist in weitgehendem Maße erblich.

Die Weibchen geben mit dem Blütenstaub der ± männlichen Pflanzen meist etwa gleich viel weibliche und ± männliche Nachkommen, die annähernd den Zwittrigkeitsgrad des Pollenträgers zeigen. Daneben gibt es auch thelygene ± männliche Pflanzen, die fast nur Weibchen hervorbringen.

Untersuchungen über polygame Blütenpflanzen.

I. Silene Roemeri Friv.

Von C. Correns.

Das Aussaatgut erhielt ich 1911 im Wege des Samenaustausches unter dem Namen *Silene Otites*, später auch als *Silene melandriformis* Maxim. Die richtige Bestimmung verdanke ich den freundlichen Bemühungen des Hrn. Hofrat R. von Wettstein. Die Art ist auf der Balkanhalbinsel zu Hause.

Die erste Aussaat (Versuch 1) ließ 1913 zweierlei leicht unterscheidbare Individuen erkennen: 1. rein weibliche und 2. ± männliche, die sowohl männliche als zwittrige Blüten trugen, wenn auch die letzten gewöhnlich sehr stark in der Minderzahl blieben. Diese Stöcke waren »subandrözisch« oder »andromonözisch«, meist mit starker Betonung der Männlichkeit.

Die Geschlechterverteilung war also die gleiche, wie ich sie bei *Cirsium arvense* festgestellt hatte (1916). Die technischen Schwierigkeiten verschiedener Art, die diese Distel genetischen Versuchen bereitet, veranlaßten mich, auch mit *Silene Roemeri* zu experimentieren, die verschiedene Vorteile zu bieten schien. In der Folge stellten sich die Verhältnisse freilich als etwas verwickelter heraus, als es zuerst den Anschein hatte.

I.

Die Pflanzen sind ausdauernd. Sie bildeten bei meinen Versuchen im ersten Jahr, auch bei ganz frühzeitiger Aussaat, stets nur Rosetten, die sich dann von Jahr zu Jahr vergrößerten und, je nach ihrer Stärke, vom zweiten oder dritten Jahr ab blühten, indem sie einen oder mehrere (bis 50) blühende Stengel trieben, die in gutem Boden bis zu 130 cm Höhe und mehr erreichten.

Der Blütenstand ist, wie es der Gattungssektion *Botryosilene* Rohrb. entspricht, eine aus Dichasien zusammengesetzte Rispe. Dadurch, daß die Seitensprossen ziemlich zusammengezogen sind, und unter jedem größeren Hauptseitensproß noch serial ein bis zwei weitere stehen können, wird der Blütenstand reichblütig und ziemlich dicht. Gewöhnlich ist der Stengel einfach und trägt schaftartig die schmale Infloreszenz; zuweilen ist er aber durch Abrücken und Strecken der unteren Äste mehr sparrig verzweigt.

Im Kelch und den Blütenblättern sind die weiblichen Pflanzen einerseits, die ± männlichen andererseits nicht oder doch nicht merklich verschieden. Gewisse Unterschiede, die man antrifft, sind Sippen-, nicht Geschlechtsmerk-

male. Die weiblichen Blüten (Fig. 1) zeigen am Grund des Fruchtknotens kleine Rudimente der Staubgefäße. Die männlichen (Fig. 2) besitzen außer den 10 tauglichen Staubgefäßen einen rückgebildeten, aber noch relativ stark entwickelten Fruchtknoten mit drei reduzierten Griffeln. Ist die Blüte zwittrig, so ist das Gynaeceum sprunghaft besser, bis zur Tauglichkeit entwickelt, ohne daß dann etwa das Androeceum korrelativ zurückgebildet wäre. Die Zwitterblüten sind deutlich proterandrisch.

Fig. 1. *A* Weibliche Blüte, *B* Fruchtknoten mit den rudimentären Staubgefäßen aus einer solchen Blüte. Dr. O. Römer gez. (Vergr. 6/1.)

Fig. 2. *A* Männliche Blüte, *B*, *C* Rudimentäre Fruchtknoten aus männlichen Blüten, bei *C* etwas besser entwickelt. Dr. O. Römer gez. (Vergr. 6/1.)

Die Blüten werden sehr stark von Insekten besucht. Ich beobachtete verschiedene Fliegenarten, Hummeln, und vor allem die Honigbiene, auch Schmetterlinge (*Vanessa urticae*). Die Weibchen setzen deshalb auch ausgezeichnet an, wenn ± männliche Stöcke in der Nähe sind. Isoliert oder mit Pergaminsäcken geschützt sind sie völlig steril.

Einzeln finden sich ± männliche Stöcke, bei denen die Antheren zeitweise nicht normal entwickelt, »kontabeszent«, sind und dann nicht aufspringen. Das Kontabeszentwerden trifft auch die Antheren sonst typisch männlicher Blüten, nicht bloß die der Zwitterblüten. Ich habe aber immer auch normale Antheren daran beobachtet. Und zwischen diesen kontabeszenten Staubgefäßen und den Rudimenten in den Blüten der Weibchen klafft eine so außerordentlich weite Lücke, daß die Zugehörigkeit solcher Stöcke zu den ± männlichen außer Zweifel ist. Ebenfalls sehr isoliert fanden sich Stöcke, die neben männlichen und ± zwittrigen Blüten auch rein weibliche — mit ganz normalem Fruchtknoten und ganz rudimentären Staubgefäßen — trugen, oft in großer Zahl und deutlich mosaikartig verteilt. Der Pollen solcher Stöcke und ihre Fruchtknoten sind tauglich. Diese Pflanzen sind trimonözisch.

Betrachtet man den Blütenstand einer ± männlichen Pflanze, die einigermaßen reichlich angesetzt hat, so muß auffallen, daß die Kapseln nicht vom

Zufall gleichmäßig verteilt sind, sondern daß bestimmte Stellen bevorzugt werden. Ich gebe in Fig. 3 die Diagramme je eines Blüten-, besser Fruchtstandes zweier Pflanzen, in die ich die ansetzenden Blüten als schwarze Scheibchen eingetragen habe.

Bei dem Fruchtstand *A* hatten von 247 Blüten 50 angesetzt (20.2 Prozent), bei dem Fruchtstand *B* von 171 Blüten 51 (29.3 Prozent). 3 noch zu junge Blüten sind nicht berücksichtigt.

Die Teilblütenstände stehen an der Hauptachse in 4 Längsreihen. Faßt man je zwei aneinanderstoßende Reihen zusammen, so erhält man das gleiche Verhältnis zwischen männlichen und zwittrigen Blüten. (Bei *A* linke und obere Reihe 100:26, rechte und untere Reihe 96:24; bei *B* 57:24 und 62:27.) Ein sehr grobes Mosaik können die zwittrigen Blüten also nicht bilden.

Fruchtstand *A* besteht, von der Endblüte abgesehen, aus 10 Etagen, die von unten nach oben 24, 12, 10, 19, 29, 59, 0, 0, 33, 0 Prozent zwittrige Blüten aufweisen, *B* aus 8 Etagen, die 19, 32, 30, 56, 11, 0, 63 und 25 Prozent zwittrige Blüten zeigen. Die mittleren Etagen haben also die meisten hervorgebracht. Die einzelnen hohen Prozentzahlen gegen die Spitze zu sprechen nur scheinbar dagegen; bei den obersten Stockwerken fallen wegen der absolut geringen Blütenzahl die Prozentzahlen für die wenigen Zwitterblüten sehr hoch aus.

Bei den einzelnen primären Teilfruchtständen war in den aufgenommenen Fällen die Terminalblüte nie zwittrig, auch die Mittelblüten der seitlichen Dichasien nicht; es waren fast immer die letzten ausgebildeten Blüten, die zwittrig wurden, an die also besondere Ansprüche gestellt waren. Bei den serialen Bei-Fruchtständen dagegen, besonders bei den untersten, auf eine Blüte reduzierten, trat die Zwittrigkeit oft auf.

Sicher stellt eine zwittrige Blüte größere Ansprüche an die Ernährung als eine männliche; aber die Stellung der Blüte bedingt die Verteilung der Nährstoffe, und nicht umgekehrt die Verteilung der Nährstoffe die Stellung der anspruchsvolleren Blüte. Wann diese gebildet wird, ist in weitgehendem Grade erblich festgelegt.

Die Kapseln, die an den ± männlichen Stöcken entstehen, fand ich kleiner und ärmer an tauglichen Samen als die Kapseln der Weibchen, wenigstens im Durchschnitt. Das beruht darauf, daß sie von vornherein weniger Samenanlagen enthalten; außerdem scheint auch die Befruchtungstauglichkeit der Eizellen oder die Entwicklungsfähigkeit der Embryonen geringer zu sein.

Um mich nicht auf den Eindruck verlassen zu müssen, habe ich bei einer Anzahl weiblicher und ± männlicher Pflanzen die Zahl der Samen in fast reifen Kapseln festgestellt. Oft wurde nur je eines der drei Fruchtfächer untersucht; da die Scheidewände nicht ganz vollständig sind, mag an der Spitze der Plazenten dann hie und da ein Korn zu viel oder zu wenig gezählt worden sein. Außer der Zahl der normalen Samen wurde meist auch die Zahl der steckengebliebenen und unbefruchteten Samenanlagen ermittelt. Zuweilen wurden alle Fächer einer Frucht untersucht. Dabei stellte sich heraus, daß das Auszählen eines Faches ein genügend sicheres Resultat gibt. Es fanden sich

A

B

Fig. 3 A und B. Diagramme von Fruchtständen zweier ± männlicher Stöcke. Blüten, die angesetzt haben, sind durch schwarze Scheibchen, solche, die steril geblieben sind, durch Kreise bezeichnet. Kleine Kreise geben Knospen an, Punkte steckengebliebene Knospen, Kreise mit einem Punkt in der Mitte Blüten, die zu jung waren, als daß hätte entschieden werden können, ob sie angesetzt haben. — Die Deckblätter sind nur zum Teil eingezeichnet, soweit, als es bei der Aufnahme der Diagramme vorteilhaft war.

z. B. bei einer Kapsel im 1. Fach 13 + 1, im 2. Fach 14 + 3, im 3. Fach 15 + 2 Samen + Samenanlagen, zusammen 42 + 6, im Fach durchschnittlich 14 + 2.

Die gewonnenen Zahlen sind für die weiblichen und ± männlichen Stöcke in Tabelle 1 in ansteigender Folge zusammengestellt. War nur ein Fach ausgezählt worden, so wurde das Ergebnis mit 3 (bei den einzelnen vierzähligen Kapseln mit 4) multipliziert. Waren wie gewöhnlich mehrere Früchte von einer Pflanze untersucht worden, so ist auch der Mittelwert ausgerechnet und angegeben.

Tabelle 1.

Samen + taube Samenanlagen pro Kapsel.

Pflanze	Kapseln	Mittel
♀ **1.**	51 + 9; 39 + 12; 36 + 3; 45 + 3	43 + 7
♀ **2.**	45; 45; 39	43
♀ **3.**	51; 45; 21 + 21; 57	44 + 5
♀ **4.**	45 + 9; 36 + 9; 51 + 1; 54 + 6; 51 + 6; 48 + 6; 45 + 9; 54 + 3; 42 + 12; 36 + 15	46 + 8
♀ **5.**	51 + 3; 54; 57	54 + 1
♀ **6.**	60; 51; 54	55
♀ **7.**	60 + 15	
± ♂ **1** (2 C).	9 + 22; 11 + 16; 9 + 18	10 + 19
± ♂ **2.**	9 + 6; 9 + 6; 15 + 6; 15 + 9; 6 + 15	11 + 8
± ♂ **3.**	9; 12; 9; 9 + 9; 9 + 6; 15 + 6; 18; 18 + 9; 9 + 18; 12 + 9	12 + 6
± ♂ **4** (2 D).	12; 15; 9; 18; 8	12
± ♂ **5** (2 B).	12 + 6; 21; 15 + 3	16 + 3
± ♂ **6**[1].	21; 13 + 1	17 + 1
± ♂ **7.**	12 + 17; 25 + 19	19 + 18
± ♂ **8.**	21 + 3; 21; 28; 30; 27; 24; 33; 30; 12 + 6; 30	25 + 1
± ♂ **9** (2 A).	27; 24; 21 + 3; 24; 30	25 + 1
± ♂ **10.**	30; 27; 21 + 3	26 + 1
± ♂ **11** (2 E).	29 + 6; 19 + 12; 33 + 7	27 + 8
± ♂ **12**[1].	33; 39; 33; 30; 27; 30; 33 + 3; 24 + 6; 33; 33 + 3	31 + 1
± ♂ **13** (10 D)[1].	31 + 6	
± ♂ **14.**	42 + 6; 28 + 15; 42 + 9	37 + 10

Man sieht aus den Zahlen, wenn man nur die »guten« Samen berücksichtigt, daß die ± männlichen Pflanzen mit durchschnittlich 11 bis 31, höchstens 37 Samen in der Kapsel hinter den Weibchen mit durchschnittlich 43 bis 60 Samen zurückstehen. Die Kapsel der fast rein männlichen Pflanze 13 (10 D) war die einzige einer reichblütigen Infloreszenz, aber mit 31 guten und 6 tauben Samen doch verhältnismäßig gut entwickelt. Sie zeigt das m o s a i k ä h n l i c h e s p r u n g h a f t e Auftreten der Fertilität des Gynaeceums bei den ± männlichen Stöcken sehr gut, das auch sonst stets zu beobachten war. Trotz der durchschnittlich geringeren Fruchtbarkeit der Kapseln gegenüber denen der Weib-

[1] Die einzigen Kapseln einer Infloreszenz.

chen klafft doch eine deutliche Lücke zwischen den rudimentären Fruchtknoten der männlichen Blüten und den am schlechtesten ansetzenden der zwittrigen.

Sehr unerwartet kam der besonders schlechte Ansatz der ± männlichen Pflanze 1 (2 C), die ausgesprochen trimonözisch war.

Nachdem sich sehr ausgesprochene Unterschiede der ± männlichen Pflanzen im Ansetzen herausgestellt hatten, mußte der Grad, bis zu dem sie noch zwittrig waren, beurteilt, abgeschätzt werden. Denn genau, durch Abzählen der männlichen und zwittrigen Blüten, konnte er bei den großen Individuenzahlen und der Blütenmenge einer Pflanze nicht festgestellt werden, und ein teilweises Abzählen hätte bei dem mosaikähnlichen Auftreten der Zwitterblüten doch kein sicheres Resultat gegeben.

Ich brachte die Pflanzen, möglichst zu Beginn der Kapselreife, nach ihrem Ansatz in 6 Hauptklassen: sehr gut (in den Tabellen sg abgekürzt) — gut (g) — mäßig (m) — schlecht (s) — sehr schlecht (ss) — null (0), und schob, als sie mir nicht ausreichten, noch weitere Klassen ein: zwischen sehr gut und gut noch sehr gut bis gut (sg—g) und gut bis sehr gut (g—sg), zwischen gut und mäßig noch gut bis mäßig (g—m) und mäßig bis gut (m—g) usw., so daß es schließlich 16 Klassen waren. In den folgenden Tabellen habe ich aber, um sie nicht zu sehr auszudehnen und übersichtlich zu bleiben, die Zwischenklassen zu den Hauptklassen gezogen und zwar so, daß sehr gut bis gut zu sehr gut, gut bis sehr gut und gut bis mäßig zu gut gerechnet wurden, usw. So kamen die Pflanzen, die als sehr schlecht bis null aufgenommen worden waren, in die Klasse null. Das erscheint zunächst ungereimt, ist aber doch nicht unberechtigt, insofern, als die Feststellung, daß wirklich auch nicht eine Kapsel gebildet worden ist, bei dem dichten Blütenstand nicht ganz leicht ist. Und wenn, wie es wiederholt der Fall war, nur eine Kapsel gefunden wurde, so liegt es nahe, anzunehmen, die eine oder andere der Pflanzen, die wirklich ganz rein männlich gefunden wurden, hätte bei noch reicherem Blühen oder in einem anderen Jahr doch auch ganz einzelne zwittrige Blüten gebildet.

Die Hauptschwierigkeit beim Schätzen lag in der schon besprochenen ungleichmäßigen Verteilung der Zwitterblüten über den ganzen Blütenstand. Doch stimmten die Aufnahmen derselben Nachkommenschaft in verschiedenen Jahren oder in verschiedenen Abschnitten eines Versuchsbeetes ziemlich gut überein, obschon Abweichungen um mehr als eine ganze Klasse bei demselben Stock nicht selten waren. Belege dafür werden später mitgeteilt werden (Tabelle 5, S. 237; Tabelle 11, S. 243 und Tabelle 12, S. 244).

Außerdem wurde versucht, die durchschnittliche Fruchtbarkeit einer ± männlichen Nachkommenschaft durch eine Zahl, den »Kennwert«, anzugeben, der dann die Pflanze, die diese Nachkommenschaft lieferte, charakterisieren sollte. Zu diesem Zweck wurde jeder Ansatzklasse ein bestimmter Wert gegeben: sg = 5, g = 4, m = 3, s = 2, ss = 1, 0 = 0, und mit diesen Werten wurden die in jeder Klasse gefundenen Individuenzahlen multipliziert. Die Produkte wurden zusammengezählt und durch die Gesamtzahl der Nachkommen dividiert.

Die Methode ist sicher unvollkommen. Einmal, weil die Zunahme der Fertilität von Klasse zu Klasse gewiß nicht so gleichmäßig ist, daß man sie durch eine Einheit genau ausdrücken kann; die verwendeten Werte für die einzelnen Klassen werden also den wirklichen nicht ganz entsprechen. Und dann, weil die Verteilung der Individuen auf die einzelnen Klassen dabei nur unvollkommen zum Ausdruck kommt. Der Kennwert 2.5 käme zustande, wenn alle Klassen gleich stark vertreten wären, und wenn alle Individuen nur in den Klassen m und s steckten. Man kann sich aber auch Verteilungen konstruieren, wo das Maximum der Individuen in den Klassen m, g oder s liegt, und doch der Kennwert 2.5 herauskommt. Ich weiß aber keine bessere Methode, und Tabelle 5 (S. 237) zeigt z. B., daß die Kennwerte für die drei Beete gleicher Herkunft (I, II, III) recht ähnlich ausfielen.

Es ist von vornherein anzunehmen, daß ein Teil der Unterschiede im Ansatz zwischen den verschiedenen ± männlichen Pflanzen durch äußere Bedingungen veranlaßt, also phänotypischer Natur ist. Die annähernde Übereinstimmung der Aufnahmen desselben Individuums in verschiedenen Jahren und der Kennwert, durch den sich, wie wir bald sehen werden, die Nachkommenschaften verschieden stark männlicher Stöcke unterscheiden, beweisen aber, daß die Pflanzen hinsichtlich des Ansatzes auch genotypisch verschieden sind, und daß diese Unterschiede viel wirkungsvoller sein können als die der äußeren Umstände.

Um genauere Anhaltspunkte dafür zu gewinnen, wieweit die Schätzung des Ansatzes mit dem tatsächlichen Verhalten übereinstimmt, wurden 1921 die fruchttragenden Stengel von 36 verschiedenen ± männlichen Pflanzen über den Rosetten ungefähr gleich hoch abgeschnitten und genauer untersucht. Tabelle 2 bringt das Ergebnis. Es wurde zunächst der Grad der Zwittrigkeit abgeschätzt, Spalte 2, hierauf die Zahl der Stengel jeder Rosette festgestellt, Spalte 3, dann das durchschnittliche Gewicht eines Stengels mit seinem Fruchtstand (indem das ermittelte Gesamtgewicht aller Stengel eines Stockes durch die Zahl der Stengel dividiert wurde), Spalte 4, dann die Zahl der Kapseln an allen Stengeln eines Stockes ermittelt, Spalte 5, und daraus die durchschnittliche Zahl der Kapseln an einem Stengel, Spalte 6. Schließlich wurde die Zahl der Kapseln auf 1 g Stengelgewicht berechnet, Spalte 7. Diese Zahl schien mir am charakteristischsten zu sein, und nach ihr sind in der Tabelle die untersuchten Pflanzen in ansteigender Reihe geordnet; die Buchstaben aber, mit denen sie bezeichnet sind, steigen mit der Zahl der Kapseln pro Stengel an. Die Unregelmäßigkeiten in der Aufeinanderfolge der Buchstaben sind also durch die Korrektur infolge der Berücksichtigung der Stärke (des Gewichtes) der Triebe bedingt und lassen den Einfluß dieser Korrektur gut erkennen.

Außerdem waren auch die Samen aus den Kapseln befreit, geputzt und, wenn es nicht gar zu wenig waren, gewogen worden, ferner alle Ernten, auch die nicht gewogenen, ausgesät und die Keimlinge gezählt, die innert zwei Monaten aufgingen. Die Absicht war, noch bessere Zahlen für den Grad der Zwittrigkeit zu bekommen, etwa die Zahl der Keimlinge (oder wenigstens das

Tabelle 2.

Pflanze	Ansatz	Stengel	Gewicht eines Stengels in g	Kapseln	Kapseln pro Stengel	Kapseln auf 1 g Stengel
A	o	12	0.39	—	—	—
B	o	2	0.26	—	—	—
C	o	2	0.60	—	—	—
D	o	2	0.21	1	0.5	2.4
E	ss—o	2	0.35	2	1.0	2.9
F	ss—o	16	0.30	19	1.2	4.0
H	ss	9	0.50	19	2.1	4.2
K	s	13	0.48	32	2.5	5.1
J	ss—o	9	0.39	22	2.4	6.2
L	ss—o	2	0.36	6	3.0	8.3
S	ss—o	7	0.62	38	5.4	8.8
O	ss—o	10	0.51	46	4.6	9.0
P	ss	5	0.43	24	4.8	11.3
N	s	3	0.35	13	4.3	12.4
T	ss—o	3	0.36	19	6.3	13.0
AD	ss—o	1	0.95	14	14.0	14.7
M	ss—o	3	0.23	11	3.7	15.7
R	ss—o	4	0.30	21	5.3	17.5
Q	ss—o	5	0.27	26	5.2	18.8
G	ss—o	1	0.10	2	2.0	20.0
AB	m	4	0.58	48	12.0	20.6
V	s	2	0.36	17	8.5	22.7
U	m	5	0.37	42	8.4	22.8
Y	g	17	0.37	154	9.1	24.3
Z	m	17	0.41	174	10.2	24.8
X	s	3	0.35	27	9.0	25.5
W	m	6	0.32	51	8.5	26.6
AA	s	5	1.14	57	11.0	28.2
AC	m	6	0.43	74	12.3	28.9
AE	g	15	0.58	252	16.8	29.2
AF	m	7	0.53	122	17.4	34.7
AJ	sg	23	0.80	727	31.6	39.6
AG	m	6	0.52	139	23.2	44.6
AK	sg	11	0.63	394	35.8	56.5
AL	g	9	0.61	360	40.0	65.7
AH	m	6	0.36	154	25.1	70.6

Gewicht der Samen) für einen Stengel oder 1 g Stengelgewicht festzustellen. Ich habe sie aber nicht in die Tabelle aufgenommen, weil mir allerlei neue Fehlerquellen zu wirksam schienen.

Überblickt man ein größeres Feld, das eine Anzahl umfangreicher und verschiedenartiger Versuche trägt, so fallen die Nummern, die ausschließlich aus der wieder ± männlichen Nachkommenschaft ± männlicher Stöcke bestehen,

durch ihren im Durchschnitt sicher niedrigeren Wuchs auf, gegenüber denen, die auch Weibchen neben den ± männlichen Pflanzen enthalten. Ob das als sekundärer Geschlechtscharakter aufzufassen ist oder als Folge der Selbstbefruchtung, müssen weitere Untersuchungen lehren. Die zweite Annahme ist sehr unwahrscheinlich, denn die ± männlichen Stöcke, die zwischen Weibchen aufgegangen sind, machen auch den Eindruck, als ob sie im Durchschnitt schwächer wären als ihre Schwestern. Genaue Bestimmungen fehlen aber noch.

Daß überhaupt sekundäre Geschlechtsmerkmale vorhanden sind, kann keinem Zweifel unterliegen. Bewiesen wird es durch das auffällige Voraneilen der ± ♂ Stöcke beim Aufblühen, den weiblichen gleicher Herkunft gegenüber, von dem wir gleich hören werden (S. 236, Tab. 4). Auch eine geringere Lebensfähigkeit ist bei den ± ♂ Sämlingen sehr wahrscheinlich vorhanden (Tab. 3, S. 236, und vor allem Tab. 15, S. 248).

Viel Mühe ist darauf verwendet worden, festzustellen, ob sich schon die Samen der Weibchen und der ± männlichen Pflanzen in ihrem durchschnittlichen Gewicht unterscheiden. Es wurden immer eine größere Zahl guter Samen aus den Ernten ausgelesen, gewöhnlich je 500, und gewogen, oft drei Portionen von der gleichen Pflanze, und das Tausendsamengewicht daraus berechnet. Je 1000 Samen der 26 so untersuchten Weibchen wogen zwischen 248 und 402 mg, je 1000 Samen der 13 untersuchten ± männlichen Stöcke zwischen 251 und 368 mg. Bei den Samen der Weibchen hatte die Herkunft des Pollens einen, wenn auch nicht sehr großen, so doch sehr merklichen Einfluß. Dasselbe Weibchen gab z. B. mit drei verschiedenen ± männlichen Pflanzen die Tausendsamengewichte: 260, 276 und 320 mg, aus je 500 Samen berechnet.

Die Wägungen sprechen deutlich dafür, daß die Samen der ± männlichen Pflanzen im Durchschnitt etwas l e i c h t e r sind. Doch sind die Schwankungen von Pflanze zu Pflanze sicher viel größer als der Unterschied zwischen weiblichen und ± männlichen Samen, auch sind die möglichen Wirkungen der Selbstbefruchtung nicht immer ausgeschlossen.

II.

Um den Formenkreis meines Materials kennenzulernen, wurden zunächst im Jahre 1916 Samen von drei Weibchen der ersten Aussaat, die ungeschützt abgeblüht waren, gut gemischt und als Versuch 2 ausgesät. Die Keimlinge wurden ohne Wahl in Kisten pikiert und später zu 4 und 5 im Verband auf drei je einen Meter breite Beete ausgepflanzt.

Es kamen 1917 927 Rosetten zur Blüte, von denen 451, = 48.7 Prozent, weiblich und 476, = 51.3 Prozent, ± männlich waren. Nähere Angaben für die einzelnen Beete bringt die Tabelle 3.

Aufgenommen ist in die Tabelle auch, wieviel und was für Pflanzen bei den Revisionen in den Jahren 1918 und 1919 abgestorben waren. Es hatte dies Los deutlich mehr ± männliche als weibliche getroffen, während, wie wir sahen, 1917 etwa gleich viel geblüht hatten. Doch sind die Zahlen zu klein, als daß ich viel Gewicht auf sie legen möchte.

Tabelle 3.

Versuch 2.

Beet	ausgepflanzt	vor dem Blühen tot	in Blüte 1917				davon abgestorben			
							1918		1919	
			n	♂ und ±☿	♀	Prozent ♀	♂ und ±☿	♀	♂ und ±☿	♀
I	289	13	276	136	140	**50.7**	10	3	2	—
II	430	16	414	213	201	**48.6**	7	5	1	1
III	267	30	237	127	110	**46.4**	10	7	—	1
zus.	986	59	927	476	451	**48.7**	27	15	3	2

Sehr auffällig war 1917 das Vorauseilen der ± männlichen Pflanzen beim Aufblühen, auf das ich, durch das Verhalten der verwandten *Silene Otites* aufmerksam gemacht, damals besonders achtete. Die ersten vier Aufnahmen fanden in Abständen von je einer Woche statt und sind, einschließlich des Gesamtergebnisses, in Tabelle 4 zusammengestellt.

Tabelle 4.

Beet	Aufnahme:								Endergebnis	
	26. VI.		3. VII.		10. VII.		17. VII.			
	blüh.	± ♂	blüh.	± ♂	blüh.	± ♂	blüh.	± ♂	blüh.	± ♂
I	3	3	45	40	125	91	224	127	276	136
II	7	7	80	66	219	156	348	211	414	213
III	10	10	43	42	110	81	189	115	237	127
zus.	20	20	168	148	454	328	761	453	927	476
Prozent ± ♂		**100**		**88.1**		**72.2**		**59.5**		**51.3**

Der Ansatz der 476 ± männlichen Pflanzen wurde dreimal, 1917, 1918 und 1919, bestimmt, unter Verwendung der oben (S. 232) angegebenen Klassen. Zunächst fielen 17 Individuen auf, die deutlich trimonözisch bis gynomonözisch waren, darunter die später mehrfach benützte Pflanze 2 C. Die übrigen 459 Pflanzen verteilten sich auf alle 6 Klassen, zeigten also alle möglichen Abstufungen von sehr stark zwittrig bis rein männlich. Die Schätzung fiel in den verschiedenen Jahren für dieselbe Pflanze oft verschieden aus; vor allem wurde im ersten Jahr der Ansatz gewöhnlich schlechter gefunden als im zweiten und dritten, gewiß, weil die Pflanzen zunächst noch schwächer waren. Für die Zusammenstellung wurden Mittelwerte gebildet, bei denen aber die letzte Aufnahme (1919) mehr ins Gewicht fiel als die zweite und vor allem die erste.

Tabelle 5.

Beet	n	Ansatz						trimo-nözisch	Kenn-wert
		sg	g	m	s	ss	o		
I	136	12	32	34	34	21	0	3	**2.85**
II	213	27	22	70	61	24	2	7	**2.81**
III	127	16	24	48	26	4	2	7	**3.13**
zus.	476	55	78	152	121	49	4	17	**2.96**
Proz.	**100**	**11.6**	**16.4**	**31.9**	**25.4**	**10.3**	**0.8**	**3.6**	

Die letzte Spalte enthält die »Kennwerte« (S. 232). Man sieht, daß sie für die einzelnen Beete, vor allem das erste und zweite, gut übereinstimmen.

1917 wurde die Ernte von 6 weiblichen und 2 ± männlichen Stöcken ausgesät. Sie stammten aus der ersten Aussaat (Versuch 1), waren von Münster nach Dahlem verpflanzt worden und hatten alle dicht beieinander gestanden. Außer ihnen waren nur noch einige weitere Weibchen vorhanden. Von den Weibchen kamen je 500 Samen (Vers. 3 bis 8), von den ± männlichen Pflanzen mehr (Vers. 9: 1503, Vers. 10: 1000 Samen) zur Verwendung. Das Ergebnis bringt Tabelle 6.

Tabelle 6.

Vers.-Nr.	Geschlecht des Samenträgers	n	Ansatz								♀	Prozent ♀	m
			±☿	sg	g	m	s	ss	o	unbestimmt			
3	♀	396	138	11	17	58	8	11	1	32	258	**65.2**	± 2.39
4	♀	405	164	11	20	77	22	12	2	20	241	**59.5**	± 2.44
5	♀	431	159	9	14	56	10	14	1	52	272	**63.1**	± 2.32
6	♀	409	62	6	10	22	5	6	9	13	347	**84.8**	± 1.77
7	♀	442	107	10	10	34	9	6	1	37	335	**75.8**	± 2.04
8	♀	423	153	40	34	58	3	0	0	18	270	**63.8**	± 2.34
9	±☿	951	951	172	249	404	44	16	1	65	—	—	—
10	±☿	736	736	77	113	217	103	47	3	177	—	—	—

Zunächst lehrt die Tabelle, daß die beiden ± männlichen Pflanzen (Versuch 9 und 10) ausschließlich ihresgleichen (1687 Stöcke!) hervorgebracht haben. Diese Nachkommen setzen in sehr verschiedenem Grade an. Eine mittelstarke Samenproduktion ist am häufigsten; vertreten sind aber alle Klassen. Der Kennwert ist für den einen Versuch (9) 3.58, für den andern (10) 3.05; dementsprechend ist die Verteilung der Individuen auf die einzelnen Klassen nicht die gleiche, wenn auch ähnlich.

Die 6 Weibchen haben dagegen stets weibliche und ± männliche Pflanzen gegeben. Die letzteren zeigen wieder ungleichen Ansatz und treten in sehr

verschiedenen Mengen auf; sie machen bei den einzelnen Versuchen zwischen 40.5 und 15.2 Prozent aus. Die Differenz zwischen den Extremen, 24.3 Prozent, ist etwa 10mal größer als der wahrscheinliche mittlere Fehler, der sich bei den einzelnen Versuchen zwischen 1.77 und 2.44 Prozent bewegt. Das verschiedene Verhalten der Weibchen kann also nicht bloßer Zufall sein. Wieweit es aber auf ihrer eigenen Veranlagung beruhte oder auf einem verschiedenen Verhalten der beiden Pollenträger, die trotz des dichten Standes ihren Blütenstaub ungleich verteilt haben könnten, muß einstweilen dahingestellt bleiben.

Noch etwas ist an den Versuchsergebnissen bemerkenswert. Von den 6 Weibchen wurden je 500 Samen ausgesät, die zwischen 79.2 Prozent (Versuch 3) und 88.4 Prozent (Versuch 7) blühende Pflanzen gaben, im Mittel 83.4 Prozent. Von den 2 ± männlichen Stöcken wurden 1503 und 1000 Samen ausgesät und 73.6 und 63.4 Prozent blühender Pflanzen erhalten, im Mittel 67.4 Prozent. Die Differenz (83.4 – 67.4) macht 16 Prozent aus. Gekeimt hatten noch mehr Samen. Pikiert wurden an Keimlingen der Weibchen zwischen 93.8 und 97.2 Prozent, an Keimlingen aus 1000 Samen der einen ± männlichen Pflanze 83.5 Prozent, an Keimlingen aus 500 Samen der andern ± männlichen 95.2 Prozent. Es kann demnach keinem Zweifel unterliegen, daß die Samen der ± ♂ Pflanzen etwas schlechter keimten, vor allem aber, daß die daraus erwachsenden Rosetten vor der Blüte häufiger eingingen als die der weiblichen Pflanzen, obwohl die ausgesuchten Samen äußerlich gleich gut waren, und auch die Bedingungen so gleich als möglich. Es stimmt das zu dem, was wir aus den Aufnahmen des Versuches 2 ableiten konnten, nur sind die Zahlen hier viel größer und deshalb viel sicherer.

Die Versuche wurden 1918 in verschiedener Richtung fortgesetzt.

Zunächst sollte festgestellt werden, ob auch weitere ± männliche Pflanzen nur ihresgleichen hervorbrachten, wie die durch Versuch 9 und 10 geprüften. Zugleich sollte ermittelt werden, ob die Nachkommenschaft hinsichtlich ihrer Fähigkeit, anzusetzen (also neben dem tauglichen Androeceum auch ein funktionierendes Gynaeceum zu bilden), verschieden ausfällt, je nachdem sie von einer gut oder einer schlecht ansetzenden Pflanze stammte. Zu diesem Zweck wurde als Versuch 11—44 die Ernte von 22 ± männlichen Stöcken aus den Versuchen 2—10 ausgesät. Sie waren teils sorgfältig mit Pergamin isoliert worden, teils (Versuch 30—44) nur bei herannahender Reife gesäckt worden, um den Verlust der Samen zu verhindern, also bei der unzweifelhaften Selbstfertilität mindestens zum Teil auch selbstbefruchtet. Die äußeren Bedingungen waren bei allen Versuchen möglichst gleichgemacht. Das Ergebnis bringt Tabelle 7.

Weibchen traten (unter den 3930 Nachkommen) überhaupt nicht auf; die Spalte für sie ist deshalb weggelassen, ebenso die Spalte für die Gesamtzahl der Nachkommen jedes Versuches, die sich ja mit der Zahl der ± männlichen deckt. Dafür sind die Zahlen für die 6 Fertilitätsklassen doppelt

Tabelle 7[1].

Vers.-Nr.	P_I Herkunft (Vers. u. Pflanze)	P_I Ansatz	± ♂	F_I Ansatz sg	g	m	s	ss	o	in Prozent sg	g	m	s	ss	o	Kennwert
15, 16	2 H	ss—0	255	—	—	2	26	157	70	—	—	1	10	62	27	**0.33**
37	5 B	ss—0	142	—	14	29	44	43	12	—	10	20	31	30	8	**1.93**
28	7 A	ss	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
29	10 D	ss	15	—	—	1	3	3	8	—	—	7	20	20	53	**0.67**
30	3 E	ss	225	2	8	44	74	60	37	1	4	20	33	27	16	**1.70**
32	3 A	ss	64	—	—	13	11	20	20	—	—	20	17	32	31	**1.27**
33	3 F	ss	98	2	2	12	21	55	6	2	2	12	21	56	6	**1.54**
35	4 D	ss	130	—	11	33	32	40	14	—	8	25	25	32	11	**1.90**
36	4 B	ss	146	1	21	37	37	40	10	1	14	25	25	28	7	**2.15**
38	9 D	ss	201	—	4	42	62	67	26	—	2	21	31	34	13	**1.66**
39	9 E	ss	284	—	5	64	112	81	20	—	2	23	39	29	7	**1.82**
31	3 B	s—m	132	—	10	29	33	27	33	—	8	22	25	20	25	**1.67**
18	2 G	s—m	71	4	2	7	12	28	18	6	3	10	17	25	39	**1.42**
34	4 E	s—m	216	10	68	83	37	12	6	5	31	38	17	6	3	**3.04**
11, 12	2 A	sg	210	40	80	64	14	12	—	19	37	30	7	6	—	**3.58**
40	9 B	sg	298	—	69	133	77	15	4	—	23	45	26	5	1	**2.83**
41	9 C	sg!	307	16	85	134	64	7	1	5	28	44	21	2	0.3	**3.12**
42	9 F	sg!	268	17	91	111	29	16	4	6	34	41	11	6	2	**3.19**
43	9 G	sg!!	352	5	76	141	85	43	2	1	22	40	24	12	1	**2.74**
44	10 A	sg!!	243	7	36	87	63	47	3	3	15	36	26	19	1	**2.52**
19	2 D	sg!! z. T. ♀	127	20	49	44	9	5	—	16	39	35	37	4	—	**3.55**
17	2 C	sg!! z. T. ♀	136	34	46	44	12	—	—	25	34	32	9	—	—	**3.72**

vorhanden; es sind sowohl die direkt beobachteten als, des leichteren Vergleiches wegen, die prozentischen aufgenommen. Endlich ist für jede Nachkommenschaft der »Kennwert« ausgerechnet und in der letzten Spalte aufgeführt. Die Stammpflanzen sind nach ihrem Ansatz geordnet, so wie er vor oder bei der Ernte festgestellt worden war, und zwar ansteigend, vom schlechtesten bis zum besten.

Man sieht ganz gut, wie in der Nachkommenschaft von Pflanzen, die schlecht angesetzt hatten, die niedrigen Ansatzklassen, und in der Nachkommenschaft von Pflanzen, die gut angesetzt hatten, die höheren Ansatzklassen überwiegen. Wie gut die Pflanze ansetzt, also wie weit sie neben männlich auch noch zwittrig ist, ist demnach sicher in weitgehendem Grade erblich. Auffallen muß immerhin, wie verschieden bei den Nachkommen ein und der-

[1] Stimmt in den Tabellen die Zahl, die man durch Zusammenzählen der Frequenzen in den einzelnen Klassen eines Versuches erhält, nicht mit der Gesamtzahl ± männlicher Pflanzen überein, so ist das dadurch bedingt, daß bei einigen ± männlichen Pflanzen wohl das Geschlecht, aber — meist wegen zu spätem Blühen — nicht der Ansatz bestimmt werden konnte. Das sei hier ein für allemal gesagt.

selben Pflanze der Ansatz ausfällt, so daß oft alle oder fast alle Klassen vertreten sind, wenn auch die Hauptmenge der Nachkommen in eine oder zwei Klassen gehört. Ein Teil dieser Variabilität beruht sicher auf Modifikationen, ein Teil kann aber auch durch die heterozygotische Natur der Stammpflanze oder, nach freiem Abblühen der Stammpflanze, durch die der Nachkommenschaft bedingt sein.

Das zweite Ziel der Versuche des Jahres 1918 war, festzustellen, wie sich die Nachkommenschaft bestimmter Weibchen mit bestimmten ± männlichen Pflanzen verhielte. Die 3 hierzu ausgesuchten Weibchen aus Versuch 2 (L) und 7 (B, C) wurden natürlich sorgfältig (während der Blütezeit mit Pergamin, später mit Gaze) geschützt. Als Pollenträger dienten 8 ± männliche Stöcke, meist aus Versuch 2, je einer aber auch aus Versuch 7 und 10, mit sehr verschieden gutem Ansatz, die natürlich auch mit Pergaminsäcken geschützt wurden. Von 6 derselben konnte die Nachkommenschaft bei Selbstbefruchtung in Tabelle 7 mitgeteilt werden (2 A, C, D, G, H und 10 D); von einem (2 B) erntete ich gar keinen Samen, von einem (7 A, Versuch 28) erhielt ich keine blühenden Pflanzen.

Das Resultat der Versuche ist in Tabelle 8 nach den Aufnahmen der Jahre 1920 und 1921 zusammengestellt.

Tabelle 8.

Vers.-Nr.	P_1						F_1											
	♀ Herkunft	± ♂					n	± ♂	Ansatz							♀	Proz.	m ±
		Herkunft	Ansatz	Nachkomm. Vers.	Kennwert				sg	g	m	s	ss	o	Kennwert			
13	2 L	2 H	ss—o	15, 16	0.33		263	132	—	1	30	38	45	18	1.63	131	**49.8**	3.08
14	2 L	2 C	sg!! z. T. ♀	17	3.72		244	130	1	42	59	20	8	—	3.01	114	**46.7**	3.19
20	7 C	2 A	sg	11, 12	3.58		250	123	—	1	28	48	45	1	1.86	127	**50.8**	3.16
21	7 C	2 H	ss—o	15, 16	0.33		228	104	—	1	26	30	37	10	1.72	124	**54.4**	3.29
22	7 C	2 D	sg!! z. T. ♀	19	3.55		245	114	—	13	46	43	9	3	2.50	131	**53.3**	3.18
23	7 C	2 B	(fast) o	—	—		213	102	—	—	20	29	38	15	1.53	111	**52.1**	3.42
24	7 B	7 A	(ss) o	28	—		189	80	—	—	6	18	38	18	1.15	109	**57.7**	3.59
25	7 B	10 D	ss	29	0.67		334	30	—	—	—	5	16	9	0.87	304	**91.0**	1.56
26	7 B	2 C	sg!! z. T. ♀	17	3.72		336	159	2	32	88	27	9	1	2.92	177	**52.5**	2.72
27	7 B	2 G	s—m	18	1.42		359	180	—	11	52	62	49	6	2.07	179	**49.9**	2.64

Schließen wir zunächst Versuch 25 mit seinen 31 Prozent Weibchen aus, so haben die übrigen 9 Versuche zusammen 2327 Pflanzen gegeben; der einzelne Versuch im Mittel 258. Davon waren 1174 ± männlich und 1203, oder 51.7 Prozent, weiblich, mit einem wahrscheinlichen Fehler von ± 1.004 Prozent. Nimmt man dies Verhältnis 48,3 ± männlich: 51,7 weiblich als das

Richtige an, und rechnet man auf den einzelnen Versuch 258 Pflanzen, so beträgt der mittlere wahrscheinliche Fehler jedes Versuches ± 3.11 Prozent, und selbst die größte Abweichung eines Einzelversuches, die von Versuch 24, ist, da sie nur 6 Prozent beträgt, nicht ganz doppelt so groß als der wahrscheinliche Fehler. Sie kann also gut noch rein zufällig sein.

Bei Versuch 25 ist das natürlich nicht mehr möglich; die Abweichung beträgt 40 Prozent. Die wenigen ± männlichen Pflanzen verteilten sich auch auf dem Versuchsfeld gleichmäßig unter die Weibchenschar; von den ersten 110 Pflanzen waren z. B. 11 ± männlich und 99 weiblich. Die Ursache für den Überschuß an Weibchen muß irgendwie in dem Pollenträger, der ± männlichen Pflanze (10 D), die zur Bestäubung verwendet worden war, liegen, denn dasselbe Weibchen (7 B) gab ja mit 3 andern ± männlichen Pflanzen die gewöhnliche Prozentzahl weiblicher Nachkommen, zwischen 49.9 und 57.7 Prozent.

Es gibt also bei *Silene Roemeri* mindestens zweierlei ± männliche Pflanzen. Die einen, offenbar häufigeren, geben ungefähr gleich viel weibliche und ± männliche Nachkommen, die anderen, selteneren, bringen ganz überwiegend weibliche hervor, sind thelygen. Wir kennen ein solches Verhalten schon von *Melandrium* her (1922, S. 1050—1164, 1924, S. 76); nur kann es dort noch viel ausgesprochener sein, so daß nur ganz einzelne (dort rein) männliche Nachkommen unter fast lauter weiblichen auftreten.

Es liegt nahe, anzunehmen, daß das Zahlenverhältnis in der Nachkommenschaft verschieden ausfalle, je nachdem die Pflanze, die den Pollen liefert, ganz ausgesprochen männlich ist und kaum ansetzt, oder stark zwittrig ist und guten Ansatz zeigt. Mit anderen Worten, daß, je ausgesprochener männlich der Pollenträger wäre, er um so mehr ± männliche Nachkommen gebe oder umgekehrt. Das ist aber durchaus nicht der Fall. Wie die Tabelle zeigt, ist das Resultat immer nahezu das gleiche. Die Versuche 13, 21, 23 und 24, deren Väter schlecht ansetzten, gaben zusammen unter 893 Pflanzen 475, oder 53.2 Prozent Weibchen; die Versuche 14, 20, 22 und 26, deren Väter gut ansetzten, unter 1075 Pflanzen 549, oder 51.0 Prozent Weibchen. Der Unterschied von 2.2 Prozent kann sehr gut rein zufälliger Natur sein. Die Vorstellung, daß der Grad der Zwittrigkeit, den der Pollenträger noch beibehalten hat, irgendeinen Einfluß auf das Zahlenverhältnis der Geschlechter bei der Nachkommenschaft habe, ist also irrig.

Dagegen spiegelt sich der Grad der Zwittrigkeit des Pollenträgers ganz deutlich in dem Grad der Zwittrigkeit der ± männlichen Nachkommen ab, wenn auch nicht so scharf, als man das vielleicht erwarten würde. Ich stelle aus Tabelle 8 die Kennwerte der leichteren Übersicht wegen zusammen.

Die Unterschiede zwischen den verschiedenen ± männlichen Pflanzen sind geringer, wenn die Nachkommenschaft nicht durch Selbstbefruchtung, sondern durch Befruchtung eines Weibchens entsteht. Welche Rolle aber dabei die Eizellen der Weibchen, besondere erbliche Veranlagungen derselben usw., spielen, ist noch unklar und bedarf genauerer Prüfung. Die Festlegung des Grades der Zwittrigkeit durch die Kennwerte halte ich aber für genügend zuverlässig. Ein-

Tabelle 9.

Pollenträger:		2 C		2 A	2 D	2 G	10 D	2 H		2 B	7 A
Ansatzklasse:		sg!!		sg	sg!!	s—m	ss	ss—o		(fast) o	ss—o
Selbstbefruchtung . .	Vers.-Nr.	17		11, 12	19	18	29	15, 16		—	—
	Kennwert	**3.72**		**3.58**	**3.55**	**1.42**	**0.67**	**0.33**		?	?
Befruchtung eines ♀	Vers.-Nr.	14	26	20	22	27	25	21	13	23	24
	Kennwert	**3.01**	**2.92**	**1.86**	**2.50**	**2.07**	**0.87**	**1.72**	**1.63**	**1.53**	**1.15**
Bestäubtes ♀:		2 L	7 B	7 C	7 C	7 B	7 B	7 C	2 L	7 C	7 B

mal, weil sie zur gleichen Zeit im gleichen Jahr festgestellt wurden, der subjektive Faktor also der gleiche war. Dann, weil sie in den Fällen, in denen zwei verschiedene Weibchen mit Pollen derselben ± männlichen Pflanze bestäubt worden waren, relativ gut übereinstimmten (Versuch 14 mit Versuch 26 und Versuch 13 mit Versuch 21).

Von den Versuchen des Jahres 1920 sollen hier nur folgende besprochen werden.

Eine erste Versuchsreihe umfaßte die Nachkommenschaft von 18 Weibchen aus Versuch 25. Wie wir sahen, hatte dieser eine ganz ungewöhnlich hohe Zahl von Weibchen ergeben, 91 Prozent. Die 18 Weibchen hatten an verschiedenen Stellen des Versuchsbeetes, aber frei abgeblüht und waren erst dann, um den Verlust von Samen zu vermeiden, gesäckt worden. Der Pollen für ihre Bestäubung konnte zum Teil von den wenigen, aber recht gleichmäßig verteilten ± männlichen Stöcken desselben Versuches, zum Teil von anderen Versuchen stammen. Die Blüten werden sehr stark von Insekten, vor allem von der Honigbiene besucht. Die Aussaaten 51—68 sollten prüfen, wieweit die Weibchen als solche bei der Thelygenie beteiligt sein konnten. Das Ergebnis bringt Tabelle 10.

Tabelle 10.

Vers.-Nr.	n	± ♂	♀	Proz.	Vers.-Nr.	n	± ♂	♀	Proz.	Vers.-Nr.	n	± ♂	♀	Proz.
51	216	88	128	**59.0**	57	213	77	136	**63.8**	63	201	94	107	**53.5**
52	213	76	137	**64.2**	58	215	86	129	**60.0**	64	197	68	129	**65.5**
53	226	90	136	**60.2**	59	233	103	130	**55.8**	65	192	76	116	**60.4**
54	230	95	135	**58.7**	60	214	78	136	**63.6**	66	181	74	107	**59.4**
55	227	98	129	**56.8**	61	230	86	144	**62.6**	67	186	73	113	**60.8**
56	214	73	141	**65.6**	62	226	90	136	**60.2**	68	181	69	112	**61.9**

Die Zahl der Weibchen schwankt bei den einzelnen Versuchen zwischen 53.5 Prozent im Minimum (Versuch 63) und 65.5 Prozent im Maximum (Ver-

such 64). Ausgesprochen thelygen war also keines der Weibchen gewesen, die die Samen geliefert hatten.

Insgesamt waren 3795 Nachkommen untersucht worden, von denen 1494, oder 39.4 Prozent, ± männlich und 2301, oder 60.6 Prozent, weiblich waren. Der mittlere Fehler beträgt ± 0.79 Prozent. Legt man das Verhältnis 39.4 : 60.6 zugrunde, so macht er für den einzelnen Versuch, der durchschnittlich 218 Individuen umfaßte, ± 3.23 Prozent aus. Die Ergebnisse der einzelnen Versuche weichen nun im Maximum nach oben um 5.0 Prozent (Versuch 64), nach unten um 7.1 Prozent (Versuch 63) ab, also nur ungefähr um das Doppelte des mittleren Fehlers.

Daß die Prozentzahl der Weibchen höher gefunden wurde als in anderen Versuchen (z. B. denen von Tabelle 8), wird darauf beruhen, daß der Pollen, trotz des außerordentlich regen Insektenbesuches, häufiger von den wenigen ± männlichen Pflanzen derselben Versuchsnummer 25 stammte als von denen der anderen Versuche, und diese wenigen Pflanzen, wie wir noch sehen werden, zum Teil ausgesprochen thelygen waren.

Die ± männlichen Pflanzen dieser Versuche 51—68 wurden auf ihren Ansatz nicht untersucht. Dagegen geschah das besonders sorgfältig mit der Nachkommenschaft von 7 anderen, selbstbestäubten und gut geschützten ± männlichen Stöcken verschiedener Herkunft, die als Pollenträger bei weiteren Versuchen dienen sollten, nämlich bei Versuch 69 bis 75 und 88. Ein Pollenträger, 2 C, ist uns schon von Versuch 17 (Tabelle 7) her bekannt.

Tabelle 11.

Vers.-Nr.	P_1		F_1															
			Ansatz															
	Herkunft	Ansatz	1922								1924							
			± ☿	sg	g	m	s	ss	o	Kennwert	+ ☿	sg	g	m	s	ss	o	Kennwert
69	2 C	sg!!	122	82	37	2	1	—	—	**4.64**	115	107	6	2	—	—	—	**4.91**
			Proz.	*67*	*30*	*2*	*1*	—	—		*Proz.*	*93*	*5*	*2*	—	—	—	
70	2 E	g	124	45	43	24	11	—	1	**3.96**	119	27	36	41	14	—	1	**3.61**
			Proz.	*36*	*35*	*19*	*9*	—	*1*		*Proz.*	*23*	*30*	*35*	*12*	—	*1*	
71	2 F	g	150	19	44	28	28	18	13	**3.13**	130	4	45	46	24	4	7	**3.00**
			Proz.	*13*	*29*	*19*	*19*	*12*	*9*		*Proz.*	*3*	*35*	*35*	*19*	*3*	*5*	
72	10 B	sg	131	1	11	44	45	20	10	**2.21**	101	2	3	23	51	12	10	**2.03**
			Proz.	*1*	*8*	*34*	*34*	*15*	*8*		*Proz.*	*2*	*3*	*23*	*50*	*12*	*10*	
73	3 C	m—s	131	—	1	4	22	35	69	**0.73**	125	—	—	4	9	13	99	**0.34**
			Proz.	—	*1*	*3*	*17*	*27*	*53*		*Proz.*	—	—	*3*	*7*	*10*	*80*	
74	4 C	m	119	1	4	9	41	30	34	**1.34**	50	—	1	3	16	10	20	**1.10**
			Proz.	*1*	*3*	*8*	*35*	*25*	*29*		*Proz.*	—	*2*	*6*	*32*	*20*	*40*	
75	9 A	m—ss	205	—	—	6	67	83	49	**1.12**	171	—	2	14	72	31	52	**1.32**
			Proz.	—	—	*3*	*33*	*41*	*24*		*Proz.*	—	*1*	*8*	*42*	*18*	*30*	
88	5 A	sg-g-m	191	34	69	30	26	13	16	**1.76**								
			Proz.	*18*	*36*	*16*	*14*	*7*	*9*									

Die Nachkommenschaften wurden in drei aufeinanderfolgenden Jahren (1922, 1923 und 1924) untersucht, ausgenommen Versuch 88, der nur einmal revidiert wurde. Bei jeder neuen Aufnahme war das Ergebnis der vorhergehenden für jedes Individuum unbekannt; die Abschätzung geschah also immer wieder ganz unbeeinflußt. In Tabelle 11 sind die Ergebnisse für das erste und das letzte Jahr zusammengestellt. Für jeden Versuch und jedes Jahr ist auch der Kennwert berechnet und aufgenommen.

Wir sehen wieder, daß richtige weibliche Pflanzen ganz fehlen; alle 1173 haben ein gut ausgebildetes Androeceum, gewöhnlich in allen Blüten oder doch in einem Teil, dies bei der Nachkommenschaft der gynomonözischen bis trimonözischen Pflanze 2C, die wieder ± trimonözisch war. Je besser der Ansatz der Stammpflanze war, desto besser ist auch der Ansatz bei ihren Nachkommen. Das Ergebnis ist also das gleiche wie bei den früheren entsprechenden Versuchen.

Die beiden mitgeteilten Aufnahmen stimmen ziemlich gut überein, was die Verteilung der Individuen auf die 6 Klassen anbetrifft, obwohl ein Jahr dazwischen lag. Das zeigt sich auch beim Vergleich der Kennwerte, die ich in Tabelle 12 noch einmal besonders zusammenstelle.

Tabelle 12.

Versuch		69	70	71	72	73	74	75	
Kennwerte	1922.....	4.64	3.96	3.13	2.21	0.73	1.34	1.12	Aussaat I 1921
	1924.....	4.91	3.61	3.00	2.03	0.34	1.10	1.32	
	1924.....	4.7	4.0	—	1.98	0.4	0.8	—	Aussaat II 1923
Versuchspflanze...		2C	2E	2F	10B	3C	4C	9A	

Der Raumersparnis halber sind auch gleich die Ergebnisse einer neuen Aussaat derselben Versuche aufgenommen; für zwei war kein Saatgut mehr vorhanden. Sie wurde 1923 gemacht und konnte 1924 nur zum erstenmal revidiert werden. Auch ihre Kennwerte stimmen gut zu den früher gewonnenen.

1923 hatte nicht ich selbst, sondern eine Hilfskraft die Versuche 69—75 revidiert, und diese Aufnahmen weichen stärker ab, ein Beweis für das subjektive Moment, das bei solchen Abschätzungen immer eine Rolle spielen wird. Die gröberen Unterschiede zwischen den verschiedenen Versuchen treten aber auch hier deutlichst hervor.

Indem ich die übrigen Versuche des Jahres 1921 übergehen muß, wende ich mich zu denen des Jahres 1922. Die Pflanzen haben 1924 noch nicht alle geblüht, und die Beurteilung des Ansatzes der ± männlichen Pflanzen konnte nur einmal vorgenommen werden. Ich bringe die Ergebnisse deshalb in gekürzter Form und behalte mir vor, später auf diese Versuche zurückzukommen.

Zunächst konnten die Versuche 69, 70, 72, 73, 74 (Nachkommenschaft ± männlicher Pflanzen, Tabelle 11) mit Resten des alten Saatgutes wiederholt werden. Das Ergebnis war das gleiche; die Kennwerte der einzelnen Nachkommenschaften (69b = 145, 70b = 227, 72b = 148, 73b = 131, 74b = 30 Individuen) sind schon in Tabelle 12 mitgeteilt worden.

Auch für eine Anzahl neuer ± männlicher Pflanzen, zusammen 19, war die Nachkommenschaft durch Isolierung in Pergaminsäcken, zum Teil unter Nachhilfe durch Selbstbestäubung, erzielt und durch Aussaat geprüft worden. Wie zu erwarten war, traten stets nur ± männliche Pflanzen auf, gleichgültig, woher die Samen stammten, ob von Stöcken, die aus der Verbindung eines Weibchens mit einer ± männlichen Pflanze hervorgegangen waren, oder durch Selbstbefruchtung einer solchen Pflanze. Vor allem verhielten sich so auch 12 von den wenigen ± männlichen Individuen, die in Versuch 25 (Tab. 8) neben vielen (91 Prozent) Weibchen hervorgegangen waren. Im allgemeinen war, dem stark männlichen Verhalten der Samenträger entsprechend, die Ausbeute nur gering, und mit ihr die Nachkommenschaft bei den einzelnen Versuchen klein, oft sehr klein. Einige Kennwerte sind in die Tabelle 16 (S. 249) aufgenommen.

Es wurden ferner von einer Anzahl ± männlicher Pflanzen, die guten Ansatz zeigten, Rispenabschnitte sorgfältig kastriert und, genügend geschützt, mit dem Pollen anderer ± männlicher Pflanzen belegt, die schlechten Ansatz aufwiesen. Andere Rispen, sowohl der bestäubten als der bestäubenden Stöcke, waren in Pergaminsäcken geschützt und zum Teil noch besonders selbstbestäubt worden; sie gaben das Vergleichsmaterial ab.

Die Ergebnisse sind in Tabelle 12 für einen Teil dieser Versuche zusammengestellt. Alle Nachkommen waren, wie nach den übrigen Erfahrungen zu erwarten war, ± männlich.

Tabelle 13.

Vers.-Nr.	P_1				F_1	Ansatz						
	Vers.-Pflanze	Ansatz	bestäubt mit	Ansatz	n	sg	g	m	s	ss	o	Kennwert
69b	2 C	sg!!	sich selbst		148	113	25	6	—	—	1	**4.7**
135	2 C	sg!!	2 H	ss—o	77	2	4	33	27	5	5	**2.4**
139	2 H	ss—o	sich selbst		48	—	—	—	4	19	25	**0.6**
69b	2 C	sg!!	sich selbst		148	113	25	6	—	—	1	**4.7**
136	2 C	sg!!	3 D	ss—o	207	—	23	119	56	6	1	**2.8**
161	3 D	ss—o	sich selbst		89	—	—	—	—	5	83	**0.06**
70b	2 E	m—g	sich selbst		227	64	105	56	2	—	—	**4.0**
137	2 E	m—g	2 H	ss—o	237	3	3	38	136	41	7	**1.99**
139	2 H	ss—o	sich selbst		48	—	—	—	4	19	25	**0.6**
70b	2 E	m—g	sich selbst		227	64	105	56	2	—	—	**4.0**
138	2 E	m—g	10 D	ss—f. o	225	2	5	50	141	21	4	**2.2**
180	10 D	ss—f. o	sich selbst		17	1	1	1	—	—	13	**0.75**
159	4 A	sg	sich selbst		117	—	21	49	42	3	1	**2.74**
160	4 A	sg	3 D	ss—o	109	—	1	2	49	23	34	**1.20**
161	3 D	ss—o	sich selbst		89	—	—	—	—	5	83	**0.06**

Die Bestäubung mit dem Pollen eines schlecht ansetzenden Stockes gibt also bei einem gut ansetzenden eine Nachkommenschaft, die schlechter ansetzt

als es die mit eigenem Pollen erzeugte Nachkommenschaft dieses gut ansetzenden Stockes tut, aber besser als die Nachkommenschaft des schlecht ansetzenden Pollenträgers. Sie steht in ihrer Zwittrigkeit zwischen den Nachkommenschaften der Eltern, den Kennwerten nach ungefähr in der Mitte. Die Individuen, aus denen sie besteht, verteilen sich über mehr Ansatzklassen, meist über die ganze Skala, und die Frequenz ist am größten in einer mittleren Klasse, die in der Nachkommenschaft der Eltern fehlt oder doch schwach vertreten ist.

Auffälliger als in den Tabellen ist die Mittelstellung der Bastarde bei graphischer Darstellung, wie Textabbildung 4 sie für zwei solche Versuche bringt.

Fig. 4. Ansatz ± männlicher Pflanzen. a, b die Nachkommenschaft der bei den Eltern, c die Bastarde a × b. Auf der Abszissenachse sind die Ansatzklassen (von sehr gut [sg] bis null [o]) aufgetragen, als Ordinaten die Frequenz in den einzelnen Klassen, in Prozenten. *A* Versuch 69 b (a), 139 (c) und 135 (b); *B* Versuch 159 (a), 161 (c) und 160 (b).

Wie verschieden die Nachkommenschaft ein und desselben ± männlichen Individuums ausfallen kann, je nach der Herkunft des Pollens, lehrt auch die folgende Tabelle 14. Sie bezieht sich auf eine merkwürdige Pflanze, 10 C, die zwar, wie viele andere, stark zwittrig war, bei der die Antheren aber gewöhnlich deutlich etwas rückgebildet, »kontabeszent«, und dunkelgelb waren und nicht aufsprangen. Immerhin gab es zeitenweise auch Blüten mit einzelnen völlig tauglichen Staubbeuteln — gewöhnlich waren es epipetale — und sogar solche, in denen alle 10 ganz normal waren und aufsprangen. Von den gynomonözischen und trimonözischen Stöcken, wie 2 C, war die Pflanze deutlichst verschieden; echte weibliche Blüten fehlten.

Einige Triebe wurden, soweit nötig, kastriert und mit dem Pollen anderer ± männlicher Pflanzen bestäubt; außerdem wurden zwei geputzte und

geschützte Infloreszenzen sorgfältig selbstbestäubt, so oft es Pollen gab. Der Blütenstaub für die Fremdbestäubungen kam meist von ± männlichen Stöcken, die sehr wenig zwittrig waren, von denen also nur eine geringe Nachkommenschaft aufgezogen werden konnte, so daß ihre Kennwerte wenig sicher sind.

Tabelle 14.
Nachkommen der ± männlichen Pflanze 10 C
nach verschiedenartiger Bestäubung.

Vers.-Nr.	P_1			F_1							
					Ansatz						
	Pollenträger	Ansatz	Kennwert	n	sg	g	m	s	ss	o	Kennwert
174	selbst	sg—g	**0.22**	134	—	1	1	4	15	113	**0.22**
175	4 C	ss—o	**0.8**	166	—	—	1	44	30	89	**0.74**
176	10 D	ss	**0.75**	151	7	16	22	23	16	65	**1.52**
177	25 F	s—ss—o	**3.0**	148	61	46	19	19	—	2	**3.97**
178	25 M	f. o—o	**0.3**	113	1	1	1	1	16	92	**0.27**
179	26 D	s—ss	**0.8**	118	—	—	8	19	20	70	**0.70**

Besonders auffallend ist die Nachkommenschaft, die 10 C bei Selbstbefruchtung gab. Ich hatte nach dem guten und sehr guten Ansatz auch bei den Nachkommen überwiegend guten und sehr guten Ansatz erwartet, etwa den Kennwert 4. Statt dessen stehen 84 Prozent aller Nachkommen in der letzten Klasse (»null« und »null bis sehr schlecht«), so daß nur der Kennwert 0.22 herauskommt.

Zu diesem Ergebnis stimmt aber das eines weiteren Versuches: der Pollen der Pflanze 10 C wurde nämlich auch zur Bestäubung eines Weibchens benutzt (Versuch 144). Er gab dann unter 202 Nachkommen etwa zur Hälfte Weibchen (105 = 52 Prozent) und zur Hälfte ± männliche Individuen, wie zu erwarten war. Diese setzten aber nur schlecht bis gar nicht an (sg 0, g 0, m 1, s 28, ss 30, null 38; Kennwert 0.9). Das Ergebnis war also etwas, aber nur wenig besser, als wenn die Nachkommenschaft von 10 C durch Selbstbestäubung erhalten worden war (Tabelle 14, Versuch 174).

Die Versuche, bei denen ± männliche Stöcke untereinander gekreuzt wurden, können auch noch zur Entscheidung einer weiteren Frage dienen. Wir fanden, daß die Keimlinge und Sämlinge der ± männlichen Pflanzen weniger lebensfähig sind als die der weiblichen (S. 235). Das könnte darauf beruhen, daß sie ausschließlich oder überwiegend durch Selbstbefruchtung entstanden sind, oder es könnte ein sekundäres Geschlechtsmerkmal der ± männlichen Pflanzen sein. Bei den Kreuzungsversuchen ist die Wirkung der Selbstbefruchtung ausgeschlossen. Die einschlägigen Versuche sind in Tabelle 15 nochmals zusammengestellt. Aufgenommen wurden diesmal aber nur die Zahl der 1923 ausgesäten Samen und die Zahl der Rosetten, die im Sommer 1924 vorhanden waren, direkt und in Prozenten der Samenzahl. (Die Individuenzahlen stimmen mit denen der Tabellen 13 und 14 nicht überein, weil diesmal die »trotzenden« Rosetten mitgezählt wurden, die natürlich dort fehlen.)

Tabelle 15.

P₁ ♀					F₁					P₁ ♂				
Vers.-Nr.	selbst-bestäubt	Samen	Rosetten	Prozent	Vers.-Nr.	bestäubt mit	Samen	Rosetten	Prozent	Vers.-Nr.	selbst-bestäubt	Samen	Rosetten	Prozent
69b	2 C	250	222[1]	**89**	135	2 H	108	94[2]	**87**	139	2 H	65	51	**78**
					136	3 D	250	214	**86**	161	3 D	183	118	**64**
70b	2 E	250	241	**96**	137	2 H	250	235	**94**	139	2 H	65	57[3]	**88**
					138	10 D	250	234	**94**	180	10 D	43	20	**47**
159	4 A	250	146	**58**	160	3 D	229	156	**68**	161	3 D	183	118	**64**
					175	4 C	250	190	**76**	—	4 C	—	—	—
					176	10 D	250	178	**71**	180	10 D	43	20	**47**
174	10 C	250	184	**74**	177	25 F	250	185	**74**	188	25 F	36	12[4]	**33**
					178	25 M	250	162	**65**	191	25 M	15	10	**67**
					179	26 D	250	143	**57**	197	26 D	250	149	**60**

[1] Einschließlich 24 albino. [2] Einschließlich 12 albino. [3] einschließlich 6 albino. [4] einschließlich 6 albino.

Man sieht: die Fremdbefruchtung hat die Zahl der Rosetten aus 100 Samen gegenüber der Selbstbefruchtung bald etwas gesteigert, bald etwas herabgedrückt. Die Folgen der Selbstbefruchtung können also keine große Rolle spielen, und die geringere Lebenszähigkeit der ± männlichen Pflanzen scheint im Wesentlichen ein sekundärer Geschlechtscharakter zu sein.

Sehr auffallend ist die große Prozentzahl Rosetten, die der sehr gut ansetzende Stock 2 E gegeben hat; er verhielt sich darin ganz wie ein Weibchen. Die übrigen ± männlichen Pflanzen gaben dagegen wie die früher besprochen (S. 238) viel weniger Rosetten, zwischen 50 und 89 auf 100 Samen, einmal sogar nur 33, freilich zum Teil bei sehr kleinen Gesamtzahlen.

Weitere Versuche sollten zeigen, wodurch die Thelygenie, das ganz auffallende Überwiegen der Weibchen, bei Versuch 25 (Tabelle 8) bedingt war. Es wurden Weibchen verschiedener Herkunft, zum Teil auch solche aus Versuch 25, mit Pollen von 12 ± männlichen Stöcken dieses Versuches 25 bestäubt und außerdem mit dem Pollen von 8 ± männlichen Stöcken des Versuches 26 (Tab. 8), der etwa gleich viel Weibchen und ± männliche Pflanzen (52.5 Prozent) gegeben hatte, und zwar so, daß wenigstens ein Teil der Weibchen sowohl Pollen aus Versuch 25 als aus Versuch 26 erhielt. Die beiden Versuche stammten von demselben Weibchen (7 B) ab, nur war der Pollenträger jedesmal ein anderer gewesen.

Die Ergebnisse bringt Tabelle 16.

Es sind also in einzelnen Versuchen wieder ganz überwiegend Weibchen aufgetreten. Am meisten bei Versuch 173 und 181, wo derselbe Pollenträger, 25 E, beteiligt war, und die 94.4 und 92.2 Prozent gaben. Auch die Versuche 164, 166, 172, 183 und 186 gaben sehr viel Weibchen, zwischen 71.6 und 88.3 Prozent. Der Pollen stammte in all diesen Fällen von ± männlichen Pflanzen aus dem Versuch 25. Die Nachkommenschaften, bei denen ± männ-

Tabelle 16.

± ♂		♀ verschiedener Herkunft							♀ aus Vers. 25						
Vers.-Pfl.	Kennwert	Vers.-Pfl.	Vers.-Nr.	n	± ♂	Kennwert	♀	Proz. ♀	Vers.-Pfl.	Vers.-Nr.	n	± ♂	Kennwert	♀	Proz. ♀
25 C	0.3	3 G	172	141	40	0.3	101	**71.6**	25 B	183	103	12	0.25	91	**88.3**
25 E	—	3 H	173	125	7	0.0	118	**94.4**	25 A	181	51	4	0.0	47	**92.2**
25 F	3.0	7 B	164	138	33	0.2	105	**76.1**							
25 G	—	7 B	165	185	67	0.5	118	**63.8**							
25 H	—	7 B	166	105	28	0.2	77	**73.3**							
25 J	0.9	7 B	167	139	47	0.3	92	**66.2**	25 D	186	111	27	0.15	84	**75.7**
25 K	—	2 M	148	228	107	0.8	121	**53.1**							
25 L	0.0	2 M	149	191	90	1.8	101	**52.9**							
25 M	0.3	2 M	150	169	83	0.9	86	**50.9**							
25 N	0.6	2 M	151	224	111	1.6	113	**50.4**							
25 O	—	2 M	152	223	121	1.0	102	**45.7**							
25 P	0.7	2 M	153	225	131	1.1	94	**41.8**							
26 A	0.9	7 B	168	179	90	0.5	89	**49.7**							
26 B	1.4	7 B	169	204	89	0.8	115	**56.4**	25 B	184	141	49	1.1	92	**65.2**
26 C	1.8	7 B	170	216	85	1.1	131	**60.6**							
26 D	0.8	7 B	171	206	83	0.9	123	**59.7**							
26 E	2.0	2 M	154	163	88	1.6	75	**46.0**	25 D	187	98	38	1.1	60	**61.2**
26 F	2.5	2 M	155	397	211	1.7	183	**46.1**							
26 G	1.2	2 M	156	160	73	0.8	87	**54.4**	25 A	182	147	65	1.0	82	**55.8**
26 H	1.3	2 M	157	182	77	1.4	105	**57.7**							

liche Stöcke aus dem Versuch 26 beteiligt waren, gaben nie so viel Weibchen; am meisten noch die Versuche 184 mit 65.2 Prozent und 187 mit 61.2 Prozent. Daraus geht die Abhängigkeit der Thelygonie von der Pflanze, die den Pollen geliefert hat, hervor. (Auch bei *Melandrium* hat sie sich als abhängig vom Pollenträger herausgestellt.)

Andererseits muß folgendes auffallen: Alle hohen Prozentzahlen an Weibchen wurden entweder mit den drei Weibchen, die aus Versuch 25 stammten, oder mit den drei Weibchen 3 G, 3 H und 7 B erhalten. Mit dem Weibchen 2 M dagegen gaben die 6 ± männlichen Stöcke aus Versuch 25, die damit geprüft worden waren, alle etwa gleich viel weibliche und ± männliche Pflanzen (zwischen 41.8 und 53.1 Prozent). Ferner gab der ± männliche Stock 26 B mit einem Weibchen aus Versuch 7 56.4 Prozent, mit einem aus Versuch 25 dagegen 65.2 Prozent und der ± männliche Stock 26 E mit einem Weibchen aus Versuch 2 46.0 Prozent, mit einem aus Versuch 25 dagegen 61.2 Prozent. Es kann das alles nur Zufall sein, legt aber doch die Vermutung nahe, daß auch der Zustand des Weibchens, das die Eizellen liefert, von Einfluß ist. Man würde dann die extrem hohen Prozentzahlen an Weibchen nur bei der Verbindung bestimmter ± männlicher Pflanzen mit bestimmten Weibchen erhalten.

Ob ein Pollenträger thelygen ist oder nicht, hängt mit dem Grade, bis zu dem er noch zwittrig ist, also taugliche Gynäzeen bildet, ganz und gar nicht zusammen. 2 C, der erste thelygene Stock, den wir kennenlernten,

der Pollenträger bei Versuch 25, setzte besonders gut an, ja war trimonözisch. 25 C und 25 E dagegen, die Pollenträger für die Versuche 172 und 183 einerseits und 173 und 181 andererseits, zeigten besonders wenig Ansatz, »fast null bis null«. Dementsprechend hatte 25 C nur den Kennwert 0.3; von 25 E konnte ich gar keine Nachkommen aufziehen.

Ein ± männlicher Stock kann auf zweierlei Weise entstehen: einmal durch Befruchtung eines Weibchens mit dem Pollen eines solchen ± männlichen Stockes, und dann durch Selbstbefruchtung oder durch Befruchtung mit dem Pollen eines andern solchen Stockes. Es sollen nun in Tabelle 17 noch einige Versuche verglichen werden, bei denen Weibchen mit dem Pollen von Stöcken bestäubt worden waren, die auf die eine oder die andere Art entstanden waren.

Tabelle 17.

Vers.-Nr.	P_1				F_1											
	♀ Vers.-Pfl.	bestäubt mit			n	± ♂	Ansatz						Kennwert	♀	Prozent	m ±
		Vers.-Pfl.	Ansatz	Kennwert			sg	g	m	s	ss	o				
140 141	2 J	2 E	m—g	4.0	450	244	35	59	42	77	22	5	3.0	206	**45.7**	2.3
142	2 J	4 A	sg—g	2.7	233	113	—	1	12	78	15	6	1.9	120	**51.5**	3.3
143	2 J	4 C	ss—o	0.8	192	101	—	1	—	33	27	40	1.0	91	**47.4**	3.6
145	2 L	2 H	ss—o	2.0	332	156	—	—	2	24	35	94	0.6	176	**53.0**	2.7
146	2 L	3 D	ss—o	0.1	172	93	—	—	3	27	30	32	1.1	79	**45.9**	3.8
158	2 N	2 C	sg!!	4.7	369	180	17	43	41	53	12	12	2.8	189	**51.2**	2.6
162	7 B	3 C	m	0.4	157	38	—	—	—	—	6	32	0.2	119	**75.8**	3.4
147	2 L	10 D	ss—o	0.8	207	113	—	—	3	28	30	51	0.8	94	**45.4**	3.5
163	7 B	10 B	m	2.0	152	45	—	1	—	20	12	12	1.24	107	**70.4**	3.7

Man sieht, die beiden Pollenträger 10 B und 10 D, die durch Selbstbefruchtung eines ± männlichen Stockes entstanden waren, verhalten sich nicht anders als die Pollenträger, die von Weibchen hervorgebracht worden sind. Im allgemeinen schwankt die Zahl der Weibchen nur wenig um 50 Prozent herum. 2 ± männliche Pflanzen gaben mit demselben Weibchen (7 B) über 70 Prozent Weibchen (3 C, Versuch 162 und 10 B, Versuch 163); die eine war aber auf die eine, die andere auf die andere Art entstanden. Und so ist es nur ein Zufall, daß bei einem früheren Versuchspaar (24 und 25, Tabelle 8), bei dem auch ein Weibchen mit dem Pollen zweier männlicher Stöcke der einen (7 A) und der andern Art (10 D) bestäubt worden war, der eine Versuch sehr viel mehr Weibchen hervorgebracht hatte als der andere; der eine Pollenträger war eben **thelygen**, der andere nicht.

Die beiden Haupttypen der ± männlichen Pflanzen, ihrer Herkunft nach, verhalten sich also auch in diesem Punkte (der Prozentzahl weiblicher Pflanzen, die sie bei Befruchtung eines Weibchens geben) gleich.

III.

Zusammenfassung.

I, 1. *Silene Roemeri* besteht teils aus rein weiblichen, teils aus andromonözischen Individuen (mit männlichen und zwittrigen Blüten), ist also subdiözisch. Bei den ± männlichen Stöcken ist das Zahlenverhältnis von männlichen und zwittrigen Blüten sehr verschieden; sie schwanken zwischen sehr stark zwittrig und rein männlich. Meist überwiegen aber die männlichen Blüten sehr stark oder sind fast allein vorhanden.

I, 2. Dasselbe ± männliche Individuum wird in verschiedenen Jahren (bei immer neuer, unabhängiger Abschätzung) annähernd gleich stark zwittrig gefunden. Dieser Grad, bis zu dem die Zwittrigkeit bei den sonst männlichen Stöcken erhalten bleibt, ist weitgehend erblich bedingt.

I, 3. Die Zwitterblüten treten als die letzten an den Teilblütenständen auf, die die Blütenrispe zusammensetzen, besonders reichlich in der Mitte der Rispe (Abb. 3).

I, 4. Die Kapseln, die aus den Zwitterblüten hervorgehen, sind im Durchschnitt deutlich kleiner und samenärmer als die der weiblichen Stöcke. Es klafft jedoch eine weite Lücke zwischen den rudimentären Fruchtknoten der männlichen Blüten und den schlechtesten Kapseln der zwittrigen Blüten.

I, 5. Die ± männlichen Pflanzen beginnen vor den weiblichen zu blühen. Sie sind im Durchschnitt etwas schwächer (niedriger); ihre Samen sind merklich leichter und keimen etwas schlechter, die Sämlinge sind deutlich weniger lebensfähig.

I, 6. Einzeln treten auch trimonözische Individuen (mit weiblichen, zwittrigen und männlichen Blüten) auf und stark männliche mit teilweise untauglichen, »kontabeszenten«, Staubbeuteln.

II, 1. Die weiblichen Stöcke geben mit dem Blütenstaub der ± männlichen gewöhnlich annähernd zur Hälfte weibliche, zur Hälfte ± männliche Nachkommen.

II, 2. Selten erhält man eine Nachkommenschaft, die ganz überwiegend aus Weibchen besteht. Diese Thelygenie hängt nachgewiesenermaßen vom Pollenträger ab; vielleicht spielt auch die Beschaffenheit der Mutterpflanze eine Rolle.

II, 4. Alle untersuchten ± männlichen Stöcke brachten mittels ihrer Zwitterblüten nur wieder ± männliche Nachkommen hervor. Diese glichen, wenn sie durch Selbstbestäubung entstanden waren, in der Fähigkeit, Zwitterblüten hervorzubringen, im Durchschnitt dem Stock, von dem sie abstammen. Gut ansetzende gaben also eine im Mittel gut ansetzende, schlecht ansetzende eine schlecht ansetzende Nachkommenschaft, wenn auch Individuen, die stark, oft sehr stark abwichen, reichlich vertreten waren.

II, 6. Die ± männliche Nachkommenschaft, die eine ± männliche Pflanze mit einem Weibchen gab, verhielt sich oft merklich verschieden von der, die diese ± männliche Pflanze bei Selbstbefruchtung hervorbrachte; sie konnte im Durchschnitt besser und schlechter ansetzen (Tab. 9). (Der Charakter des Pollenträgers blieb aber immer noch deutlich.) Das spricht dafür, daß auch das Weibchen eine verschiedene Veranlagung zu besserem oder schlechterem Ansatz besitzen und übertragen kann.

II, 3. Der Grad, bis zu dem der Pollenträger noch zwittrig ist, hat auf das Zahlenverhältnis der weiblichen und ± männlichen Nachkommen gar keinen Einfluß; sehr gut und sehr schlecht ansetzende Stöcke können das gleiche Verhältnis geben.

II, 5. Bastardiert man eine gut ansetzende Pflanze mit einer schlecht ansetzenden, so steht die Nachkommenschaft nach ihrem Verhalten ungefähr in der Mitte zwischen den Nachkommenschaften, die die Eltern bei Selbstbefruchtung geben, zeigt aber gewöhnlich eine viel größere Variationsbreite als diese (Tab. 13 und Abb. 4).

II, 7. Wie eine ± männliche Pflanze entstanden ist, ob durch Selbstbefruchtung (und durch Befruchtung mit dem Pollen eines anderen ± männlichen Stockes) oder durch Befruchtung eines Weibchens, hat auf ihr Verhalten gar keinen nachweisbaren Einfluß.

II, 8. Thelygene ± männliche Stöcke können noch sehr stark zwittrig (selbst trimonözisch) oder sehr stark, fast rein männlich sein.

Die Tatsachen legen, zusammengenommen, einstweilen für das gewöhnliche Verhalten die Vorstellung nahe, daß das eine Geschlecht homogametisch, das andere (nach der Analogie von *Melandrium* wohl das ± männliche) heterogametisch ist und Keimzellen bildet, die zur Hälfte weibchenbestimmend, zur Hälfte männchenbestimmend sind. Durch die Vereinigung der heterogametischen mit den homogametischen Keimzellen entsteht das normale Verhältnis von ungefähr 50 Prozent weiblicher und 50 Prozent ± männlicher Pflanzen. Diese ± männlichen Stöcke sind nicht rein männlich, weil daneben mehrere, vielleicht viele selbständige Anlagen vorhanden sind, die den (wie wir sahen, weitgehend erblichen) Grad der Zwittrigkeit, den die ± männlichen Pflanzen noch zeigen, bestimmen. Das alles zu begründen und genauer auszuführen, hat erst nach weiteren Untersuchungen rechten Sinn.

Literatur.

C. Correns, 1916. Untersuchungen über Geschlechtsbestimmung bei Distelarten. Sitzungsber. d. Kön. Preuß. Akad. d. Wiss. XX, S. 448 (Ges. Abh. S. 822).

—, 1922. Alkohol und Zahlenverhältnis der Geschlechter bei einer getrennt-geschlechtigen Pflanze (*Melandrium*). Naturwissenschaften Heft 49, S. 1049 (Ges. Abh. S. 1162).

—, 1924. Über den Einfluß des Alters der Keimzellen. I. Dritte Fortsetzung der Versuche zur experimentellen Verschiebung des Geschlechtsverhältnisses. Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. IX, S. 70.

Über die Harmonie des Thetasystems.

Von F. SCHOTTKY.

Zweite Mitteilung.

(Vorgetragen am 12. Februar 1925 [s. oben S. 60].)

12. Die Theta sind definiert als ganze Transzendenten, deren Quadrate einander gleichändrig sind in bezug auf die Perioden der Klassenfunktionen. Die ϑ selbst haben diese Eigenschaft nicht, der Quotient zweier ist nie Klassenfunktion. Durch die gegebene Definition sind sie nicht völlig bestimmt, der analytische Ausdruck eines jeden enthält einen willkürlichen konstanten Faktor, aber wir nehmen diese Faktoren als gegeben an.

Man kann das System etwas allgemeiner machen, indem man allen seinen Gliedern einen Exponentialfaktor hinzufügt, dessen Exponent eine willkürliche homogene quadratische Funktion ist, und auch dadurch, daß man die Veränderlichen einer homogenen linearen Transformation unterwirft. Die wesentlichen Eigenschaften werden dadurch nicht geändert, wir bleiben deshalb bei dem System, zu dessen Gliedern das RIEMANNsche $\vartheta(v_1, v_2 \cdots v_n)$ gehört.

Wir verfahren zunächst so, als ob es sich nur um die vier elliptischen ϑ handelte. Zu jeder halben Periode $\frac{1}{2}p$ gehört ein bestimmter Faktor E, der eine Exponentialgröße mit homogenem linearen Exponenten oder gleich 1 ist. Er ist dadurch eindeutig bestimmt, daß, wenn A irgendeins der ϑ bedeutet, immer $E^2 A(v+\frac{1}{2}p) = A(-v+\frac{1}{2}p)$ und demnach $EA(v+\frac{1}{2}p)$ eine grade oder ungrade Funktion ist. Diese ist bis auf einen konstanten Faktor mit einem der andern ϑ identisch: $EA(v+\frac{1}{2}p) = \text{Const.}\, B(v)$. Wenn nicht nur p, sondern auch $\frac{1}{2}p$ eine ganze Periode ist, ist B gleich A.

Aus der aufgestellten Gleichung folgt, da A und B grade oder ungrade Funktionen sind, indem man v durch $-v-\frac{1}{2}p$ ersetzt: $EB(v+\frac{1}{2}p) = \text{Const.}\, A(v)$. Die halbe Periode bewirkt demnach eine Permutation des ganzen Systems, bei der die einzelnen ϑ sich paarweise vertauschen. Die Permutation bleibt dieselbe, wenn man die halbe Periode durch eine ihr kongruente ersetzt. Eine zu $\frac{1}{2}p$ inkongruente $\frac{1}{2}p'$ führt dagegen A in ein von B verschiedenes Theta C über. Da es $4^n - 1$ Scharen untereinander kongruenter halber Perioden gibt, so hat man ebenso viele wirkliche Permutationen. Zu ihnen tritt noch eine ideelle hinzu, die Permutation 0, auch die identische genannt, die alle ϑ ungeändert läßt und die der Schar der ganzen Perioden entspricht. Wenn man diese mit einrechnet, ist die Anzahl der Permutationen ebenso groß wie die der Theta.

In den Gleichungen

$$EB(v+\tfrac{1}{2}p) = \text{Const. } A(v), \quad E'A(v+\tfrac{1}{2}p') = \text{Const. } C(v)$$

können A, B, C irgend drei voneinander verschiedene ϑ sein. Sind sie gegeben, so sind durch die beiden Gleichungen zwar nicht $\frac{1}{2}p$ und $\frac{1}{2}p'$, aber doch die Scharen, denen diese halben Perioden angehören, eindeutig bestimmt. Wir ziehen aus den beiden Formeln die Folgerung:

$$EE'B(v+\tfrac{1}{2}p+\tfrac{1}{2}p') = \text{Const. } C(v).$$

Zu den beiden Permutationen, von denen die eine B in A, die andere A in C überführt, tritt demnach eine dritte, die unmittelbar von B zu C führt. Man nennt sie die aus den beiden anderen zusammengesetzte. Der Zusammensetzung entspricht die Addition der zugehörigen halben Perioden. Die Zusammensetzung aller drei gibt die Permutation o, denn $\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}p'+\frac{1}{2}(p+p')$ ist eine ganze Periode.

Ist D dasjenige ϑ, das aus C durch dieselbe Permutation hervorgeht, wie B aus A, so hat man die beiden Gleichungen:

$$EA(v+\tfrac{1}{2}p) = \text{Const. } B(v), \quad EC(v+\tfrac{1}{2}p) = \text{Const. } D(v).$$

Daraus folgt für die Quotienten

$$\frac{C}{A} = f, \quad \frac{D}{B} = g:$$

$$f(v+\tfrac{1}{2}p) = \text{Const. } g(v).$$

Da $f(v+\frac{1}{2}p)$, wie allgemein $f(v+v')$, mit $f(v)$ gleichändrig ist, so ist der Quotient von f und g,

$$\psi(v) = \frac{BC}{AD}$$

eine Klassenfunktion, und dadurch ist D eindeutig bestimmt, wenn A, B und C gegeben sind.

Wenn also D aus C durch dieselbe Permutation hervorgeht, wie B aus A, so ist der Quotient $\psi(v)$ eine Klassenfunktion. Umgekehrt, wenn $\psi(v)$ Klassenfunktion ist, sind die beiden Permutationen einander gleich. Denn angenommen, die Permutation, die A mit B vertauscht, führe C in ein von D verschiedenes Theta D' über, so wäre neben $\psi(v)$ auch der Quotient

$$\frac{BC}{AD'}$$

eine Klassenfunktion. Daraus würde folgen, daß D' mit D gleichändrig wäre; ein von D verschiedenes ϑ ist aber immer ungleichändrig D.

Durch Vertauschung der Größen A, B, C, D in dem Ausdruck $\psi(v)$ bekommt man im ganzen sechs Funktionen. Sie sind alle Klassenfunktionen; denn der Quotient zweier enthält nur Thetaquadrate, und diese sind untereinander gleichändrig. Aus dieser Symmetrie geht hervor:

Wenn $\psi(v)$ Klassenfunktion ist, so gehen durch jede Permutation, die zwei der Größen A, B, C, D miteinander vertauscht, auch die beiden andern ineinander über.

Ferner: Geht durch eine Permutation zugleich A in B und C in D über, so gilt dasselbe von den Paaren A, C und B, D.

Wir sagen: Wenn $\psi(v)$ Klassenfunktion ist, so bilden A, B, C, D eine geschlossene Reihe von Thetafunktionen.

Bei den Theta von einer Veränderlichen hat man nur eine solche Reihe, und die zugehörige Klassenfunktion ist ungrade. Ist $n > 1$, so hat man zwei Arten zu unterscheiden, nach dem von FROBENIUS aufgestellten Ausdruck: syzygetische und azygetische viergliedrige geschlossene Reihen, je nachdem $\psi(v)$ eine grade oder ungrade Funktion ist.

Jedenfalls ist $\psi(-v) = \varepsilon\psi(v)$, und $\varepsilon = +1$ oder -1, je nachdem die Reihe syzygetisch ist oder nicht. Dies Zeichen ε hängt nur von den Permutationen α und β ab, die A in B und A in C überführen. Diejenige, die A in D überführt, und zugleich B in C, ist die aus beiden zusammengesetzte $\alpha\beta$.

Wir bezeichnen allgemein, wenn A irgendein ϑ ist, und α irgendeine Permutation, mit A_α dasjenige ϑ, das aus A durch die Permutation α entspringt. Hiernach ist: $B = A_\alpha$, $C = A_\beta$, $D = A_{\alpha\beta}$, und:

$$\psi(v) = \frac{A_\alpha A_\beta}{A A_{\alpha\beta}}.$$

Nehmen wir statt A irgendeine andere Thetafunktion A' und bilden entsprechend:

$$\psi'(v) = \frac{A'_\alpha A'_\beta}{A' A'_{\alpha\beta}},$$

so wird durch dieselbe Permutation α A in A_α, A' in A'_α übergeführt. Also geht durch die Permutation γ, die A in A' überführt, auch A_α in A'_α über, ebenso A_β in A'_β, $A_{\alpha\beta}$ in $A'_{\alpha\beta}$, und ψ in ψ'. Vermehrt man v um eine der halben Perioden, die der Permutation γ entsprechen, so geht dadurch $\psi(v)$ in Const. $\psi'(v)$ über. Eine grade periodische Funktion von v bleibt aber grade, wenn man v um eine halbe Periode vermehrt, eine ungrade bleibt ungrade; wenn daher $\psi(-v) = \varepsilon\psi(v)$ ist, so ist, mit demselben Vorzeichen, auch $\psi'(-v) = \varepsilon\psi'(v)$. Da hiernach das Vorzeichen ε dasselbe bleibt, wenn man in der zweiten Form von $\psi(v)$ die Thetafunktion A durch irgendeine andre A' ersetzt, so bezeichnen wir es mit (α, β):

$$\psi(-v) = (\alpha, \beta)\,\psi(v),$$

$\psi(v)$ selbst bleibt ungeändert, wenn man α mit β vertauscht; das Vorzeichen ist daher symmetrisch:

$$(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha).$$

Außerdem besteht, wenn α, β, γ irgend drei Permutationen sind und $\alpha\beta$ die aus α, β zusammengesetzte ist, die Gleichung:

$$(\alpha, \gamma)(\beta, \gamma) = (\alpha\beta, \gamma).$$

Denn bildet man aus A, B, C und den aus ihnen durch die Permutation γ entspringenden A', B', C' die drei Quotienten

$$\lambda = \frac{BA'}{AB'},\quad \mu = \frac{AC'}{CA'},\quad \nu = \frac{BC'}{CB'},$$

so sind dies Klassenfunktionen, und es ist

$$\lambda(-v) = (\alpha, \gamma)\lambda(v), \quad \mu(-v) = (\beta, \gamma)\mu(v), \quad \nu(-v) = (\alpha\beta, \gamma)\nu(v);$$

denn B und A' entspringen aus A durch die Permutationen α, γ; A und C' aus C durch β, γ; B und C' aus C durch $\alpha\beta$ und γ. Es ist aber $\lambda\mu = \nu$; folglich $(\alpha, \gamma)(\beta, \gamma) = (\alpha\beta, \gamma)$.

Bei der Definition des Vorzeichens (α, β) wurde vorausgesetzt, daß α, β voneinander und von 0 verschieden sind. Das ergänzen wir, indem wir bestimmen: (α, β) soll $= 1$ sein, wenn $\beta = \alpha$ oder $= 0$ ist.

Abgesehen davon, daß das Vorzeichen das Verhalten dreier Thetafunktionen zueinander charakterisiert, ist es noch in anderer Beziehung von Wichtigkeit: es bestimmt, wenn irgendein Thetaquotient $f(v)$ und eine Periode p gegeben sind, ob $f(v+p) = +f(v)$ oder $= -f(v)$ ist. Den Thetaquotienten denken wir uns in der Form

$$f(v) = \frac{A_\beta}{A}$$

gegeben, so daß β die Permutation ist, die f in seinen reziproken Wert verwandelt; unter α verstehen wir die Permutation, die durch die halbe Periode $\frac{1}{2}p$ hervorgerufen wird. Dann ist

$$f(v+\tfrac{1}{2}p) = \text{Const.}\,\frac{A_{\alpha\beta}}{A_\alpha}, \text{ und:}$$

$$\psi(v) = \text{Const.}\,\frac{f(v)}{f(v+\frac{1}{2}p)}.$$

Ersetzen wir hier v durch $-v$. $\psi(-v)$ ist $(\alpha, \beta)\psi(v)$. Der Quotient von $f(-v)$ und $f(-v+\frac{1}{2}p)$ ist gleich dem von $f(v)$ und $f(v-\frac{1}{2}p)$, gleichviel, ob $f(v)$ grade oder ungrade ist. Daher ist $f(v+\frac{1}{2}p) = (\alpha, \beta)f(v-\frac{1}{2}p)$ und

$$f(v+p) = (\alpha, \beta)f(v).$$

Von den drei Thetafunktionen A, B, C und ebenso von den beiden Permutationen α, β, die A mit B und mit C vertauschen, sagen wir, daß sie sich zueinander syzygetisch verhalten oder azygetisch, je nachdem $\psi(v)$ grade oder ungrade ist. Demnach ist $f(v+p) = f(v)$, wenn die Permutation, die durch die halbe Periode $\frac{1}{2}p$ hervorgebracht wird, sich zu der, die $f(v)$ in seinen reziproken Wert verwandelt, syzygetisch verhält; andernfalls ist $f(v+p) = -f(v)$.

Bei den elliptischen ϑ ist $\psi(v)$ ungrade; es ist nur dann $(\alpha, \beta) = 1$, wenn α oder β gleich 0, oder $\beta = \alpha$ ist; daher ist $f(v+p) = f(v)$, wenn p eine ganze Periode ist oder eine halbe, die $f(v)$ in seinen reziproken Wert überführt. Wenn aber $f(v+\frac{1}{2}p)$ dem Quotienten der beiden andern ϑ proportional ist, ist $f(v+p) = -f(v)$.

$f(v)$ ist keine Klassenfunktion; es kann daher $f(v+p)$ nicht für alle Perioden gleich $f(v)$ sein, außer in dem trivialen Falle $\beta = 0$, wo $f(v) = 1$ ist. Die Gleichung $f(v+p) = (\alpha, \beta)f(v)$ zeigt daher, daß es zu jeder von 0 verschiedenen Permutation β andere, α, geben muß, die sich zu β azygetisch

verhalten; o ist die einzige Permutation, die zu allen syzygetisch ist. Dies ist wichtig für die Rechnung mit dem Zeichen (α, β), grade deshalb, weil es einfach ist. —

Da ψ Klassenfunktion ist, so ist das Produkt BC mit AD gleichändrig. Ebenso AB mit CD. Wir setzen, indem wir die Permutationen α, β und $\alpha\beta$ einführen:

$$P = AB = AA_\alpha, \quad P' = CD = A_\beta A_{\alpha\beta}.$$

Die beiden Produkte bleiben ungeändert bei den Permutationen o und α, sie gehen ineinander über durch β und $\alpha\beta$. Wir nehmen β azygetisch gegen α an. Dann ist der Quotient von P und P' ungrade, also eine der beiden Größen eine grade, die andere eine ungrade Funktion. Es gibt demnach unter den ganzen Transzendenten $\phi(v)$, die mit P gleichändrig sind, sowohl grade wie ungrade. Ist $\phi(v)$ eine davon, so gehört offenbar $\phi(-v)$ ebenfalls zu der Schar, und wenn $\phi(v)$ weder grade ist noch ungrade, so ist $\phi(v) + \phi(-v)$ grade, $\phi(v) - \phi(-v)$ ungrade. Daraus folgt, daß sich jede solche Funktion in eine grade und eine ungrade zerlegen läßt.

Alle ϕ-Funktionen lassen sich linear durch 2^n unter ihnen ausdrücken, die ihrerseits linear unabhängig sind. Denn da $EA(v + \frac{1}{2}p) = \text{Const.}\, B(v)$ ist, so sind die Funktionen ϕ Produkte von E mit andern ganzen Funktionen $\bar{\phi}(v)$, die mit $A(v)\, A(v + \frac{1}{2}p)$ gleichändrig sind. Also auch mit $A^2(v + \frac{1}{4}p)$; denn da $A(v - \frac{1}{4}p)\, A(v + \frac{1}{4}p)$ mit $A^2(v)$ gleichändrig ist, so ist es auch $A(v)\, A(v + \frac{1}{2}p)$ mit $A^2(v + \frac{1}{4}p)$. Die Funktionen $\bar{\phi}(v)$ sind also mit den Thetaquadraten — nicht von v, aber von $v + \frac{1}{4}p$ — gleichändrig. Somit ist die Anzahl der linear unabhängigen Funktionen $\bar{\phi}(v)$, und ebenso die der $\phi(v)$, gleich 2^n.

Ist nun a die Anzahl der graden $\phi(v)$, b die der ungraden, so ist jedenfalls $a + b = 2^n$. Wir nehmen irgendein $\phi(v)$, das grade oder ungrade ist: $\phi(-v) = \varepsilon\phi(v)$. Der Quotient

$$\frac{\phi(v)}{P} = R(v)$$

ist Klassenfunktion. Wir vermehren v um eine der halben Perioden $\frac{1}{2}p'$, die die Permutation β hervorbringen. Dann wird

$$R(v + \tfrac{1}{2}p') = \frac{\phi'(v)}{P'},$$

wo $\phi'(v)$ offenbar ebenfalls eine der ϕ-Funktionen ist. Diese ist grade, wenn $\phi(v)$ ungrade ist, und umgekehrt; denn $R(v)$ und $R(v + \frac{1}{2}p')$ sind einander gleichartig, P und P' aber ungleichartig. Den a linear unabhängigen graden ϕ-Funktionen entsprechen auf diese Weise a ungrade, die ebenfalls linear unabhängig sind; denn eine lineare Beziehung zwischen ihnen hätte dieselbe Gleichung zwischen den entsprechenden graden zur Folge. Daher kann a nicht größer als b sein. Ebensowenig b größer als a; folglich ist $a = b = 2^{n-1}$. So entsteht der wichtige Satz, der sich bekanntlich auch rein formal beweisen läßt, wenn man von der analytischen Darstellung der ϑ durch die Summenausdrücke ausgeht:

Die Anzahl der graden linear unabhängigen ganzen Funktionen, die dem Produkt zweier voneinander verschiedener ϑ gleichhändrig sind, beträgt 2^{n-1}, und ebenso groß ist die Anzahl der ungraden.

13. Aus dem System der ϑ mögen irgendwelche herausgegriffen werden — eine Thetamenge. Thetareihe kann man nicht gut sagen, das bedeutet etwas anderes, und außerdem kommt es auf die Reihenfolge nicht an. Die Anzahl der in der Menge enthaltenen ϑ, die alle als voneinander verschieden angenommen werden, sei k.

Ist k grade, so kann man aus allen Gliedern der Menge, bloß durch Multiplikation und Division, Ausdrücke bilden, $f(v)$, die ebenso viele Faktoren im Zähler enthalten wie im Nenner. Nimmt man zwei dieser Funktionen, so enthält ihr Quotient nur Thetaquadrate, und zwar ebenso viele im Zähler wie im Nenner. Da die Thetaquadrate einander gleichhändrig sind, so ist dieser Quotient eine Klassenfunktion. Folglich sind alle Funktionen $f(v)$, die man aus der gegebenen Menge bilden kann, einander gleichhändrig. Sind sie selbst Klassenfunktionen, so heißt die Menge eine geschlossene.

Ist sie nicht geschlossen, also $f(v)$ keine Klassenfunktion, so gibt es Thetaquotienten, die der Größe $f(v)$ gleichhändrig sind. Sie haben das gemeinsam, daß sie alle durch dieselbe von 0 verschiedene Permutation ω in ihre reziproken Werte übergeführt werden. Dadurch ist jeder graden Thetamenge eine für sie charakteristische Permutation ω zugeordnet; ist die Menge geschlossen, so ist $\omega = 0$, und umgekehrt.

Wenn k ungrade ist, so kann man, wiederum durch Multiplikation und Division, aus allen Gliedern der Menge Ausdrücke $F(v)$ herstellen, die im Zähler einen Faktor mehr enthalten als im Nenner. Alle diese Funktionen $F(v)$ sind, aus demselben Grunde wie vorhin die $f(v)$, einander gleichhändrig, und es gibt ein bestimmtes einzelnes ϑ, das ihnen gleichhändrig ist. Somit existiert zu jeder Menge, die aus einer ungraden Anzahl von Thetafunktionen besteht, ein bestimmtes $\bar{\vartheta}$, das für sie charakteristisch ist. Es kann selbst ein Glied der Menge sein. In diesem Falle wird die Menge zu einer geschlossenen, wenn man das charakteristische Glied wegläßt. Ist aber $\bar{\vartheta}$ nicht in der Menge enthalten, so ist $\bar{\vartheta}$ die Ergänzungsfunktion dieser Menge, die man ihr hinzufügen muß, um eine geschlossene Menge zu erhalten. Denn da der Quotient von $F(v)$ und $\bar{\vartheta}$ Klassenfunktion ist, so ist die Menge, die durch das Hinzutreten von $\bar{\vartheta}$ entsteht, eine geschlossene.

Um über die charakteristische Permutation ω genaueres festzustellen, denken wir uns in dem Falle, wo k grade ist, $k = 2h$, die Glieder der Menge irgendwie geordnet und mit $A_1, A_2 \cdots A_{2h}$ bezeichnet; unter $f(v)$ verstehen wir das Produkt

$$f(v) = \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{A_3}{A_4} \cdots \frac{A_{2h-1}}{A_{2h}}.$$

Wir nehmen irgendeine Thetafunktion N und bestimmen h andre: N_1, $N_2 \cdots N_h$ so, daß

$$\frac{N}{N_1} \text{ mit } \frac{A_1}{A_2}, \quad \frac{N_1}{N_2} \text{ mit } \frac{A_3}{A_4}, \cdots \frac{N_{h-1}}{N_h} \text{ mit } \frac{A_{2h-1}}{A_{2h}}$$

gleichändrig wird. Dann ist der Quotient, dessen Zähler N, dessen Nenner N_h ist, mit $f(v)$ gleichändrig; somit ω die Permutation, die von N zu N_h führt. Ist $N_h = N$ — aber nur in diesem Falle —, so ist $\omega = 0$ und die Menge eine geschlossene.

Nennen wir: $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{2h}$ die Permutationen, die von N aus zu $A_1, A_2 \cdots A_{2h}$ führen. Dann ist $\alpha_1 \alpha_2$ diejenige, die A_1 mit A_2, also auch die, die N mit N_1 vertauscht. Ebenso $\alpha_3 \alpha_4$ die, die N_1 mit N_2 vertauscht, und $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ die, die von N unmittelbar zu N_2 führt. Da sich der Schluß fortsetzen läßt, so ist $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_{2h}$ diejenige, die N in N_h überführt — also die Permutation ω.

Ist $f(v)$ Klassenfunktion, so muß demnach $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{2h} = 0$ sein.

Wir nennen eine Menge voneinander verschiedener Permutationen geschlossen, wenn die Zusammensetzung aller das Resultat 0 liefert. Danach ist eine Menge, die aus einer graden Anzahl von Thetafunktionen besteht, dann und nur dann geschlossen, wenn die Permutationen, die von einem beliebigen ϑ zu den einzelnen Gliedern der Menge führen, eine geschlossene Menge bilden. Dieses beliebige ϑ kann auch eins von den Gliedern der ϑ-Menge sein; dann ist eine der Permutationen 0 und kann bei der Zusammensetzung weggelassen werden. Man kann also auch sagen: Die Thetamenge ist dann und nur dann geschlossen, wenn die Permutationen, die von einem ihrer Glieder zu den übrigen führen, eine geschlossene Menge sind.

Ob man bei einer geschlossenen Menge von Permutationen, von der ein Glied die Permutation Null ist, dieses Glied wegläßt oder nicht, ist so gleichgültig, daß man sagen kann: Wenn zwei solche Mengen sich nur dadurch unterscheiden, daß die eine die Null enthält, die andere nicht, so sind sie einander gleich. Demnach ist es keine Beschränkung, wenn wir die Anzahl der Glieder als grade Zahl annehmen. Unter dieser Voraussetzung gilt allgemein der Satz:

Die Thetafunktionen, die aus einem ϑ durch die Permutationen einer geschlossenen Menge hervorgehen, bilden ebenfalls eine geschlossene Menge.

Die Glieder einer Thetamenge nennen wir voneinander unabhängig, die ganze Menge kurz eine u n a b h ä n g i g e, wenn sich nicht aus irgendwelchen ihrer Glieder durch Multiplikation und Division ein Ausdruck $f(v)$ zusammensetzen läßt, der eine Klassenfunktion ist. Eine Permutationenmenge ist unabhängig, wenn sich nicht durch Zusammensetzung aller oder eines Teils ihrer Glieder die Permutation 0 ergibt. In beiden Fällen: Die Menge ist unabhängig, wenn sie weder selbst noch irgendein Teil von ihr geschlossen ist.

Hier entsteht wieder die Frage: Soll man als Glied einer unabhängigen Menge von Permutationen auch die Null zulassen? Der Symmetrie wegen nehmen wir an, daß in jeder solchen unabhängigen Menge ein Glied die Permutation 0 ist, die ja von allen andern unabhängig ist. Dann bestehen die beiden Sätze:

Die Thetafunktionen, die aus einer, N, durch die Permutationen einer unabhängigen Menge hervorgehen, sind voneinander unabhängig.

Eins dieser ϑ ist N selbst. — Ferner:

Die Permutationen, die ein Glied einer unabhängigen ϑ-Menge in sich selbst und in die andern überführen, bilden auch eine unabhängige Menge.

Dies läßt sich indirekt beweisen. Bei beiden Sätzen handelt es sich um eine ϑ-Menge S und eine von Permutationen, T. Wäre, beim ersten Satz, die Menge S nicht unabhängig, so wäre entweder die ganze oder ein Teil von ihr geschlossen. Dann würden auch die Permutationen, die von N zu der ganzen Reihe oder zu diesem Teil hinführen, eine geschlossene Menge bilden. T wäre also, entgegen der Voraussetzung, nicht unabhängig.

Wäre, beim zweiten Satz, T nicht unabhängig, so wäre T oder ein Teil von T geschlossen. Zu der Menge T gehört auch die Permutation 0, und indem wir diese zu der geschlossenen Menge hinzufügen oder, falls 0 in ihr enthalten ist, wegnehmen, können wir stets bewirken, daß die Anzahl der Glieder eine grade Zahl wird, wenn sie vorher ungrade war. Dann bilden auch die ϑ, die aus N durch diese geschlossene Menge von Permutationen entspringen, eine geschlossene Menge; es wäre also, entgegen der Voraussetzung, S nicht unabhängig. — Eins der Glieder von S ist N selbst, da zu T auch die Permutation 0 gehört.

14. Wenn irgendeine ϑ-Menge S gegeben ist, so kann man zugleich mit ihr ihre sämtlichen Teilmengen S' ins Auge fassen, diejenigen, die aus irgendwelchen Gliedern von S bestehen. Zu dieser Gesamtheit rechnen wir auch S selbst, als Teilmenge höchster Ordnung; ferner die einzelnen Glieder von S, als Mengen erster Ordnung, und sogar die Menge 0, die gar kein Glied enthält. Dann ist, wenn die Anzahl der in S enthaltenen ϑ mit $h+1$ bezeichnet wird, die Anzahl aller Teilmengen 2^{h+1}, entsprechend den 2^{h+1} Kombinationen, die sich aus $h+1$ Elementen bilden lassen.

Eine solche Teilmenge S' wollen wir grade oder ungrade nennen, je nachdem die Anzahl ihrer Glieder grade oder ungrade ist. Jede ungrade Menge bestimmt, unabhängig von der Anordnung ihrer Glieder, ein Theta; wenn sie nur ein Glied enthält, also ihre Ordnungszahl gleich 1 ist, so ist dieses ϑ das Glied selbst. Ist die Ordnungszahl größer als 1, so hat man aus allen Gliedern der ungraden Teilmenge durch Multiplikation und Division einen Quotienten $F(v)$ zu bilden, dessen Zähler einen Faktor mehr enthält als der Nenner; das durch die Teilmenge bestimmte ϑ ist dasjenige, das der Funktion $F(v)$ gleichändrig ist.

Jede grade Teilmenge bestimmt eine Permutation; die Menge 0 speziell die Permutation 0. Ist die Ordnungszahl größer oder gleich 2, so hat man aus allen ihren Gliedern einen Quotienten $f(v)$ zu bilden, dessen Zähler ebenso viele Faktoren enthält, wie der Nenner; die durch die Teilmenge bestimmte Permutation ist dadurch definiert, daß durch sie jede Thetafunktion N in diejenige übergeht, die dem Produkt $f(v)N$ gleichändrig ist.

Die Anzahl der Kombinationen grader Ordnung von $h+1$ Elementen ist ebenso groß wie die Anzahl derer von ungrader Ordnung, also 2^h. Demnach werden durch die Menge S 2^h Theta bestimmt, die von ihr abhängig sind, und ebenso viele Permutationen. Diese ϑ und Permutationen sind aber im allgemeinen nicht alle untereinander verschieden; sie sind es nur, wenn S eine unabhängige Reihe ist, was wir von jetzt ab voraussetzen.

Wir haben dann eine Menge von 2^h untereinander verschiedenen ϑ, und eine ebenso große Menge von Permutationen. Beide stehen in einem starken

Zusammenhang miteinander. Sind α, β zwei der 2^h Permutationen, so gehört die aus beiden zusammengesetzte $\alpha\beta$ ebenfalls dazu: und jede der 2^h Permutationen bewirkt, wenn sie von o verschieden ist, eine paarweise Vertauschung der 2^h Theta, so daß das Produkt aller — wir wollen es mit Π bezeichnen — bei dieser Permutation vollständig ungeändert bleibt.

Zum Beweise denken wir uns zunächst zwei voneinander und von o verschiedene Teilmengen S und S'. Beide bestimmen eine dritte, von o, S, S' verschiedene S''. Die Menge S'' ist dadurch definiert, daß sie alle ϑ enthalten soll, die entweder in S oder in S', aber nicht in beiden zugleich vorkommen. Es sei $\mathfrak{A}$ der gemeinsame Teil von S und S', $\mathfrak{B}$ der übrige Teil von S, $\mathfrak{C}$ der übrige von S'. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ haben dann kein Element gemeinsam; S besteht aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, S' aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$, S'' aus $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$. Demnach entsteht auch S aus S' und S'', indem man den gemeinsamen Teil $\mathfrak{C}$ wegläßt und die nicht gemeinsamen Glieder vereinigt; die Beziehung zwischen S, S', S'' ist eine wechselseitige. Nennt man ferner a, b, c die Anzahl der Glieder von $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, so sind die Anzahlen der Glieder von S, S', S'': $a+b, a+c, b+c$. Die Summe dieser drei Zahlen ist grade; also müssen entweder alle drei grade sein oder zwei von ihnen ungrade, die dritte grade. Da die Beziehung zwischen S, S', S'' symmetrisch ist, können wir im letzteren Falle S und S' als ungrade Mengen annehmen, S'' als grade.

Ich nehme zuerst S, S', S'' als grade Teilmengen an, so daß durch sie drei Permutationen $\omega, \omega', \omega''$ bestimmt sind. Ich stelle die drei Funktionen f, f', f'' auf, von denen f im Zähler und Nenner die Glieder von S enthält — also die von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ —, während f' aus den Gliedern von S', f'' aus denen von S'' besteht. Das Produkt $ff'f''$ ist dann ein Quotient, dessen Zähler ebenso viele Faktoren enthält als der Nenner, und dessen Zähler und Nenner nur solche ϑ enthalten, die in $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ vorkommen. Aber alle ϑ, die in dem Quotienten überhaupt vorkommen, kommen doppelt vor, entweder im Zähler oder im Nenner; denn die von $\mathfrak{A}$ sind in f und in f' enthalten usf. Folglich ist $ff'f''$ Klassenfunktion und f'' dem Produkt ff' gleichändrig.

Die Permutation ω verwandelt eine beliebige Thetafunktion N in diejenige N', die dem Produkt $f(v) \cdot N$ gleichändrig ist. Durch ω' geht N' über in diejenige Funktion N'', die $f'(v) \cdot N'$ gleichändrig ist. Durch die aus beiden zusammengesetzte $\omega\omega'$ geht N in N'' über — also in diejenige Thetafunktion, die dem Produkt $f'(v) \cdot f(v) \cdot N$ gleichändrig ist. $f(v) f'(v)$ aber ist gleichändrig $f''(v)$; folglich ist $\omega\omega'$ die Permutation ω''.

ω'' kann nicht die Permutation o sein — denn $f''(v)$ ist keine Klassenfunktion; es kann daher ω' nicht gleich ω sein.

Damit ist zweierlei bewiesen. Erstens: Die 2^h Permutationen, die von der Menge S abhängen, sind alle untereinander verschieden. Zweitens: Durch die Zusammensetzung zweier entsteht eine dritte, die ebenfalls unter der 2^h enthalten ist. Diese 2^h Permutationen bilden demnach eine Gruppe.

Nehmen wir jetzt S, S' als ungrade Teilmengen an, S'' als eine grade. Von den drei Mengen bestimmen S und S' zwei Theta: A und A', S'' eine Permutation ω. Wir bilden, ähnlich wie vorhin, aus den Gliedern von S,

aus denen von S' und aus denen von S'' drei Funktionen: $F(v)$, $F'(v)$ und $f''(v)$. Der Quotient $f''(v)$ hat ebenso viele Faktoren im Nenner wie im Zähler, jeder der beiden andern dagegen einen Faktor mehr im Zähler als im Nenner. A ist gleichändrig $F(v)$, A' mit $F'(v)$, und ω die Permutation, die irgendeine Thetafunktion N in diejenige N' verwandelt, die dem Produkt $f''(v)\cdot N$ gleichändrig ist. Die Faktoren, die in $F(v)$ und $F'(v)$ vorkommen, sind in $f''(v)$ nicht enthalten; diejenigen, die in $F(v)$ vorkommen, aber nicht in $F'(v)$, sind in $f''(v)$ enthalten, und umgekehrt; der Quotient

$$\frac{F'(v)}{f''(v)F(v)}$$

ist daher eine Klassenfunktion. Da A der Funktion $F(v)$, A' mit $F'(v)$ gleichändrig ist, so ist A' gleichändrig dem Produkt $Af''(v)$; es geht also A' aus A durch die Permutation ω hervor. Diese ist nicht 0; denn da die Menge S eine unabhängige ist, kann $f''(v)$ keine Klassenfunktion sein. — Hieraus ergibt sich:

Die Funktionen, die den 2^h Teilmengen der Menge S entsprechen, sind alle untereinander verschieden. Die Permutationen, die zwei von ihnen miteinander vertauschen, sind alle unter den 2^h enthalten, die von der Menge S abhängen, und jede Permutation dieser Gruppe, außer 0, führt die 2^h von S abhängigen Funktionen ineinander über. Diese 2^h Funktionen bilden demnach ebenfalls eine Gruppe.

Die Idee einer Gruppe von 2^h Thetafunktionen ist hier entwickelt auf Grund einer Reihe von $h+1$ voneinander unabhängigen Funktionen, die selbst zu den Gliedern der Gruppe gehören. Diese Reihe oder Menge S heißt eine B a s i s der Gruppe. Es lassen sich aber aus der Gruppe sehr viele Reihen von je $h+1$ voneinander unabhängigen Gliedern aussondern; es ist daher zwar die Gruppe durch die Basis bestimmt, aber nicht die Basis durch die Gruppe.

Wir wollen zwei Thetamengen: $A, B, C \cdots$ und $A', B', C' \cdots$ einander kongruent nennen, wenn die eine aus der andern durch eine der Permutationen hervorgeht. Man kann auch sagen: die beiden Mengen sind einander kongruent, wenn A' und B' durch dieselbe Permutation ineinander übergehen, wie A und B, A' und C' durch dieselbe wie A und C usf. Denn dann gibt es eine Permutation, die zugleich A in A', B in B', C in C' überführt.

Wenn man einer Reihe von h Permutationen: $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_h$ alle die hinzufügt, die aus ihnen durch Zusammensetzung entstehen, wie $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ usf., und außerdem noch die Permutation 0, so sind dies, wenigstens der Bezeichnung nach 2^h. Aber sie sind nur dann alle untereinander verschieden, wenn die h gegebenen voneinander unabhängig sind, also nicht durch die Zusammensetzung mehrerer die Permutation 0 entsteht. Eine unabhängige Reihe von 0 verschiedener Permutationen kann daher aus nicht mehr als $2n$ Gliedern bestehen. Ist $h < 2n$, so kann man die Reihe erweitern, indem man ihr ein Glied hinzufügt, das in der durch sie erzeugten Gruppe nicht enthalten und demnach von $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_h$ unabhängig ist. So kann man, Schritt für Schritt, von einer zweigliedrigen unabhängigen Reihe zu einer $2n$-gliedrigen gelangen.

Wenn eine Permutation ω sich zu allen Gliedern $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{2n}$ einer solchen vollständigen Reihe syzygetisch verhalten soll, muß $\omega = 0$ sein. Denn ist ω irgendeine von 0 und den $2n$ gegebenen verschiedene Permutation, so läßt sich ω' aus mehreren Gliedern der gegebenen Reihe zusammensetzen (da deren Gruppe alle 2^{2n} Permutationen umfaßt), und da $(\omega, \alpha\beta) = (\omega, \alpha)(\omega, \beta)$, ebenso $(\omega, \alpha\beta\gamma) = (\omega, \alpha)(\omega, \beta)(\omega, \gamma)$ ist usf., so ist allgemein $(\omega, \omega') = 1$, wenn (ω, α), (ω, β), $(\omega, \gamma) = 1$ ist. Daraus folgt weiter: Eine Permutation ω ist vollständig bestimmt, wenn ihr syzygetisches oder azygetisches Verhalten zu den $2n$ Gliedern einer vollständigen Reihe gegeben ist. Dieses Verhalten wird gegeben durch die $2n$ Vorzeichen $(\omega, \alpha_h) = \varepsilon_h (h = 1, 2 \cdots 2n)$.

Denn nimmt man an, daß für eine andre Permutation ω' die $2n$ Vorzeichen dieselben wären, so wäre, da allgemein $(\omega, \alpha)(\omega', \alpha) = (\omega\omega', \alpha)$ ist, $(\omega\omega', \alpha_h) = 1$ für $h = 1, 2 \cdots 2n$. Dann müßte aber $\omega\omega' = 0$, $\omega' = \omega$ sein.

Ferner: Wenn die Vorzeichen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{2n}$ willkürlich gegeben sind, so gibt es immer eine Permutation ω, die den $2n$ Bedingungen $(\omega, \alpha_h) = \varepsilon_h$ genügt. Denn wenn es keine gäbe, so würden für jede Permutation ω $2n$ Gleichungen bestehen: $(\omega, \alpha_h) = \varepsilon'_h (h = 1, 2 \cdots 2n)$, wo $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2 \cdots \varepsilon'_{2n}$ eine von $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{2n}$ verschiedene Vorzeichenreihe bedeutet. Solcher Reihen ε' gibt es $2^{2n} - 1$, aber 2^{2n} Permutationen ω; es müßten daher mindestens für zwei voneinander verschiedene Permutationen ω, ω' die Vorzeichen ε'_h dieselben sein — was unmöglich ist.

Ist das Verhalten von ω nicht zu allen Permutationen $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{2n}$ gegeben, sondern nur zu einem Teil davon: $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_k$, so kann man die Vorzeichen $\varepsilon_{k+1}, \varepsilon_{k+2} \cdots \varepsilon_{2n}$ willkürlich wählen, und das ist auf 2^{2n-k} Arten möglich. Es gibt daher genau 2^{2n-k} Permutationen, die den k Bedingungen $(\omega, \alpha_h) = \varepsilon_h (h = 1, 2 \cdots k)$ genügen. Jede unabhängige Menge von weniger als $2n$ Permutationen kann ergänzt werden zu einer, die aus $2n$ Gliedern besteht. Demnach kann der folgende Satz ausgesprochen werden (Anzahl-Satz):

Es sei k eine der Zahlen $1, 2 \cdots 2n$; gegeben seien k voneinander unabhängige und von 0 verschiedene Permutationen. Eine sonst willkürliche Permutation ω werde dadurch beschränkt, daß angegeben wird, wie sie sich zu den einzelnen k Gliedern der Reihe verhalten soll — syzygetisch oder azygetisch. Es gibt dann jedesmal genau 2^{2n-k} untereinander verschiedene ω.

Eine ϑ-Menge möge **homogen** genannt werden, wenn sie aus lauter gleichartigen ϑ besteht, aus lauter graden oder lauter ungraden.

Zu jeder **unabhängigen** Menge, die nicht homogen ist, gibt es mindestens eine ihr kongruente, die homogen ist.

Da sich jede unabhängige Menge zu einer vollständigen, aus $2n+1$ Gliedern bestehenden erweitern läßt, so genügt es, den Satz für die vollständigen unabhängigen ϑ-Mengen zu beweisen. Eine solche sei: $A, A_1, A_2 \cdots A_{2n}$. Die Permutationen $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{2n}$, die von A zu $A_1, A_2 \cdots A_{2n}$ führen, bilden ebenfalls eine vollständige unabhängige Menge. Wir führen Vorzeichen ein: $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{2n}$; ε_h soll $+1$ sein oder -1, je nachdem der Quotient von A_h und A eine grade Funktion ist oder eine ungrade. Wir bestimmen eine Permutation ω durch die Bedingungen $(\omega, \alpha_h) = \varepsilon_h$ und bezeichnen mit $A', A'_1 \cdots A'_{2n}$

die Funktionen, die aus $A, A_1, A_2 \cdots A_{2n}$ durch die Permutation ω hervorgehen. Diese der ersten Menge kongruente ist homogen. Denn in der Klassenfunktion

$$\frac{A_h}{A} \cdot \frac{A'}{A'_h} = \psi_h(v) \qquad (h = 1, 2 \cdots 2n)$$

geht A' aus A durch die Permutation ω hervor, A_h aus A durch α_h; es ist also $\psi_h(v)$ grade oder ungrade, je nachdem (ω, α_h), daher, je nachdem ε_h gleich $+1$ oder -1 ist. Andrerseits ist auch der Quotient von A_h und A der Voraussetzung nach grade oder ungrade, je nachdem ε_h gleich $+1$ oder -1 ist. Folglich ist der von A' und A'_h eine grade Funktion; A' und A'_h sind einander gleichartig.

Wenn eine ϑ-Menge geschlossen oder unabhängig, oder eine Gruppe ist, so haben alle ihr kongruenten dieselbe Eigenschaft. Denn hierbei kommt es nur auf die Permutationen an, die eins ihrer Glieder in die andern überführen; und diese sind dieselben für zwei einander kongruente Mengen. Bei den homogenen Mengen verhält es sich, wenn man nur die unabhängigen und vollständigen berücksichtigt, grade umgekehrt; jede einer solchen Menge kongruente ist nicht homogen.

Eine Menge von Thetafunktionen kann rein syzygetisch oder auch rein azygetisch sein. Das erste tritt ein, wenn je drei ihrer Glieder sich zueinander syzygetisch, das zweite, wenn je drei sich azygetisch verhalten.

Das entsprechende gilt von den Permutationen; die Menge ist syzygetisch, wenn je zwei ihrer Glieder sich syzygetisch, azygetisch, wenn je zwei sich zueinander azygetisch verhalten.

Eine syzygetische Menge von Permutationen darf auch die identische Null enthalten. Wenn sie die Null nicht enthält, so kann sie hinzugefügt werden; die Menge erfährt dadurch keine wesentliche Änderung. Eine azygetische Menge darf dagegen die Null nicht enthalten, weil 0 sich zu jeder Permutation syzygetisch verhält. — Wir wollen solche Mengen kurz syzygetische und azygetische nennen.

Aus der Definition folgt unmittelbar: Wenn eine ϑ-Menge syzygetisch ist — oder azygetisch, so bilden auch die Permutationen, die eins ihrer Glieder in die andern überführen, in dem einen Falle eine syzygetische, im andern eine azygetische Menge. Denn je nachdem A, B, C sich zueinander syzygetisch verhalten oder azygetisch, verhalten sich auch die Permutationen, die A in B und in C überführen, zueinander syzygetisch oder azygetisch.

Auch das Umgekehrte ist richtig. Denkt man sich eine Menge von Permutationen gegeben, die rein syzygetisch ist oder rein azygetisch, so bilden auch die Thetafunktionen, die aus einer, A, durch diese Permutationen hervorgehen, zusammen mit A selbst eine syzygetische oder azygetische Menge.

Zum Beweise nehmen wir zunächst drei beliebige Permutationen α, β, γ an und bezeichnen mit B, C, D die Funktionen, zu denen sie von A aus führen. Dann sind $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$ diejenigen, die von B zu C und von B zu D führen. Das Zeichen $(\alpha\beta, \alpha\gamma)$ läßt sich in die vier Faktoren: (α, α), (α, γ); (β, α), (β, γ) zerlegen. Der erste ist $+1$. Die drei andern sind ebenfalls $+1$, wenn α, β, γ einer syzygetischen, dagegen -1, wenn sie einer azygetischen Menge

angehören. Daraus folgt, daß nicht nur A, B, C, sondern auch B, C, D sich im ersten Falle syzygetisch, im zweiten azygetisch zueinander verhalten und daß in dem einen Falle A, B, C, D Bestandteile einer syzygetischen, im andern einer azygetischen Menge sind.

Um nicht fortwährend zwischen zwei Arten von Gruppen unterscheiden zu müssen, will ich eine Gruppe von Permutationen ein Feld nennen und unter Gruppe schlechthin eine ϑ-Gruppe verstehen. Zu jeder Gruppe gehört ein Feld; das Feld derjenigen Permutationen, die die Gruppe im ganzen ungeändert lassen. Beide sind von derselben Stufe und bestehen, wenn die Stufenzahl h ist, aus 2^h Gliedern. Eine Gruppe aber ist erst dann bestimmt, wenn außer dem Felde eins ihrer Glieder, gleichviel welches, gegeben ist. Zwei Gruppen mit demselben Felde haben daher kein Glied gemeinsam — außer wenn sie miteinander identisch sind. Daraus folgt, daß sich das ganze Thetasystem in 2^{2n-h} Gruppen $h$ter Stufe und mit demselben Felde zerlegen läßt; diese 2^{2n-h} Gruppen sind alle einander kongruent.

Es sei eine Reihe von o verschiedener Permutationen α_1, $\alpha_2 \cdots \alpha_h$ gegeben, von denen wir voraussetzen, daß sie eine unabhängige, außerdem eine syzygetische Menge bilden, so daß je zwei von ihnen sich zueinander syzygetisch verhalten. Sie sind die Basis eines Feldes (α) von der $h$ten Stufe, das außer den h gegebenen alle enthält, die durch Zusammensetzung mehrerer von ihnen entstehen, und schließlich auch die Permutation o. Dieses ganze Feld ist offenbar syzygetisch; je zwei seiner Glieder verhalten sich, wie aus der Formel $(\alpha, \beta\gamma) = (\alpha, \beta)\,(\alpha, \gamma)$ folgt, syzygetisch zueinander.

Es sei ω irgendeine Permutation, die sich zu den h gegebenen und somit zum ganzen Felde (α) syzygetisch verhält. Die Anzahl der ω, die diesen h Bedingungen genügen, ist 2^{2n-h}. Aber zu ihnen gehören alle 2^h Glieder des Feldes (α); folglich muß $2^{2n-h} \geqq 2^h$ und $h \leqq n$ sein. Syzygetische Felder von höherer als der $n$ten Stufe gibt es daher nicht. Ist $h < n$, so läßt sich die Reihe α_1, $\alpha_2 \cdots \alpha_h$ erweitern, indem man ihr ein Glied $\omega = \alpha_{h+1}$ hinzufügt, das sich zu α_1, $\alpha_2 \cdots \alpha_h$ syzygetisch verhält und nicht in dem Felde (α) enthalten ist.

Eine aus Thetafunktionen bestehende Gruppe heißt syzygetisch, wenn das Feld, auf dem sie sich aufbaut, ein syzygetisches ist. Eine solche Gruppe kann daher ebenfalls nicht von höherer als der $n$ten Stufe sein.

Wir wollen eine Gruppe homogen nennen, wenn ihre Glieder untereinander gleichartige, entweder sämtlich grade oder sämtlich ungrade Thetafunktionen sind. Homogen können nur syzygetische Gruppen sein. Denn da die Ergänzungsfunktion D dreier Glieder A, B, C ebenfalls in der Gruppe enthalten ist, so ist die aus A, B, C, D gebildete ψ-Funktion grade; A, B, C verhalten sich also syzygetisch zueinander. Demnach besteht eine homogene Gruppe aus höchstens 2^n Gliedern.

Eine syzygetische Gruppe, die nicht homogen ist, enthält ebenso viele grade ϑ wie ungrade. Denn greifen wir aus ihr irgend zwei Glieder heraus: A, B, von denen das eine grade ist, das zweite ungrade, und zwei andre C, D, die durch dieselbe Permutation ineinander übergehen. Dann ist AB ungrade, der Quotient von AB und CD aber grade, da A, B, C, D einer

syzygetischen Gruppe angehören; folglich ist CD ungrade. Die ganze Gruppe läßt sich demnach in lauter Paare zerlegen, bei denen der eine Partner eine grade, der andere eine ungrade Funktion ist. Eine nicht homogene syzygetische Gruppe $h$ter Stufe enthält daher 2^{h-1} grade und 2^{h-1} ungrade Funktionen.

h muß $\leq n$ sein. Wir setzen: $n = h + k$, wo k eine der Zahlen $0, 1, 2 \cdots n-1$ ist. Wenn $k = n-1$ ist, so besteht die Gruppe aus zwei Gliedern; zwei beliebige ϑ gelten immer als syzygetische Gruppe.

Bei den syzygetischen Gruppen $h$ter Stufe, die zu einem gegebenen Felde gehören, sind drei Arten zu unterscheiden. Erstens die homogenen Gruppen, die lauter grade ϑ enthalten; deren Anzahl sei a. Zweitens die, die aus ungraden ϑ gebildet sind; ihre Anzahl sei b. Drittens die nicht homogenen, deren jede ebenso viele grade wie ungrade ϑ enthält; deren Anzahl sei c. Die Anzahl aller dieser Gruppen ist $2^{2n-h} = 2^{2k+h}$; es ist also $a + b + c = 2^{2k+h}$.

Jede Gruppe enthält 2^h Glieder; die der ersten Art enthalten also $2^h a$ grade ϑ, die der zweiten $2^h b$ ungrade, die der dritten ebenso viele grade wie ungrade. Der Überschuß der graden ϑ über die ungraden beträgt $2^n = 2^{h+k}$. Daraus folgt: $a - b = 2^k$.

Ähnlich läßt sich beweisen, daß $a + b = 2^{2k}$ ist. Da $a - b = 2^k$ ist, so kann a nicht 0 sein; es gibt unter den 2^{2k+h} Gruppen jedenfalls eine, G, die von der ersten Art ist, also aus lauter graden ϑ besteht. Jede andre, G', geht aus G hervor durch eine Permutation, die nicht in dem syzygetischen Felde enthalten ist. Aber es gibt 2^h Permutationen, die G in G' überführen; aus einer ergeben sich alle, indem man sie mit den 2^h Permutationen des Feldes zusammensetzt. Es sei γ eine davon. Verhält sich γ zu dem ganzen Felde syzygetisch, so gehört auch G' zu den homogenen Gruppen. Denn es seien A', B' irgend zwei Glieder von G', A, B diejenigen von G, aus denen A', B' durch die Permutation γ hervorgehen, ferner α die dem Felde angehörige, die A in B überführt. Dann sind die Produkte AB und $A'B'$ einander gleichändrig und ihr Quotient eine grade Funktion, da sich γ zu α syzygetisch verhält. Da A und B grade sind, so sind A' und B' ebenfalls beide grade oder beide ungrade. Die Gruppe G' ist demnach jedenfalls homogen.

Ist γ nicht zum ganzen Felde syzygetisch, so gibt es jedenfalls im Felde eine Permutation α, die sich zu γ azygetisch verhält; dann ist, wenn wir wieder die Funktionen A, B, A', B' einführen, der Quotient von AB und $A'B'$ eine ungrade Funktion, und ist daher B' ungleichartig A'; somit G' eine nicht homogene Gruppe.

Daraus folgt: die Permutationen, die G in eine gleichfalls homogene Gruppe überführen, sind die, die sich zu dem ganzen Felde F syzygetisch verhalten. Ihre Anzahl ist 2^{2k+h}. Aber je 2^h unter ihnen führen G in dieselbe Gruppe über; demnach ist die Anzahl der homogenen Gruppen, die zum Felde F gehören, 2^{2k}; es ist, wie behauptet wurde, $a + b = 2^{2k}$. Da außerdem $a - b = 2^k$ ist, so ist $a = \frac{1}{2}(2^{2k} + 2^k)$, $b = \frac{1}{2}(2^{2k} - 2^k)$.

Wir fassen die Glieder einer Gruppe zu einem Produkt Π zusammen und übertragen die Eigenschaften der Gruppe auf diese ihr zugehörige Funktion.

Zu jedem solchen Produkt gehört ein bestimmtes Feld, das aus ebenso vielen Permutationen besteht, als das Produkt Faktoren hat; die Permutationen des Feldes sind die, die Π ungeändert lassen. Das Produkt ist homogen, wenn seine Faktoren sämtlich grade oder sämtlich ungrade Thetas sind; es ist syzygetisch, wenn die Gruppe syzygetisch ist, und von der $h$ten Stufe, wenn die Gruppe aus 2^h Gliedern besteht. Zu einem syzygetischen Felde $n-k$ter Stufe gehören 2^{2k} homogene Produkte; die Anzahl derer, die grade Faktoren enthalten, ist um 2^k größer als die Anzahl der Produkte mit ungraden Faktoren. Zu einem syzygetischen Felde $n$ter Stufe gehört demnach nur ein homogenes Produkt Π, und dies besteht aus lauter graden ϑ. Ist die Stufenzahl um 1 kleiner, so hat man drei Produkte grader ϑ und ein Produkt ungrader. Ist sie um 2 kleiner, so sind sechs Produkte ungrader ϑ vorhanden und 10 Produkte grader, ebenso wie es sechs ungrade ϑ von zwei Veränderlichen gibt und zehn grade.

15. Es sei eine a z y g e t i s c h e Menge von Permutationen gegeben. Wir bezeichnen sie mit (β) und die Anzahl ihrer Glieder mit r. 0 kann unter ihren Gliedern nicht vorkommen, da sich 0 zu allen Permutationen syzygetisch verhält. Die aus allen r Gliedern von (β) zusammengesetzte Permutation sei ω.

Ist β' irgendein Glied der Menge (β), so ist $(\omega, \beta') = (-1)^{r-1}$. Denn (ω, β') läßt sich zerlegen in das über alle Elemente β dieser Menge erstreckte Produkt $\Pi(\beta, \beta')$, und von den r Faktoren dieses Produkts ist einer (β', β'), gleich $+1$, die $r-1$ andern sind -1. Nehmen wir an, es sei $\omega = 0$. Dann ist (ω, β') gleich $+1$, also r ungrade; wir haben den ersten Satz:

Eine geschlossene azygetische Menge besteht immer aus einer ungraden Anzahl von Gliedern.

Nehmen wir an, die Menge (β) lasse sich erweitern, es gebe eine in ihr nicht enthaltene Permutation γ, die sich zu allen Gliedern von (β), also zu der ganzen Menge azygetisch verhält. Dann ist, da sich (ω, γ) aus den r Faktoren (β, γ) zusammensetzen läßt und alle diese Faktoren negativ sind, $(\omega, \gamma) = (-1)^r$. Ist aber β eins der Glieder von (β), so ist $(\omega, \beta) = (-1)^{r-1}$. Es ist daher $(\omega, \beta\gamma) = -1$. Folglich kann ω nicht 0, die Menge (β) nicht eine geschlossene sein, wenn sie sich erweitern läßt; man hat den zweiten Satz:

Eine geschlossene azygetische Menge läßt sich nicht erweitern.

Dazu tritt der dritte:

Eine nicht geschlossene azygetische Menge ist unabhängig.

Denn wäre sie abhängig, so wäre ein Teil von ihr eine geschlossene azygetische Menge, und eine solche läßt sich nicht erweitern.

Nehmen wir eine nicht geschlossene azygetische Menge (β) von r Gliedern an; r sei kleiner als $2n$. Da die Menge unabhängig ist, so gibt es nach dem Anzahlsatz 2^{2n-r} Permutationen, also mindestens 2, die sich zu den r Gliedern von β azygetisch verhalten. Folglich wenigstens eine, die, den Gliedern von (β) hinzugefügt, diese Menge n i c h t zu einer geschlossenen macht. Damit ist der vierte Satz bewiesen:

Jede nicht geschlossene azygetische Menge, deren Gliederzahl kleiner als $2n$ ist, kann durch Hinzufügung eines Gliedes zu einer ebenfalls nicht geschlossenen azygetischen Menge erweitert werden.

Daraus folgt, daß man nicht geschlossene, also auch unabhängige azygetische Mengen bilden kann, die aus $2n$ Gliedern bestehen. Mehr als $2n$ kann eine unabhängige Menge nicht enthalten. Wenn man aber eine $2n$-gliedrige azygetische Menge hat, so verhält sich diejenige Permutation ω, die sich aus allen ihren Gliedern zusammensetzt, zu der ganzen Menge azygetisch; denn es ist, wenn β irgendeins dieser Glieder ist, $(\omega, \beta) = (-1)^{2n-1} = -1$. Die Menge bleibt demnach azygetisch, wenn man ihren Gliedern noch dieses ω hinzufügt, sie wird dadurch aber zu einer geschlossenen Reihe. Wir wollen deshalb noch den fünften Satz aussprechen:

Es lassen sich geschlossene azygetische Mengen bilden, die aus $2n+1$ Gliedern bestehen.

Bisher handelte es sich um Permutationen. Wenn aber eine azygetische Menge von solchen irrealen Werten gegeben ist, so bilden auch die Theta, die aus einem, A, durch diese Permutationen entspringen, zusammen mit A eine azygetische Menge, und eine geschlossene, wenn die der Permutationen geschlossen ist. Es gibt daher geschlossene azygetische Mengen von Thetafunktionen, in jeder graden Anzahl, bis zu $2n+2$. Nimmt man von einer solchen ein ϑ hinweg, so bleibt eine unabhängige Menge übrig. Zu jeder unabhängigen azygetischen Menge von ϑ gibt es eine ihr kongruente, die gleichfalls unabhängig und azygetisch, außerdem aber homogen ist. Man kann daher, auf vielfache Art, eine Reihe von Thetafunktionen bilden:

$$\vartheta_1, \vartheta_2 \cdots \vartheta_{2n+1},$$

die zugleich homogen, azygetisch und unabhängig ist. Greift man aus der so bezeichneten Reihe irgendeine ungrade Anzahl von Gliedern heraus und bildet aus ihnen eine Funktion $F(v)$, die im Zähler einen Faktor mehr enthält als im Nenner, so gibt es ein bestimmtes ϑ, das der Funktion $F(v)$ gleichändrig ist. Dieses ϑ hängt nicht davon ab, wie die Glieder der herausgegriffenen Menge auf Zähler und Nenner von $F(v)$ verteilt sind. Man kann es daher eindeutig durch die Kombination derjenigen Indizes bezeichnen, mit denen die Faktoren des Zählers und Nenners von $F(v)$ behaftet sind. So ist z. B. ϑ_{123} dasjenige ϑ, das dem Quotienten von $\vartheta_1\vartheta_2$ und ϑ_3 gleichändrig ist. Alle 4^n Theta des ganzen Systems werden demnach bezeichnet durch die Zahlen $1, 2 \cdots 2n+1$ und deren Kombinationen ungrader Ordnung.

Die Kombinationen grader Ordnung dagegen bedeuten Permutationen; $1\,2\,3\,4$ z. B. die Permutation, die eine Funktion N in diejenige N' überführt, die dem Produkt

$$\frac{\vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta_3\vartheta_4} \cdot N$$

gleichändrig ist. 0 ist die, die jedes ϑ in sich selbst übergehen läßt.

Bei dieser Bezeichnung ist sofort ersichtlich, ob zwei ϑ einander gleichartig oder ungleichartig sind und ob zwei Permutationen sich zueinander syzygetisch oder azygetisch verhalten.

Zwei Kombinationen a, b werden zu einer dritten ab zusammengesetzt, indem man die gemeinsamen Elemente wegläßt und die übrigbleibenden zu-

sammenfügt. Aus der Definition der Theta und der Permutationen durch die Funktionen $F(v)$ und $f(v)$ geht unmittelbar hervor:

Sind a und b Kombinationen grader Ordnung, so ist ab diejenige Permutation, die sich aus den beiden a, b zusammensetzt.

Ist a von ungrader, b von grader Ordnung, so ist ϑ_{ab} dasjenige ϑ, das aus ϑ_a durch die Permutation b entspringt.

Sind a und b beide von ungrader Ordnung, so ist ab diejenige Permutation, die ϑ_a in ϑ_b überführt.

Dazu kommt:

Zwei Permutationen a, b verhalten sich zueinander syzygetisch oder azygetisch, je nachdem in den Kombinationen a, b die Anzahl der gemeinsamen Elemente eine grade oder ungrade Zahl ist.

Für zweigliedrige Kombinationen ist der Satz unmittelbar klar. 12 und 13 sind die Permutationen, die ϑ_1 in ϑ_2 und ϑ_3 überführen, sie sind also azygetisch. 12 und 34 dagegen sind syzygetisch; denn $(12, 34)$ läßt sich aus den Faktoren $(12, 13)$ und $(12, 14)$ zusammensetzen, die beide -1 sind.

Ferner ist der Satz richtig für zwei Kombinationen grader Ordnung — und dies sind die Permutationen —, die kein gemeinsames Element haben. Denn hier kann man die Glieder von a, und ebenso die von b, paarweise zu zweigliedrigen zusammenfassen, die kein Element gemeinsam haben. (a, b) läßt sich dann als ein Produkt darstellen, dessen Faktoren (α, β) sämtlich $+1$ sind, weil α, β zweigliedrige Kombinationen bedeuten, die kein gemeinsames Element haben. Es ist also $(a, b) = +1$.

Dann gilt der Satz auch, wenn die Anzahl der gemeinsamen Elemente von a und b irgendeine grade Zahl ist. In diesem Falle setzen wir: $a = rs$, $b = rt$, wo r, s, t miteinander kein Element gemeinsam haben. Alle drei Kombinationen r, s, t sind ebenso wie a und b von grader Ordnung; sie stellen also Permutationen dar. Es ist aber:

$$(a, b) = (r, r)\ (r, s)\ (r, t)\ (s, t).$$

Alle vier Faktoren sind $+1$, da weder r mit s, noch r mit t, noch s mit t ein Element gemeinsam haben. Also ist auch in diesem Falle: $(a, b) = +1$.

Wenn aber a und b eine ungrade Anzahl von Elementen gemeinsam haben, so sei eins davon $\varkappa$. Unter λ verstehen wir ein Element, das in einer der beiden Kombinationen vorkommt, wir nehmen an, in a, und nicht in der andern. Wir zerlegen a in $\varkappa\lambda$ und a', und demnach (a, b) in $(\varkappa\lambda, b)$ und (a', b). Dann hat a' mit b eine grade Anzahl von Elementen gemeinsam; es ist also $(a', b) = 1$ und $(a, b) = (\varkappa\lambda, b)$. b hat mit $\varkappa\lambda$ nur das eine Element $\varkappa$ gemeinsam; wir können b zerlegen in zweigliedrige Kombinationen, von denen eine, $\varkappa\mu$, die Zahl $\varkappa$ enthält, während die andern mit $\varkappa\lambda$ kein Element gemeinsam haben. Dadurch zerfällt $(\varkappa\lambda, b)$ in eine Anzahl von Faktoren: einer von ihnen $(\varkappa\lambda, \varkappa\mu)$ ist -1, alle andern sind $+1$. Es ist daher $(a, b) = -1$.

Zwei Thetafunktionen, ϑ_a und ϑ_b, sind einander gleichartig, wenn die Ordnungszahlen der Kombinationen a, b einander gleich oder kongruent 0 modulo 4 sind; andernfalls sind sie ungleichartig, die eine grade, die andere ungrade.

Zunächst sind die ϑ der Basis: $\vartheta_1, \vartheta_2 \cdots \vartheta_{2n+1}$ alle einander gleichartig. Der Quotient

$$Q = \frac{\vartheta_1 \vartheta_2}{\vartheta_3 \vartheta_{123}}$$

ist aber ungrade, da $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ sich azygetisch verhalten. Folglich sind alle ϑ mit dreigliedrigem Index ungleichartig denen der Basis und untereinander gleichartig.

Wir nehmen mit Q die Permutation 45 vor. Dadurch geht Q in eine gleichfalls ungrade Klassenfunktion über. Drei von den in Q vorkommenden ϑ werden durch ϑ mit dreigliedrigem Index ersetzt, ϑ_{123} durch ϑ_{12345}. Also sind alle ϑ mit fünfgliedrigem Index denen mit dreigliedrigem ungleichartig, aber einander und denen der Basis gleichändrig.

Der Schluß läßt sich offenbar fortsetzen, indem man auf Q nicht nur die Permutation 45 anwendet, sondern auch die höhere 4567, und wenn $n \geqq 4$ ist, also $9 \leqq 2n+1$, auch 456789 usf. Alle Funktionen ϑ_a, bei denen die Ordnungszahl der Kombination a kongruent 1 mod 4 ist, sind einander gleichartig, und ungleichartig denen, bei denen die Ordnungszahl kongruent -1 mod 4 ist. Hiermit ist der ausgesprochene Satz bewiesen.

Neben den $2n+1$ Thetafunktionen mit einfachem Index, die die Basis bilden, ist diejenige von Interesse, die durch die Kombination höchster Ordnung $\omega = 1\,2\,3 \cdots 2n+1$ bezeichnet wird. Die Funktion ϑ_ω verhält sich zur ganzen Basis, die eine azygetische Menge ist, selbst azygetisch. Dies spricht sich dadurch aus, daß die Ergänzungsfunktion von $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_\omega$ diejenige ist, deren Index ω^1 die Elemente 1, 2 nicht enthält, also zwei Elemente weniger hat als ω. Danach ist ϑ_{ω^1} ungleichartig ϑ_ω, während ϑ_1 und ϑ_2 einander gleichartig sind; die aus allen vier gebildete ψ-Funktion ist also ungrade.

ϑ_ω ist aber den Funktionen der Basis nur dann gleichartig, wenn n eine grade Zahl ist; denn dann ist $2n+1 \equiv 1$ mod 4; in diesem Falle bilden die $2n+2$ Funktionen $\vartheta_1, \vartheta_2 \cdots \vartheta_{2n+1}, \vartheta_\omega$ eine homogene geschlossene azygetische Reihe; man kann dann ϑ_ω als ϑ_{2n+2} bezeichnen. Ist aber n ungrade, so ist $2n+1 \equiv -1$ mod 4; ϑ_ω ist von entgegengesetzter Art wie $\vartheta_1 \cdots \vartheta_{2n+1}$.

Ob die $2n+1$ Funktionen der Basis grade sind oder ungrade, hängt ebenfalls nur von der Zahl n ab, und zwar nur von ihrem Rest modulo 4. Wir wollen die Anzahl der Kombinationen $h$ter Ordnung von $2n+1$ Größen mit c_h bezeichnen. c_h ist dann der Koeffizient von x^h in der Reihenentwicklung

$$(1+x)^{2n+1} = \sum c_h x^h .$$

Es ist dann zugleich, bei ungradem h, c_h die Anzahl der Thetafunktionen, die durch h-gliedrige Indizes bezeichnet sind. Somit ist

$$S = c_1 - c_3 + c_5 - c_7 + \text{etc.}$$

der positive oder negative Überschuß derjenigen ϑ, die teils in der Basis enthalten, teils denen der Basis gleichartig sind, über die ϑ, die den Funktionen der Basis ungleichartig sind. ε soll ein Vorzeichen bedeuten, das $+1$

ist, wenn die Funktionen der Basis grade sind, -1 wenn sie ungrade sind. Dann ist offenbar $S = \varepsilon \cdot 2^n$, weil der Überschuß der graden über die ungraden Theta 2^n ist. Setzt man $x = i$, so erhält man:

$$(1+i)^{2n+1} = c_0 - c_2 + c_4 - \text{etc.} + i(c_1 - c_3 + c_5 - \cdots).$$

Es ist also $\varepsilon \cdot 2^n$ die Ordinate der komplexen Größe $(1+i)^{2n+1}$. Da $(1+i)^2 = 2i$ ist, so ist

$$(1+i)^{2n+1} = 2^n \cdot i^n (1+i);$$

folglich ist ε selbst die Ordinate von $i^n(1+i)$. Wenn n grade ist, ist daher $\varepsilon = (-1)^{\frac{1}{2}n}$; ist n ungrade, so ist $\varepsilon = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}$. Folglich besteht die Basis aus graden Funktionen, wenn $n \equiv 0 \bmod 4$ und wenn $n - 1 \equiv 0 \bmod 4$ ist; in den beiden andern Fällen sind die Theta der Basis ungrade.

Fügt man den Größen der Basis noch die Funktion ϑ_ω hinzu, so wird jedes ϑ und jede Permutation durch zwei komplementäre Kombinationen der Elemente $1, 2 \cdots 2n+1, \omega$ bezeichnet, von denen die eine alle diejenigen Elemente enthält, die in der andern nicht vorkommen. Das Vorzeichen (a, b) ist bestimmt durch die Gleichung $(a, b) = (-1)^\rho$, in der ρ die Anzahl der gemeinsamen Elemente von a und b bedeutet. Hier ist es gleichgültig, ob man für a und für b die eine Kombination setzt oder die ihr komplementäre. Denn es sei a' die zu a komplementäre Kombination und p der gemeinsame Teil von a und b, q der von a' und b. p und q haben kein Element gemeinsam; denn ein solches müßte sowohl in a wie in a' enthalten sein, was unmöglich ist. b enthält sowohl die Elemente von p wie die von q, aber keine andern; denn ein andres müßte entweder in a oder in a' enthalten sein, und dann würde entweder p nicht der größte gemeinsame Teil von a und b, oder q nicht der größte von a' und b sein. Folglich ist $b = pq$. Es sei ρ die Anzahl der Elemente von p, σ die Anzahl derer von q. Dann ist $\rho + \sigma \equiv 0 \bmod 2$, da die Kombination $b = pq$ von grader Ordnung ist. Es ist daher $(-1)^\rho = (-1)^\sigma$. Das heißt: Die Gleichung $(a, b) = (-1)^\rho$ bleibt bestehen, wenn man a durch die komplementäre Kombination a' ersetzt und unter ρ die Anzahl der Elemente versteht, die a' mit b gemeinsam hat.

In den Fällen, wo n, die Anzahl der Veränderlichen, eine grade Zahl ist, z. B. in den Fällen $n = 2$ und $n = 4$, an die ich hier hauptsächlich denke, bleibt auch bei den Thetafunktionen die volle Symmetrie bestehen, wenn man den Funktionen der Basis noch die ihnen gleichartige Funktion ϑ_ω hinzufügt und dadurch die Basis zu einer geschlossenen Menge macht. Bei ungradem n hört diese Symmetrie auf, aber sie kehrt wieder, wenn man eine andre Bezeichnung der ϑ wählt: wir bestimmen jedes ϑ durch die Permutation, durch die es aus der Funktion ϑ_ω hervorgeht.

Jede Permutation hat zwei Darstellungen, durch zwei komplementäre Kombinationen grader Ordnung, von denen die eine a das Element ω enthält, die andre a' nicht. Es sei f die Ordnungszahl von a. Dann ist $a\omega$ von der Ordnung $f - 1$, weil zwei gleiche Elemente sich bei der Zusammensetzung gegenseitig aufheben. Da $a\omega$ das Element ω nicht enthält, so ist $\vartheta_{a\omega}$ gleichändrig der Funktion ϑ_ω oder nicht, je nachdem $f - 1$ kongruent $2n+1 \bmod 4$

ist, oder nicht; also wenn n ungrade ist, je nachdem $f \equiv 0$ oder $\equiv 2 \bmod 4$ ist. Die Ordnungszahl von a' sei f'. Dann ist $f+f' = 2n+2$, also kongruent $0 \bmod 4$, und da f, f' grade Zahlen sind, ist auch $f'-f \equiv 0 \bmod 4$. Folglich ist es für die Frage, ob $\vartheta_{a\omega}$ der Funktion ϑ_ω gleichartig ist oder nicht, gleichgültig, ob die Kombination a das Element ω enthält oder nicht: in jedem Falle ist $\vartheta_{a\omega}$ gleichartig ϑ_ω, wenn die Ordnung der Kombination a durch 4 teilbar ist; und ungleichartig, wenn sie nicht durch 4, sondern nur durch 2 teilbar ist.

Jetzt können wir das Zeichen ω überall weglassen, und ϑ_ω einfach mit ϑ, $\vartheta_{a\omega}$ mit ϑ_a bezeichnen. In den Untersuchungen von Frobenius über die Theta von drei Veränderlichen ist ϑ ein grades Theta; $\vartheta_{12}, \vartheta_{13}, \vartheta_{23} \cdots \vartheta_{78}$ sind die 28 ungraden. Die übrigen graden sind doppelt bezeichnet, durch komplementäre viergliedrige Kombinationen; es ist $\vartheta_{1234} = \vartheta_{5678}$, usf.

Für die Behandlung der Thetaprobleme ist es natürlich ein Vorteil, daß azygetische Reihen, und unter diesen auch homogene, vorhanden sind. Wenn man an einer solchen Reihe ganz festhielte, so ginge doch die volle Harmonie des Thetasystems verloren, weil dann einige ϑ vor den übrigen bevorzugt werden. Betrachtet man dagegen die homogene azygetische Reihe ϑ_1, ϑ_2 usf. nur als eine unter vielen, die dieselbe Beschaffenheit haben, so ist die Harmonie gewahrt.

Es bleibt noch ein Punkt zu erörtern, der die zu einem syzygetischen Feld $n-k$ter Stufe gehörigen homogenen Produkte Π betrifft. Für diese besteht ein Satz, der ihre Ähnlichkeit mit den Thetafunktionen von k Veränderlichen verstärkt. Er ist die Erweiterung eines Satzes, der von mir aufgestellt war (1878), den aber Noether, vielleicht auch Riemann, schon vorher gekannt hatten (vgl. Noether, Erl. Ber. 28. 7. 1879).

Dem syzygetischen Felde (α), dessen Stufenzahl h kleiner als n ist, entsprechen die 2^{2k} homogenen Produkte Π — wobei $k = n-h$ ist. Diese gehen durch die 2^h Permutationen des Feldes (α) in sich selbst über. Durch die $2^h(2^{2k}-1)$ aber, die zum Felde (α) syzygetisch sind, ohne zu diesem Felde zu gehören, gehen sie ineinander über. Ist γ eine dieser $2^h(2^{2k}-1)$ Permutationen, so gehören alle 2^h, die sich durch die Zusammensetzung von γ mit den Gliedern des Feldes (α) ergeben, ebenfalls dazu. Man kann diese 2^h Permutationen $\gamma\alpha$ als einander kongruent mod (α) bezeichnen. Es lassen sich $2^{2k}-1$ nach dem Modul (α) inkongruente Permutationen aufstellen, die die 2^{2k} Funktionen Π ineinander überführen; dazu tritt die Permutation 0, die jedes Π in sich selbst überführt. Wir denken uns die 2^{2k} Permutationen, was offenbar möglich ist, so gewählt, daß sie eine Gruppe, ein Feld bilden und bezeichnen dieses Feld mit (β). Dem Felde $h$ter Stufe (α) ist auf diese Weise ein Feld (β) zugeordnet, das von der Stufe $2k$ ist. Das Feld (α) ist syzygetisch, (β) nicht; aber (β) verhält sich zu (α) syzygetisch, d. h. jedes Glied von (β) ist syzygetisch zu jedem Gliede von (α).

Wir sagen zunächst: Als Basis von (β) kann eine im Felde (β) enthaltene azygetische Menge $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_{2k}$ gewählt werden.

Daß man eine Permutation β_1 aufstellen kann, die in (α) nicht enthalten, aber zu (α) syzygetisch ist, ist offenbar; es ist auch leicht zu sehen, daß man diesem β_1 ein β_2 hinzufügen kann, das sich zum Felde (α) syzygetisch, zu

β_1 aber azygetisch verhält. — Wir nehmen an, daß eine Menge von weniger als $2k$ Gliedern: $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_r$ vorliege, und zwar eine nicht geschlossene, die azygetisch ist und in dem Felde (β) enthalten. Diese Menge kann erweitert werden.

Denn es gibt nach dem Anzahlsatz $2^{2n-h-r} = 2^h \cdot 2^{2k-r}$ Permutationen, die zu (α) syzygetisch, zu $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_r$ azygetisch sind. 2^{2k-r} davon gehören dem modulo (α) reduzierten Felde (β) an. Ist r grade, so ist eine davon diejenige, die, der Menge $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_r$ hinzugefügt, sie zu einer geschlossenen macht; dann verstehen wir unter β_{r+1} eine der andern. Ist r ungrade, so kann β_{r+1} eine beliebige der 2^{2k-r} sein. In jedem Falle bekommen wir eine in (β) enthaltene nicht geschlossene azygetische Menge $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_{r+1}$.

Demnach kann aus dem Felde (β) eine azygetische Menge $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_{2k}$ ausgesondert werden — diese ist eine Basis von (β).

Wir nehmen eine Thetafunktion, die unter den 2^{2k+h} Faktoren der 2^{2k} homogenen Produkte Π vorkommt und bezeichnen sie mit ϑ_1; dann mit $\vartheta_2, \vartheta_3 \cdots \vartheta_{2k+1}$ diejenigen, die aus ϑ_1 durch die Permutationen $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_{2k}$ entspringen, so daß ϑ_2 aus ϑ_1 durch β_1, ϑ_{2k+1} aus ϑ_1 durch β_{2k} hervorgeht. Damit ist eine nicht geschlossene azygetische Menge von Thetafunktionen gegeben: $\vartheta_1, \vartheta_2 \cdots \vartheta_{2k+1}$. Sie kann grade und ungrade Funktionen gemischt enthalten. Aber es gibt eine bestimmte im Felde (β) enthaltene Permutation ω, durch die sie in eine homogene Menge übergeführt wird. Es seien $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{2k}$ wieder Vorzeichen, und zwar, für $\mu = 1, 2 \cdots 2\varkappa$, $\varepsilon_\mu = +1$ oder -1, je nachdem $\vartheta_{\mu+1}$ dem Anfangsgliede ϑ_1 gleichartig ist oder nicht. Wir verstehen unter $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_h$ irgend eine Basis von (α) und stellen für ω die $h + 2k$ Bedingungen auf:

$$(\omega, \alpha_\lambda) = 1 \quad (\lambda = 1, 2 \cdots h),$$
$$(\omega, \beta_\mu) = \varepsilon_\mu \quad (\mu = 1, 2 \cdots 2k).$$

Dem wird genügt durch $2^{2n-h-2k} = 2^h$ Permutationen, die einander mod (α) kongruent sind; ω ist derjenige unter ihnen, der dem Felde (β) angehört.

Wir bezeichnen für $\mu = 1, 2 \cdots 2k+1$, mit ϑ'_μ dasjenige ϑ, das aus ϑ_μ durch die Permutation ω entspringt. Dann ist $\vartheta'_1, \vartheta'_2 \cdots \vartheta'_{2k+1}$ eine homogene Menge. Es genügt, zu zeigen, daß ϑ'_2 und ϑ'_1 einander gleichartige Funktionen sind. Der Quotient

$$\frac{\vartheta'_1}{\vartheta_1} \cdot \frac{\vartheta_2}{\vartheta'_2} = \psi(v)$$

ist eine Klassenfunktion, da ϑ'_2 aus ϑ_2 durch dieselbe Permutation entspringt, wie ϑ'_1 aus ϑ_1. Es ist aber:

$$\psi(-v) = (\omega, \beta_1)\psi(v) = \varepsilon_1 \psi(v),$$

da ϑ_1 in ϑ'_1 durch die Permutation ω, in ϑ_2 durch β_1 übergeht. Andrerseits ist der Quotient von ϑ_2 und ϑ_1 grade oder ungrade, je nachdem ε_1 positiv oder negativ ist. Folglich ist der Quotient von ϑ'_2 und ϑ'_1 eine grade Funktion, und ϑ'_2 ist gleichändrig ϑ'_1.

Von ϑ_1 war nur vorausgesetzt: es sollte unter den 2^{2k+h} Faktoren der homogenen Produkte vorkommen. Diese Bedingung ist auch für ϑ'_1 erfüllt. Denn die 2^{2k} homogenen Produkte Π gehen ineinander über durch die Per-

mutationen des Feldes (β). Dazu gehört ω. Durch ω möge Π in Π' übergehen. Dann ist ϑ'_1 ein Faktor von Π', wenn ϑ_1 einer von Π ist. Da die zweite Menge demnach ganz denselben Bedingungen genügt wie die erste, so kann man die erste durch die zweite ersetzen oder auch unmittelbar $\vartheta_1, \vartheta_2 \cdots \vartheta_{2k+1}$ als homogene azygetische Menge annehmen. Ferner kann man die homogenen Produkte $\Pi_1, \Pi_2 \cdots \Pi_{2k+1}$, unter deren Faktoren der Reihe nach die Funktionen $\vartheta_1, \vartheta_2 \cdots \vartheta_{2k+1}$ vorkommen, als eine azygetische Menge oder Reihe bezeichnen. So läßt sich der Satz aussprechen:

Aus den 2^{2k} homogenen Produkten, die zu einem syzygetischen Felde $n-k$ter Stufe gehören, lassen sich $2k+1$ auswählen, die eine azygetische Reihe bilden und deren Faktoren entweder sämtlich grade oder sämtlich ungrade ϑ sind.

Diesen an Folgerungen reichen Satz darf ich als ein Noethersches Theorem bezeichnen, wenn er auch von Noether in ganz andrer Form dargestellt ist — die Worte azygetisch und syzygetisch waren noch nicht vorhanden, und Noether betrachtet Gruppen von Thetacharakteristiken, nicht Thetaprodukte. Aber mit vollem Recht legte Noether besonderes Gewicht auf den von ihm aufgestellten Satz.

Ausgegeben am 28. Mai.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1925 XIV—XVII

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

Library of Congress
NOV 28 1925
Smithsonian Dep.

BERLIN 1925

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang einer aufzunehmenden Mitteilung soll in der Regel in den Sitzungsberichten bei Mitgliedern 32, bei Nichtmitgliedern 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte, in den Abhandlungen 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Abhandlungen nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 200 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1925

XIV. Gesamtsitzung. 23. April.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. von Wilamowitz-Moellendorff sprach über Griechische Heldensage II.

Im Anschluß an den ersten Vortrag, Sitzungsber. S. 41, werden behandelt die Sagen von Meleagros, Atalante, Andromeda, Boreaden, Oinone, Harpalyke, Linos und Koroibos, Theseus, Achilleus.

2. Hr. Kehr legte den Bericht über die Herausgabe der Monumenta Germaniae historica 1924 vor.

3. Hr. von Wilamowitz-Moellendorff teilte mit, daß Hr. Dr. G. Klaffenbach in Berlin-Wilmersdorf die sämtlichen Abklatsche und anderes Material zu den Inschriften von Delphi, das ihm aus dem Nachlasse von Prof. Pomtow zugefallen ist, der Akademie geschenkt hat.

Ausgegeben am 25. Juni.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1925

XV. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 30. April.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

*1. Hr. Hahn sprach über hochemanierende feste Radiumpräparate.

Die Tatsache, daß feste Thorium- und Aktiniumpräparate ihre Emanation weitgehend nach außen abgeben, die üblichen Radiumpräparate dagegen nicht, beruht darauf, daß die ersteren im allgemeinen in Form oberflächenreicher Hydroxyde zur Verwendung gelangen, das Radium dagegen als grobkristallisiertes Salz.

Fußend auf systematischen Untersuchungen über sehr oberflächenreiche Thorpräparate wurden nunmehr auch Radiumpräparate gewonnen, die ihre Emanation in festem Zustande abgeben. Die besten Resultate wurden mit Eisenhydroxyd erhalten, in das das Radium als Sulfat oder Karbonat derartig eingebettet wird, daß ein Zusammenschließen der Radiumsalzmoleküle zu Kriställchen nicht stattfinden kann. Solche Präparate emanieren anfangs zu 99 Prozent und altern nur sehr langsam. Nach einem Jahr emanieren sie noch zu über 95 Prozent. Diese Präparate haben gegenüber Radiumlösungen eine Reihe von Vorteilen, die im einzelnen erörtert werden.

2. Hr. Schottky legte seine dritte Mitteilung über die Harmonie des Thetasystems vor.

Es wird die Frage erörtert, wie die konstanten Faktoren der Theta zu bestimmen sind.

3. Hr. Hellmann sprach über »Die Verbreitung der Hydrometeore auf der Erde«.

An der Erdoberfläche kann man eine Polargrenze und eine Äquatorialgrenze der Hydrometeore unterscheiden, in vertikaler Richtung auch eine Höhengrenze. Es wird versucht, diese Grenzen aus den vorhandenen Beobachtungen zu bestimmen. Die Hydrometeoration ist am einfachsten im Äquatorialgebiet; dort gibt es nur Tau, Regen und bisweilen Hagel, dessen sporadisches Auftreten im Gegensatz steht zu der großflächigen Ausdehnung des Regens. Die große Mannigfaltigkeit aller Kondensationsformen tritt nur in mittleren Breiten in die Erscheinung.

Über die Harmonie des Thetasystems.

Von F. SCHOTTKY.

Dritte Mitteilung.

Die 4^n Funktionen des Thetasystems sind durch die Änderungen, die sie erfahren, wenn man v um die Perioden der Klassenfunktionen vermehrt, bis auf konstante Faktoren bestimmt.

Ist A irgendeins der Theta, und sind $A_\alpha, A_\beta, A_{\alpha\beta}$ diejenigen, in die A durch die Permutationen $\alpha, \beta, \alpha\beta$ übergeht, so ist der Quotient

$$\frac{A_\alpha A_\beta}{A A_{\alpha\beta}} = \psi(v)$$

eine Klassenfunktion. Die beiden Permutationen α, β verwandeln $\psi(v)$ in seinen reziproken Wert, die aus beiden zusammengesetzte $\alpha\beta$ läßt $\psi(v)$ ungeändert. Ist $\frac{1}{2}p$ eine der halben Perioden, die die Permutation $\alpha\beta$ hervorbringen, so ist

$$\psi(v + \tfrac{1}{2}p) = \psi(-v).$$

Denn führt man die Quotienten ein:

$$f = \frac{A_\alpha}{A}, \quad g = \frac{A_\beta}{A_{\alpha\beta}},$$

so ist $f(v+\frac{1}{2}p) = cg(v)$, wo c eine Konstante bedeutet; und da $fg = \psi$ ist, so ist $f(v)f(v+\frac{1}{2}p) = c\psi(v)$. Daraus folgt, indem man v durch $-v-\frac{1}{2}p$ ersetzt: $f(v+\frac{1}{2}p)f(v) = c\psi(-v-\frac{1}{2}p)$. Daher ist $\psi(-v-\frac{1}{2}p) = \psi(v)$, $\psi(v-\frac{1}{2}p) = \psi(-v)$, und da ψ die Periode p hat: $\psi(v+\frac{1}{2}p) = \psi(-v)$. Wenn α und β sich zueinander azygetisch verhalten und daher $\psi(v)$ eine ungrade Funktion ist, so ist $\psi(v+\frac{1}{2}p)$ nicht gleich $\psi(v)$, sondern gleich $-\psi(v)$.

Es sei γ eine beliebige Permutation. Durch diese geht, wenn γ weder 0 noch $\alpha\beta$ ist, ψ in eine von ψ verschiedene Funktion

$$\psi_\gamma = \frac{A_{\alpha\gamma} A_{\beta\gamma}}{A_\gamma A_{\alpha\beta\gamma}}$$

über, und wenn $\frac{1}{2}p_\gamma$ eine der halben Perioden bedeutet, die die Permutation γ hervorbringen, so kann sich $\psi(v+\frac{1}{2}p_\gamma)$ von $\psi_\gamma(v)$ nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden. Dieser Faktor hängt natürlich im allgemeinen davon ab, wie die konstanten Faktoren der Theta gewählt werden. Daß nicht

durchweg $\psi(v+\frac{1}{2}p_\gamma) = \psi_\gamma(v)$ sein kann, zeigt das Beispiel $\gamma = \alpha\beta$. Wir gehn einen Schritt weiter, indem wir eine vierte Permutation δ hinzunehmen, die ψ in ψ_δ, ψ_γ in $\psi_{\gamma\delta}$ verwandelt.

Den Quotienten von ψ und ψ_δ bezeichnen wir mit ω, den von ψ_γ und $\psi_{\gamma\delta}$ entsprechend mit ω_γ — so daß ω und ω_γ Ausdrücke bedeuten, die aus je acht Thetafunktionen gebildet sind. Wir behaupten: die konstanten Faktoren der Theta lassen sich so wählen, daß immer

$$\omega(v+\tfrac{1}{2}p_\gamma) = \omega_\gamma(v)$$

ist, wie man auch die Permutationen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und die Funktion A wählen mag.

Das soll zunächst eine bloße Annahme sein. Die Frage ist: was folgt aus ihr?

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind beliebige Permutationen; nur die Null, die keine wirkliche Permutation ist, schließen wir aus. Dagegen kann $\delta = \gamma$ sein, auch $\gamma = \beta$, $\beta = \alpha$. Wir bilden der Reihe nach die Quotienten

$$\frac{A_\alpha}{A} = f, \quad \frac{f}{f_\beta} = \psi, \quad \frac{\psi}{\psi_\delta} = \omega,$$

wo A_α aus A durch α, f_β aus f durch β, ψ_δ aus ψ durch die Permutation δ hervorgeht.

Für $\delta = \beta$ ist $\psi_\delta = \psi_\beta$ der reziproke Wert von ψ und daher $\omega = \psi^2$. Wenn die Theta der Annahme entsprechend definiert sind, so ist demnach $\psi^2(v+\frac{1}{2}p_\gamma) = \psi_\gamma^2(v)$.

Ist außerdem $\beta = \alpha$, so ist $f_\beta = f_\alpha$ der reziproke Wert von f und $\psi = f^2$. Daher ist $f^4(v+\frac{1}{2}p_\gamma) = f_\gamma^4(v)$.

$f^2(v)$ und $\psi(v)$ sind Klassenfunktionen. Von ihren Quadraten kann man sagen, daß die Vermehrung von v um eine halbe Periode genau dieselbe Veränderung herbeiführt wie die dieser halben Periode entsprechende Permutation. Bei den Größen selbst aber kann ein Vorzeichen hinzutreten; es sei: $\psi(v+\frac{1}{2}p_\gamma) = \varepsilon\psi_\gamma(v)$. Dann ist auch $\psi_\delta(v+\frac{1}{2}p_\gamma) = \varepsilon\psi_{\gamma\delta}(v)$, da $\omega(v+\frac{1}{2}p_\gamma) = \omega_\gamma(v)$ ist. Das heißt nichts andres als: Das Zeichen ε bleibt dasselbe, wenn man A durch A_δ, also durch ein beliebiges anderes ϑ ersetzt. Somit ist ε von α, β, γ abhängig, aber nicht von A. Wir schreiben daher:

$$\psi(v+\tfrac{1}{2}p_\gamma) = (\alpha, \beta, \gamma)\,\psi_\gamma(v).$$

Das gilt auch für $\beta = \alpha$. In diesem Falle ist $\psi = f^2$, also $f^2(v+\frac{1}{2}p_\gamma) = (\alpha, \alpha, \gamma)$ $f_\gamma^2(v)$. Für das speziellere Zeichen (α, α, γ) führen wir ein:

$$(\alpha, \alpha, \gamma) = (\gamma/\alpha),$$

so daß

$$f^2(v+\tfrac{1}{2}p_\gamma) = (\gamma/\alpha) f_\gamma^2(v)$$

ist. — Da die Funktion

$$\psi(v) = \frac{f}{f_\beta} = \frac{A_\alpha A_\beta}{A A_{\alpha\beta}}$$

dieselbe bleibt, wenn man α mit β vertauscht, so ist (α, β, γ) symmetrisch in bezug auf α und β:

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (\beta, \alpha, \gamma).$$

Das Zeichen bleibt aber auch ungeändert, wenn man β mit γ vertauscht. Denn da $f(v+\frac{1}{2}p_\beta) = cf_\beta(v)$, $f_\beta \cdot \psi = f$ ist, so ist:

$$\psi(v) f(v+\tfrac{1}{2}p_\beta) = cf(v),$$

und da $\psi(v+\frac{1}{2}p_\gamma) = (\alpha, \beta, \gamma)\psi_\gamma(v)$ ist:

$$(\alpha, \beta, \gamma)\psi_\gamma(v) f(v+\tfrac{1}{2}p_\beta+\tfrac{1}{2}p_\gamma) = cf(v+\tfrac{1}{2}p_\gamma).$$

Aus beiden Gleichungen folgt:

$$(\alpha, \beta, \gamma)\frac{\psi_\gamma(v)}{\psi(v)} = \frac{f(v+\frac{1}{2}p_\beta)f(v+\frac{1}{2}p_\gamma)}{f(v)f(v+\frac{1}{2}p_\beta+\frac{1}{2}p_\gamma)}.$$

Der Ausdruck rechts ist symmetrisch in bezug auf β und γ; der Quotient von von ψ_γ und ψ ebenfalls; es ist:

$$\frac{\psi_\gamma}{\psi} = \frac{f_\beta f_\gamma}{f f_{\beta\gamma}}.$$

Folglich ist $(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma, \beta)$. — Damit ist bewiesen, daß das Zeichen (α, β, γ) vollkommen symmetrisch ist in bezug auf alle drei Permutationen.

Eine zweite Eigenschaft besteht darin, daß $(\alpha, \beta, \gamma\delta)$ sich zerlegen läßt in (α, β, γ) und (α, β, δ). Denn aus den Gleichungen $\psi(v+\frac{1}{2}p_\gamma) = (\alpha, \beta, \gamma)\psi_\gamma(v)$, $\psi_\gamma(v+\frac{1}{2}p_\gamma) = (\alpha, \beta, \delta)\psi_{\gamma\delta}$ folgt: $\psi(v+\frac{1}{2}p_{\gamma\delta}) = (\alpha, \beta, \gamma)(\alpha, \beta, \delta)\psi_{\gamma\delta}(v)$. Es ist daher:

$$(\alpha, \beta, \gamma)(\alpha, \beta, \delta) = (\alpha, \beta, \gamma\delta).$$

Drittens ist:

$$(\alpha, \beta, \alpha\beta) = (\alpha, \beta),$$

wo (α, β) das Frobeniussche Zeichen bedeutet, $+1$ oder -1, je nachdem $\psi(v)$ grade oder ungrade ist.

Denn für $\gamma = \alpha\beta$ ist $\psi_\gamma(v)$ mit $\psi(v)$ identisch und $\psi(v+\frac{1}{2}p_\gamma) = \psi(-v)$. —

Das Zeichen $(\alpha, \beta, \alpha\beta)$ läßt sich zerlegen in (α, β, α) und (α, β, β), also in (β/α) und (α/β). Daher ist:

$$(\alpha/\beta)(\beta/\alpha) = (\alpha, \beta).$$

Ferner ist:

$$(\beta/\alpha)(\gamma/\alpha) = (\beta\gamma/\alpha);$$

denn $(\alpha, \alpha, \beta\gamma)$ läßt sich in (α, α, β) und (α, α, γ) zerlegen. Es ist auch:

$$(\alpha/\beta)(\alpha/\gamma) = (\alpha/\beta\gamma);$$

denn $(\alpha, \beta\gamma, \beta\gamma)$ zerfällt in vier Faktoren, von denen zwei einander gleich sind; die beiden andern sind (α, β, β) und (α, γ, γ). —

Es bleibt zu zeigen, daß man wirklich die Theta der Bedingung $\omega(v+\frac{1}{2}p_\gamma) = \omega_\gamma(v)$ gemäß definieren kann.

Eines der Theta ist die Funktion $\vartheta(v) = \vartheta(v_1, v_2 \cdots v_n)$, die die Perioden L mit den Klassenfunktionen gemeinsam hat, während die zugehörige $\eta(v) = E(v), \vartheta(v)$

die Perioden M besitzt. Für eine beliebige Periode $p = L + M$ ist $e^{m(2v+M)}\vartheta(v+p) = \vartheta(v)$. Wir setzen, dieser Formel entsprechend:

$$e^{m(v+\frac{1}{4}M)}\vartheta(v+\tfrac{1}{2}p) = \vartheta(v;\tfrac{1}{2}p).$$

Dann folgt sofort, daß $\vartheta(v;p) = \vartheta(v)$ ist.

In der Gleichung $e^{m'(v+\frac{1}{4}M')}\vartheta(v+\frac{1}{2}p') = \vartheta(v;\frac{1}{2}p')$ vermehren wir ebenfalls v um $\frac{1}{2}p$ und multiplizieren mit dem Faktor $e^{m(v+\frac{1}{4}M)}$. Dadurch entsteht $\vartheta(v+\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}p')$, multipliziert mit einer Exponentialgröße, deren Exponent $m(v+\frac{1}{4}M)+m'(v+\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}M')$ ist. Da $p = L+M$, $L = l\pi i$, $mM' = m'M$ ist, läßt sich der Exponent auf die Form bringen:

$$lm'(\tfrac{1}{2}\pi i)+(m+m')\left(v+\frac{M+M'}{4}\right).$$

Es ist daher:

$$e^{m(v+\frac{1}{4}M)}\vartheta(v+\tfrac{1}{2}p;\tfrac{1}{2}p') = i^{lm'}\vartheta(v;\tfrac{1}{2}p+\tfrac{1}{2}p').$$

Man gewinnt daraus die spezielle Formel:

$$\vartheta(v;\tfrac{1}{2}p+p') = (-1)^{lm'}\vartheta(v;\tfrac{1}{2}p),$$

indem man $\frac{1}{2}p'$ durch p', somit auch m' durch $2m'$ ersetzt.

Demnach ändert $\vartheta(v;\frac{1}{2}p)$ höchstens sein Vorzeichen, wenn man die halbe Periode $\frac{1}{2}p$ durch eine ihr kongruente ersetzt.

Wir nehmen eine Reihe von $2n+2$ Thetafunktionen an: A, $A_1 \cdots A_{2n+1}$, die geschlossen ist, während $2n+1$ davon eine unabhängige Menge bilden, und bezeichnen mit $1, 2 \cdots 2n+1$ die Permutationen, die von A aus zu A_1, $A_2 \cdots A_{2n+1}$ führen. Da diese ebenfalls eine geschlossene Menge sind, so entsteht durch die Zusammensetzung aller die Permutation 0. Kein Teil dieser Menge ist geschlossen. Daraus folgt, daß sich jede der 4^n Permutationen durch zwei einander komplementäre Kombinationen der Elemente $1, 2 \cdots 2n+1$ darstellen läßt, durch eine von grader und eine von ungrader Ordnung.

Aus jeder von den Scharen halber Perioden, die den Permutationen $1, 2 \cdots 2n+1$ entsprechen, wählen wir eine aus und bezeichnen alle durch $\frac{1}{2}p_1, \frac{1}{2}p_2 \cdots \frac{1}{2}p_{2n+1}$; ihre Summe ist eine ganze Periode. Wenn α irgendeine Permutation ist, so verstehen wir unter $\bar{p}_\alpha$ den Ausdruck $\sum \bar{p}_h$, die Summe erstreckt über alle Elemente h der Reihe $1, 2 \cdots 2n+1$, die in α enthalten sind, wenn α durch eine Kombination g r a d e r Ordnung dargestellt wird. Hiernach ist z. B. $\bar{p}_1$ nicht gleich p_1, sondern gleich $p_2+p_3+\cdots+p_{2n+1}$. — Kombinationen grader Ordnung geben, zusammengesetzt, immer wieder solche von grader Ordnung.

Sind α, β, γ irgendwelche Permutationen, so ist

$$S = \bar{p}_\alpha+\bar{p}_\beta+\bar{p}_\gamma-\bar{p}_{\alpha\beta}-\bar{p}_{\alpha\gamma}-\bar{p}_{\beta\gamma}+\bar{p}_{\alpha\beta\gamma}$$

immer das Vierfache einer ganzen Periode oder 0.

Denn denkt man sich die einzelnen Summen $\bar{p}_\alpha, \bar{p}_\beta$ usf. aufgelöst und α, β, γ selbst als Kombinationen grader Ordnung gegeben, so kommen in dem ganzen Ausdruck nur solche Größen p_h vor, mit positivem oder nega-

tivem Vorzeichen, bei denen das Element h wenigstens in einer der Kombinationen α, β, γ enthalten ist. Ist h nur in α enthalten und nicht in β, γ, so ist p_h ein Glied von $\bar{p}_\alpha$ und auch von $\bar{p}_{\alpha\beta}, \bar{p}_{\alpha\gamma}, \bar{p}_{\alpha\beta\gamma}$, aber nicht von $\bar{p}_\beta$, $\bar{p}_\gamma, \bar{p}_{\beta\gamma}$; p_h fällt daher aus dem Ausdruck S heraus.

Ist h in zweien der Kombinationen α, β, γ enthalten, z. B. in α und β und nicht in γ, so ist p_h ein Glied von $\bar{p}_\alpha, \bar{p}_\beta, \bar{p}_{\alpha\gamma}, \bar{p}_{\beta\gamma}$. In den andern Summen ist p_h nicht enthalten. Es fällt daher p_h ebenfalls fort.

Ist dagegen h ein allen drei Kombinationen α, β, γ gemeinsames Element, so ist p_h in den Summen $\bar{p}_\alpha, \bar{p}_\beta, \bar{p}_\gamma, \bar{p}_{\alpha\beta\gamma}$ enthalten, in den übrigen nicht. Es kommt daher p_h viermal in S mit positivem Zeichen vor.

Demnach ist $S = 4p_r$, wo p_r den gemeinsamen Teil der drei Summen $\bar{p}_\alpha, \bar{p}_\beta, \bar{p}_\gamma$ bedeutet. Ist kein gemeinsamer Teil vorhanden, so ist $p_r = 0$.

Jede Periode p läßt sich in ein L und ein M zerlegen; zu L und M gehören die ganzzahligen Züge l und m, von denen p linear und homogen abhängt. Ist p das Doppelte oder Vierfache einer ganzen Periode, so sind die ganzzahligen Züge l, m durch 2 teilbar oder durch 4. Wir führen zu den Perioden $p_h (h = 1, 2 \cdots 2n+1)$ und den aus ihnen gebildeten Summen $\bar{p}_\alpha$ die ihnen entsprechenden Züge L_h, M_h, l_h, m_h; $\bar{L}_\alpha, \bar{M}_\alpha, \bar{l}_\alpha, \bar{m}_\alpha$ ein. Da der Ausdruck S das Vierfache einer ganzen Periode ist, so ist

$$\bar{m}_\alpha + \bar{m}_\beta + \bar{m}_\gamma - \bar{m}_{\alpha\beta} - \bar{m}_{\alpha\gamma} - \bar{m}_{\beta\gamma} + \bar{m}_{\alpha\beta\gamma} \equiv 0 \mod 4 .$$

Es ist aber $\bar{m}_\alpha + \bar{m}_\beta - \bar{m}_{\alpha\beta} = 2 m_s$, wo m_s den gemeinsamen Teil der Summen $\bar{m}_\alpha, \bar{m}_\beta$ bedeutet — also s den gemeinsamen Teil von α und β, wenn man sich α und β als Kombinationen grader Ordnung gegeben denkt. Wir bezeichnen den gemeinsamen Teil von $\bar{m}_\alpha$ und $\bar{m}_\beta$, der durch die Permutationen α, β eindeutig bestimmt ist, mit $m_{\alpha,\beta}$, so daß $\bar{m}_\alpha + \bar{m}_\beta - \bar{m}_{\alpha\beta} = 2 m_{\alpha,\beta}$ ist. Die aufgestellte Kongruenz führt dann zu der folgenden:

$$\bar{m}_{\alpha,\beta} + \bar{m}_{\alpha,\gamma} - \bar{m}_{\alpha,\beta\gamma} \equiv 0 \text{ modulo } 2 .$$

Wir definieren jetzt das ganze Thetasystem, indem wir setzen, für jede Permutation α:

$$e^{\bar{m}_\alpha (v + \frac{1}{4} \bar{M}_\alpha)} \vartheta(v; \tfrac{1}{2} \bar{p}_\alpha) = \vartheta_\alpha(v) .$$

$\vartheta_0(v)$ ist dabei mit $\vartheta(v)$ identisch.

Es war die Gleichung aufgestellt worden:

$$e^{m(v + \frac{1}{4} M)} \vartheta(v + \tfrac{1}{2} p; \tfrac{1}{2} p') = i^{lm'} \vartheta\left(v; \frac{p+p'}{2}\right) .$$

Es werde gesetzt: $p = \bar{p}_\gamma, p' = \bar{p}_\delta$, wobei γ, δ irgend zwei Permutationen sind. Dann folgt zunächst:

$$e^{\bar{m}_\gamma (v + \frac{1}{4} \bar{M}_\gamma)} \vartheta_\delta(v + \tfrac{1}{2} \bar{p}_\gamma) = i^{\bar{l}_\gamma \bar{m}_\delta} \vartheta\left(v; \frac{\bar{p}_\gamma + \bar{p}_\delta}{2}\right) .$$

Da $\bar{p}_\gamma + \bar{p}_\delta = \bar{p}_{\gamma\delta} + 2 \bar{p}_{\gamma,\delta}$ ist, so ist:

$$\vartheta\left(v; \frac{\bar{p}_\gamma + \bar{p}_\delta}{2}\right) = \vartheta(v; \tfrac{1}{2} \bar{p}_{\gamma\delta} + p_{\gamma,\delta}) .$$

Es ist aber:

$$\vartheta(v;\tfrac{1}{2}p+p') = (-1)^{lm'}\vartheta(v;\tfrac{1}{2}p).$$

Folglich:

$$\vartheta(v;\tfrac{1}{2}\bar{p}_{\gamma\delta}+p_{\gamma,\delta}) = (-1)^{\bar{l}_{\gamma\delta}m_{\gamma,\delta}}\vartheta_{\gamma\delta}(v).$$

Man hat daher die Formel:

$$e^{\bar{m}_\gamma(v+\frac{1}{4}\bar{M}_\gamma)}\vartheta_\delta(v+\tfrac{1}{2}\bar{p}_\gamma) = i^{\bar{l}_\gamma\bar{m}_\delta}(-1)^{\bar{l}_{\gamma\delta}m_{\gamma,\delta}}\vartheta_{\gamma\delta}(v).$$

Damit ist schwer zu rechnen. Es kommt aber sehr wenig darauf an oder gar nicht, wie die Theta selbst ineinander übergehn, wenn man v um halbe Perioden vermehrt, sondern nur darauf, wie sich in dieser Beziehung die Klassenfunktionen, besonders f^2 und ψ, verhalten.

Wir gehn zurück zur Funktion:

$$\frac{A_\alpha A_\beta}{A A_{\alpha\beta}}.$$

Es sei δ die Permutation, durch die A aus der Funktion $\vartheta(v)$ hervorgeht — also $A=\vartheta_\delta$, $A_\alpha=\vartheta_{\alpha\delta}$, usf. Wenn α und β gegeben sind, hängt der Quotient außerdem von der Wahl von A ab, also von δ. Wir setzen:

$$\frac{\vartheta_{\alpha\delta}\vartheta_{\beta\delta}}{\vartheta_\delta\vartheta_{\alpha\beta\delta}} = \psi_\delta.$$

Vermehrt man v um $\frac{1}{2}\bar{p}_\gamma$ — oder um eine dieser kongruente halbe Periode $\frac{1}{2}p_\gamma$ —, so ist

$$\psi_\delta(v+\tfrac{1}{2}p_\gamma) = c\,\psi_{\gamma\delta}(v),$$

und c ein konstanter Faktor. Dieser ist zunächst gegeben als Produkt zweier:

$$c = (i)^H\cdot(-1)^K;$$

es ist

$$H = \bar{l}_\gamma(\bar{m}_{\alpha\delta}+\bar{m}_{\beta\delta}-\bar{m}_\delta-\bar{m}_{\alpha\beta\delta}),$$

$$K = \bar{l}_{\gamma\alpha\delta}m_{\gamma,\alpha\delta}+\bar{l}_{\gamma\beta\delta}m_{\gamma,\beta\delta}-\bar{l}_{\gamma\delta}m_{\gamma,\delta}-\bar{l}_{\alpha\beta\gamma\delta}m_{\gamma,\alpha\beta\delta}.$$

Beides ist zu vereinfachen. Da

$$\bar{m}_{\alpha\delta}+\bar{m}_{\beta\delta}-\bar{m}_\delta-\bar{m}_{\alpha\beta\delta}+\bar{m}_{\alpha\beta}-\bar{m}_\alpha-\bar{m}_\beta \equiv 0 \mod 4$$

ist, so ist

$$H \equiv \bar{l}_\gamma(\bar{m}_\alpha+\bar{m}_\beta-\bar{m}_{\alpha\beta}) \mod 4,$$

und da $\bar{m}_{\alpha\beta}-\bar{m}_\alpha-\bar{m}_\beta = 2m_{\alpha,\beta}$ ist:

$$H \equiv 2\bar{l}_\gamma m_{\alpha,\beta} \text{ modulo } 4.$$

Der Exponent K ist nur modulo 2 zu betrachten; $\bar{l}_{\gamma\alpha\delta}$ kann deshalb durch den kongruenten Zug $l_\gamma+l_\alpha+l_\delta$ ersetzt werden, usf. Es ist aber:

$$m_{\gamma,\alpha\delta}\equiv m_{\gamma,\alpha}+m_{\gamma,\delta}, \quad m_{\gamma,\beta\delta}\equiv m_{\gamma,\beta}+m_{\gamma,\delta},$$

$$m_{\gamma,\alpha\beta\delta}\equiv m_{\gamma,\alpha}+m_{\gamma,\beta}+m_{\gamma,\delta} \text{ modulo } 2.$$

Wenn man dies einsetzt in H, fällt $m_{\gamma,\delta}$ fort, denn es ist $\bar{l}_{\gamma\alpha\delta}+\bar{l}_{\gamma\beta\delta}-\bar{l}_{\gamma\delta}-\bar{l}_{\gamma\alpha\beta\delta} \equiv 0$ mod. 2. Da ferner $l_{\gamma\alpha\delta}-l_{\gamma\alpha\beta\delta}\equiv l_\beta$, $l_{\gamma\beta\delta}-l_{\gamma\alpha\beta\delta}\equiv l_\alpha$ modulo 2 ist, so ergibt sich:

$$K \equiv l_\beta m_{\gamma,\alpha}+l_\alpha m_{\gamma,\beta} \text{ modulo } 2.$$

Es ist daher:

$$c = (-1)^{l_\alpha m_{\beta,\gamma}+l_\beta m_{\gamma,\alpha}+l_\gamma m_{\alpha,\beta}}$$

Von der Permutation δ ist c unabhängig. Wenn man sie durch eine andere δ' ersetzt, so ist ebenfalls

$$\psi_{\delta'}(v+\tfrac{1}{2}p_\gamma) = c\,\psi_{\gamma\delta'}(v).$$

Der Quotient ω von $\psi_{\delta'}$ und ψ_δ genügt also der Gleichung: $\omega(v+\frac{1}{2}p_\gamma) = \omega_\gamma(v)$.

Damit ist die Bedingung erfüllt, die für die Definition der Theta gestellt war; wir dürfen $c = (\alpha, \beta, \gamma)$ setzen, und, wenn $\beta = \alpha$ ist, $c = (\gamma/\alpha)$.

Für $\beta = \alpha$ werden $l_\alpha m_{\beta,\gamma}$ und $l_\beta m_{\gamma,\alpha}$ einander gleich, $m_{\alpha,\beta}$ wird m_α; es ist daher:

$$(\gamma/\alpha) = (-1)^{l_\gamma m_\alpha}.$$

Nun wollen wir den gemeinsamen Teil von α und β — beide als Kombinationen grader Ordnung dargestellt — mit $\overline{\alpha, \beta}$ bezeichnen; man kann dafür auch die komplementäre Kombination setzen, da es nur auf den Kongruenzwert modulo 2 ankommt. Dann ist $m_{\alpha,\beta} = m_{\overline{\alpha,\beta}}$, und:

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha/\overline{\beta, \gamma})(\beta/\overline{\gamma, \alpha})(\gamma/\overline{\alpha, \beta}).$$

Wir haben somit für die Funktionen

$$\psi = \frac{A_\alpha A_\beta}{A\, A_{\alpha\beta}} \text{ und } f^2 = \left(\frac{A_\alpha}{A}\right)^2$$

die Gleichungen gewonnen:

$$\psi(v+\tfrac{1}{2}p_\gamma) = (\alpha/\overline{\beta, \gamma})(\beta/\overline{\gamma, \alpha})(\gamma/\overline{\alpha, \beta})\,\psi_\gamma(v),$$
$$f^2(v+\tfrac{1}{2}p_\gamma) = (\gamma/\alpha)\,f_\gamma^2(v);$$

wobei $\overline{\beta, \gamma}$ diejenige Permutation ist, die durch den gemeinsamen Teil von β und γ dargestellt wird — vorausgesetzt, daß man für β und γ die Kombinationen grader Ordnung nimmt. Damit ist das allgemeine Zeichen (α, β, γ) ganz durch das speziellere (α/β) ausgedrückt. Haben α, β, γ, als Kombinationen grader Ordnung dargestellt, keine Elemente gemeinsam, weder α mit β, noch α mit γ, noch β mit γ, so ist einfach $\psi(v+\frac{1}{2}p_\gamma) = \psi_\gamma(v)$.

Wir nehmen die Reihe der $2n+2$ Theta und damit auch die der $2n+1$ Permutationen $1, 2 \cdots 2n+1$ als azygetische an. Dann ist, wenn h, k irgend zwei voneinander verschiedne der $2n+1$ Zahlen $1, 2 \cdots 2n+1$ bedeuten,

$$(h, k) = -(k, h).$$

Denn es ist $(h, k)(k/h) = (h, k)$, und die beiden Permutationen h, k verhalten sich zueinander azygetisch. (α, β) aber läßt sich als Produkt dieser Zeichen (h/k) darstellen. Denn es ist allgemein $(\alpha/\beta\gamma) = (\alpha/\beta)(\alpha/\gamma)$, $(\beta\gamma/\alpha) = (\beta/\alpha)(\gamma/\alpha)\cdot(h/0)$ ist offenbar $+1$.

$\overline{0}$ kann aber ersetzt werden durch die komplementäre Kombination

$$(1\ 2 \cdots 2n+1);$$

es ist also auch

$$(h/1\ 2 \cdots 2n+1) = \prod_{k=1}^{2n+1} (h, k) = +1\,.$$

Von den Faktoren dieses Produkts ist einer: (h/h), die übrigen sind alternierende Zeichen. Daraus folgt weiter: Nicht nur (α/β), sondern auch (α, β, γ) läßt sich in ein Produkt alternierender Vorzeichen auflösen.

Wenn h, k, l drei voneinander verschiedene der Zahlen $1, 2 \cdots 2n+1$ bedeuten, so ist (h, k, l) nicht $+1$, sondern im Gegenteil -1. Denn um $\overline{h, k}$ zu bestimmen, hat man h und k durch die komplementären Kombinationen zu ersetzen. Demnach enthält $\overline{h, k}$ alle Elemente mit Ausnahme von h und k. Diese $2n-1$ gliedrige Kombination kann durch die komplementäre hk ersetzt werden. Es ist daher:

$$(h, k, l) = (h/kl)\,(k/hl)\,(l/hk)\,,$$

und wenn man dies weiter zerlegt, bekommt man -1.

Die Verbreitung der Hydrometeore auf der Erde.

Von G. Hellmann.

Vor zehn Jahren habe ich den Versuch gemacht, alle Kondensationsformen des atmosphärischen Wasserdampfes in ein organisch aufgebautes »System der Hydrometeore« einzuordnen (Abh. d. Preuß. Meteorol. Instituts V, Nr. 2, 1915, engl. Übersetzung: Monthly Weather Review 1916–17). Die daselbst über die Verbreitung der Hydrometeore nur gelegentlich gemachten Bemerkungen sollen hier in etwas systematischerer Weise ergänzt werden, da bisher so gut wie gar keine derartigen Untersuchungen ausgeführt wurden, ausgenommen über den Schnee und den Hagel.

An der Erdoberfläche kann man eine Polargrenze und eine Äquatorialgrenze der Hydrometeore unterscheiden, in vertikaler Richtung auch eine Höhengrenze. Es wird sich zeigen, daß alle Kondensationen in flüssiger Form eine Polargrenze haben, alle Kondensationen in fester Form eine Äquatorialgrenze, mit Ausnahme des Hagels. Die Höhengrenze der Hydrometeore, von der wir am wenigsten wissen, kann man sich als eine sehr unregelmäßig gestaltete Fläche vorstellen, die ihre konkave Seite der Erdoberfläche zukehrt und die im allgemeinen unter dem Äquator höher liegt als nahe den Polen; ihre Schnittlinie mit der Erdoberfläche stellt die Polargrenze der betreffenden Hydrometeore dar.

1.

Ich behandle zunächst die aus den Wolken herabfallenden Kondensationsprodukte, die eigentlichen Niederschläge, und zwar in der im »System der Hydrometeore« eingehaltenen Reihenfolge: Regen, Schnee, Graupeln, Hagel, Eiskörner, Glatteis.

Eine Polargrenze des Regenfalls ist auf der Nordhalbkugel wahrscheinlich nur in kleinem Umfange vorhanden. Da nämlich am Nordpol und in dessen näherer Umgebung nach Mohn die mittlere Lufttemperatur im wärmsten Monat (Juli) — 1° bis 0° beträgt und somit gelegentlich positive Temperaturen vorkommen können, muß mit der Möglichkeit des Eintretens von Regenfällen daselbst gerechnet werden. Solche sind auf allen Polarexpeditionen beobachtet worden. Auf der Drift der »Fram«, die dem Pol am nächsten (83° N.) kam, wurden in den Monaten Mai bis September insgesamt 24 Tage mit Regen verzeichnet, während die italienische Nordpolexpedition in der Teplitzbucht auf Kronprinz-Rudolf-Land (81° 47′) nur 7 Regentage hatte. Vom Pol selbst liegen keine Beobachtungen vor. Dagegen gibt es höchstwahrscheinlich auf

dem bis zu rund 3000 m ansteigenden Rücken von Grönland keinen Regen mehr. Auf den von Forschungsreisenden ausgeführten Querungen dieses Landes sind eigentliche Regenfälle nicht wahrgenommen worden; de Quervain bemerkt: »nur einmal, am 19. Juli [1912] in 1465 m Höhe sind einige Regentropfen notiert worden«.

Auf der Südhalbkugel nimmt die Zahl der Regentage jenseits 65° S. rasch ab, wie folgende Zahlen erkennen lassen:

Südpolarexpedition	Südl. Breite des Standquartiers	Zahl der Regentage im Jahre
Schwedische	64° 22′	15
Erste französische	65° 4′	43
Zweite französische	65° 10′	66
Erste deutsche	66°	12
Belgische	70° 36′	20
Zweite deutsche	77°	0
Zwei englische Eine norwegische	77°—78.5°	0

Simpson sagt auf S. 159 seines Expeditionswerkes »Meteorology, Vol. I. Discussion« ausdrücklich: »No rain fell during the whole of our stay at Cape Evans, and up to the present there is no record of rain at either Cape Adare or in the Mc Murdo-Sound. On the other hand, a well developed rainbow was seen to the north-north-east of Cape Evans on February 14, 1921.« Die Angabe bezüglich Kap Adare (71° 18′) ist möglicherweise nicht zutreffend; denn die Expedition der »Southern Cross« unter Borchgrevink notierte daselbst 7 Regentage. Die betreffende Notiz auf S. 87 seiner Veröffentlichung von 1902 ist allerdings nicht ganz klar; es heißt da: »the entries under ,Days of Rain‘ indicate the numbers of days when the melted snow amounted to 0.005 inch. and upwards. Very little rain was observed at Cape Adare.« Es handelt sich möglicherweise um Tage mit Regen und Schnee; die Zahl der Tage mit Schnee wird mit 66 angegeben. Der nordnordöstlich von Kap Evans gesehene Regenbogen, den Simpson erwähnt, kann durch Regentropfen, die nahe von Kap Adare fielen, gebildet worden sein. Barkow, der auf der Fahrt der »Deutschland« nach dem Weddellmeer im Dezember und Januar unter etwa 60° bis 75° südl. Breite 4 Regentage und später auf der Rückreise im Oktober, November, Dezember ungefähr in denselben Breiten die dreifache Zahl notierte — während in den höchsten erreichten Breiten von rund 77° in den drei Sommermonaten Januar, Februar, März kein einziger Regentag vorkam —, bemerkt ausdrücklich, daß großtropfiger Regen niemals zur Wahrnehmung gelangte. Im Bericht über die Expedition der »Discovery« (1901—1904) heißt es auf S. 471 »there was no rain«. Ebenso wurde in Framheim (78° 38′ S.) kein Regenfall beobachtet.

Es wird also die Polargrenze des Regenfalls auf der Südhalbkugel in etwa 75° bis 77° Breite anzunehmen sein; denn da der antarktische Kontinent nach dem Pol zu stark ansteigt, kann in noch höheren Breiten sicherlich kein Regen mehr vorkommen. Eine genaue Festlegung der Polargrenze des

Regenfalls in verschiedenen Teilen der Antarktis wird erst möglich sein, wenn weitere Beobachtungen aus anderen Längengraden vorliegen werden.

Die Höhengrenze des Regenfalls läßt sich aus gelegentlichen Beobachtungen auf Bergbesteigungen nur unsicher bestimmen. Der Forschungsreisende Hans Meyer, der in Afrika und Südamerika viele Hochtouren ausgeführt hat, teilt mir auf meine diesbezügliche Anfrage mit: er habe Regen gehabt einmal am westlichen Kilimandjaro in etwa 4800 m bei dunstigem Wetter im August und zweimal am nördlichen Chimborazo bei etwa 5000 m im Juni und August unter denselben Verhältnissen. Jedesmal war es feiner rieselnder Regen von ein- bis zweistündiger Dauer. Sven Hedin (Southern Tibet VI) hat in Tibet in Höhen von 4800 bis 5000 m wiederholt Regen erlebt, in solchen von 5200 m aber nur in den Tagen vom 9. bis 13. Juli 1908, und zwar z. T. schon mit Schnee gemischt. Da die isotherme Fläche von 0° im Äquatorialgebiet durchschnittlich in 5200 bis 5500 m Höhe liegt, in Einzelfällen auch etwas höher ansteigen wird, darf man annehmen, daß in niederen Breiten die Höhengrenze des Regenfalls höchstens 5600 m erreichen kann, zumeist aber darunter liegen wird. In höheren Breiten muß die Höhengrenze natürlich tiefer liegen, auch mit der Jahreszeit wechseln. Die größte Höhe, bei der Berson auf seinen zahlreichen Ballonhochfahrten in Norddeutschland Regen beobachtet hat, betrug 2530 m am 6. Juli 1905.

Über die Verbreitung des Schnees gibt die wertvolle Arbeit von H. Fischer Aufschluß: Die Äquatorialgrenze des Schneefalls (Leipzig 1888, 8°, 178 S., 1 Karte), auf die ich der Kürze halber hier nur verweise. Sie ließe sich wahrscheinlich in einigen Punkten ergänzen bzw. berichtigen, wenn jemand die seitdem hinzugekommenen Schiffsjournale daraufhin durchsehen würde; denn gerade das für den Verlauf der Äquatorialgrenze auf den Meeren, namentlich der Südhemisphäre, von Fischer benutzte Material war noch spärlich. Ich bin dazu leider nicht in der Lage; nur ein maritim-meteorologisches Institut böte die Möglichkeit dazu.

Über die Höhengrenze des Schneefalls, die natürlich über der sogenannten Schneegrenze liegt, gewähren die auf Ballonfahrten gemachten Beobachtungen einige Anhaltspunkte. So berichtet Berson (Wissenschaftliche Luftfahrten II, 434) von einem Schneefall in 8730 m Höhe bei —43.7° Lufttemperatur. Da die Wolkenhöhenmessungen ergeben haben, daß die aus Eis bestehenden Cirrus- und Cirrostratuswolken bis zu 20000 m vorkommen (Manila), so wären Schneefälle bis zu solchen Höhen möglich; sie würden aber als solche an der Erdoberfläche nicht wahrgenommen werden, weil die aus den Wolken herausfallenden feinen, winzigen Schneepünktchen und Kristalle in den tieferen Schichten schmelzen und verdunsten. Auch die Höhengrenze des Schneefalls muß natürlich von der geographischen Breite und der Jahreszeit abhängig sein.

Die Feststellung der Verbreitung von Graupeln und Hagel begegnet großen Schwierigkeiten, weil es in einigen Sprachen, wie Dänisch, Englisch, Holländisch kein besonderes Wort für Graupeln gibt, sondern unterschiedslos für beide Erscheinungen das Wort für Hagel gebraucht wird. Bei der großen Verbreitung der englischen Sprache fällt dieser Umstand besonders erschwerend ins Gewicht; er hat auch zu manchem Mißverständnis Veranlassung gegeben.

Ein neuerdings in englischen Meteorologenkreisen zur Bezeichnung von Graupel vorgeschlagenes Wort (soft hail) hat beim Volk nicht recht Eingang gefunden, und die in Amerika gebrauchten Ausdrücke winter hail, snow hail, snowpellets sind ganz vereinzelt angewandt worden. Nur dann, wenn in englisch-amerikanischen Veröffentlichungen das internationale Symbol △ für Graupeln benutzt wird, weiß man, daß man es wirklich mit Graupeln zu tun hat, vorausgesetzt natürlich, daß der Beobachter die Erscheinung selbst richtig aufgefaßt hat. Das geschieht trotz aller Erläuterungen in den Instruktionen auch bei uns in Deutschland nicht immer. Hier ist das Wort Graupel durchaus nicht allgemein gebräuchlich; in Friesland und in Teilen der Steiermark heißt diese Kondensationsform Grieß, in weiten Gebieten von Süddeutschland und den Alpenländern nennt man sie Schauer, auf der Schwäbischen Alb und in der Schweiz Kiesel. Das Wort Graupel stammt nach Weinhold (Beiträge zu einem schlesischen Wörterbuche S. 29) und Kluge (Etym. Wörterbuch) vom slawischen Wort Krupa und hat von Schlesien und Obersachsen aus in Deutschland Eingang gefunden. Die Japaner haben in ihren, in englischer Sprache erfolgenden meteorologischen Publikationen einfach das deutsche Wort Graupel angenommen und damit jedes Mißverständnis vermieden. Im Schwedischen heißt Graupel »trindsnö«, d. h. Rundschnee. Die französische Bezeichnung für Graupel, grésil, soll nach den französischen Wörterbüchern von Darmesteter und Littré von dem altfranzösischen grez und dieses wiederum von dem althochdeutschen griez herkommen. Es findet sich schon in dem aus dem XI. Jahrhundert stammenden Rolandslied, wo es in der Form »pluie et gresilz« auftritt. Daß die lateinische Sprache kein eigenes Wort für Graupel besaß, ist bei der Seltenheit der Erscheinung im Mittelmeergebiet und der damals noch wenig entwickelten Nomenklatur der atmosphärischen Erscheinungen verständlich; erst im XIII. Jahrhundert hat Albertus Magnus (De passionibus aeris) die Bezeichnung granula dafür gebraucht und sie damit von grando unterschieden. Auf denselben Stamm gehen zurück die spanischen und portugiesischen Ausdrücke granizo (portug. graniso) bzw. granizo blanco (= soft hail) und nieve granulada, die damit Graupel deutlich von Hagel (piedra), pedrisco = (Hagel-) Stein, portug. saraiva unterscheiden. Auf der italienischen Polarexpedition nach Kronprinz-Rudolf-Land (1899/1900) wurde △ als nevischio bezeichnet, was nach dem italienischen Wörterbuch von Tomaseo und Bellini bedeutet: »Spezie di neve minuta, e di natura tra la neve e la grandine«. In den slawischen Sprachen wird zwischen Krupa (Krupy) = Graupeln und Grad = Hagel streng unterschieden.

Graupelfälle sind von kurzer Dauer und treten meist mit nachfolgendem bzw. vorhergehendem Regen oder Schnee auf, so daß sie leicht übersehen werden können, weshalb die Mehrzahl der Beobachter zu wenig Graupelfälle notiert. Daher sind die Unterschiede in der Häufigkeit der Tage mit Graupeln an benachbarten Stationen bisweilen auffällig groß. Ich habe aus dem von F. Schwab veröffentlichten Wettertagebuch, das im Forsthaus Grünau (550 m) bei Kremsmünster von 1819 bis 1838 geführt wurde (Linz 1907, 8°, 135 S.) — von 1830 ab offenbar nicht mit derselben Sorgfalt wie vorher — die Graupelfälle ausgezogen und gefunden, daß 7 Prozent allein auftraten,

17 Prozent zusammen mit Schnee, 26 Prozent mit Regen und Schnee und 50 Prozent zusammen mit Regen. Auf dem Blue Hill Observatorium bei Boston, wo sehr genaue Angaben über die Dauer der Hydrometeore gemacht werden, trat in den zehn Jahren 1914—1923 Graupel — hier sleet genannt, was in England Regen gemischt mit Schnee bedeutet! — nur ein einziges Mal allein an einem Tage auf, nämlich am 5. März 1921, 7 Minuten lang. Sehr schön läßt sich aus den dortigen Aufzeichnungen die Art der Folge im Auftreten der Hydrometeore ersehen, z. B. am 12. April 1918, an dem ein ungewöhnlich langer Graupelfall stattfand:

◍ bis 5$^{\cdot 0}$a, ◍△ 5$^{\cdot 0}$—5$^{\cdot 6}$a, △ 5$^{\cdot 6}$—8$^{\cdot 3}$a, △✱ 8$^{\cdot 3}$—9$^{\cdot 3}$a, ✱ 9$^{\cdot 3}$a—4$^{\cdot 0}$p, oder am 27. Dezember 1920:

✱ bis 9$^{\cdot 2}$a, ✱△ 9$^{\cdot 2}$—9$^{\cdot 7}$a, △ 9$^{\cdot 7}$—9$^{\cdot 9}$a, △◍ 9$^{\cdot 9}$—10$^{\cdot 3}$a, ◍ 10$^{\cdot 3}$a—2$^{\cdot 1}$p[1]. Graupelfall ist also meistens nur eine kurze Phase in einem länger dauernden Niederschlag, Hagel dagegen eine selbständige Niederschlagsform, die ohne andere Hydrometeore auftritt, gewöhnlich aber mit Gewitter verbunden ist. Jener gehört zumeist der kalten, dieser der warmen Jahreshälfte an. Graupel fallen in der Regel auf der Rückseite der Depressionen bei unruhigem, böigem Wetter in kurzen Schauern; sie sind daher häufig in allen Luvlagen und im Hochgebirge, wo sie auch im Sommer oft auftreten und geradezu den Charakter der Niederschläge mit bestimmen. Einige Beispiele für dieses Verhalten liefert die folgende Zusammenstellung:

Mittlere Zahl der Tage mit △

	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	Oktober	November	Dezember	Jahr
Valencia (Westküste v. Irland)	4.3	3.1	2.7	2.7	1.3	0.2	0.3	0.2	1.5	1.7	2.3	**4.6**	24.9
Castlebay (Hebriden)	**6.2**	5.7	4.8	3.7	1.2	0.2	—	—	1.1	2.3	5.9	6.1	37.2
Bergen (Norwegen)	**7.7**	4.3	2.4	3.4	2.0	0.7	0.4	0.7	1.6	2.4	5.3	4.9	35.8
Upsala	0.9	0.6	0.7	**1.4**	0.8	0.1	—	0.1	0.1	0.2	0.4	0.5	5.8
Blue Hill	1.3	1.1	1.2	0.7	0.3	—	—	—	—	—	0.5	**1.5**	6.6
Jever	3.3	2.9	2.9	**4.8**	2.1	0.3	0.2	0.2	0.4	0.6	2.2	1.6	21.5
Potsdam	1.9	1.7	1.4	**2.5**	0.5	—	—	—	—	0.3	1.2	0.5	10.0
Schneekoppe	2.6	2.7	2.6	**5.9**	4.6	3.2	1.6	2.1	1.5	1.9	2.5	2.1	33.3

Valencia, Castlebay, Bergen und Jever liegen bei West- und Nordwestwinden im Luv, Upsala, Blue Hill und Potsdam im Lee. Ebenso zeigen die spanischen Stationen, daß die an der kantabrischen Küste gelegenen relativ häufig Graupelfälle haben, während sie an der Südküste am Mittelmeer fast ganz fehlen. Dagegen begegnen wir ihnen wieder an der gegenüberliegenden Küste von Marokko und Algerien, die bei Nordwestwind Luvlage hat.

Das beste Material für das Studium der Verbreitung der Graupeln und der Bedingungen ihres Auftretens bietet Japan. Hier bestehen auf engem

[1] Die Angabe von Hann (Meteorologie S. 314), daß dem Graupelfall Schneefall immer nur folgt und nicht vorausgeht, trifft nicht zu.

Raume auffällige Unterschiede in der Graupelhäufigkeit zwischen der Westküste am Japanischen Meer und der Ostküste am Pazifischen Ozean. In den japanischen meteorologischen Jahrbüchern wird seit Jahren die Zahl der Tage mit Graupel und mit Hagel getrennt mitgeteilt, und 1909 hat T. Okada im Bulletin of the Central Meteorological Observatory of Japan Nr. 2 die auf zehnjährige Aufzeichnungen (1896—1905) gegründete Arbeit veröffentlicht: Frequency and Distribution of Graupelfall in Japan. Sie ist von einer Karte begleitet, auf der mittels sechs verschiedener Schraffen (0—>50) die Verteilung der Zahl der Graupeltage veranschaulicht wird, meines Wissens die einzige Karte dieser Art. Aus der Studie ergibt sich, daß die Häufigkeit der Graupelfälle im allgemeinen von Süden nach Norden, von Formosa bis Jeso, zunimmt, daß sie an den Westküsten der vier Hauptinseln sehr viel größer als an den Ostküsten ist und daß die Graupeln an den meisten Orten nur vom Dezember bis März auftreten und im Sommer ganz fehlen. Zur Illustration der großen Gegensätze zwischen den West- und den Ostküsten mögen zwei Stationspaare dienen, im Süden Schimonoseki-Kotschi, etwa 33°—34° N. Br., und im Norden Akita-Ischinomoki, etwa 40° N. Br. Ich füge den von Okada bereits veröffentlichten Zahlen aus den mir gerade zugänglichen letzten Jahrgängen die Häufigkeitswerte für 1919 und 1920 hinzu, die zeigen, daß die Unterschiede dieselben geblieben sind:

	1896	1897	1898	1899	1900	1901	1902	1903	1904	1905	1919	1920
Schimonoseki	28	19	30	24	31	39	23	28	26	22	28	34
Kotschi	0	0	0	0	0	1	0	9	0	1	1	2
Akita	50	35	34	77	43	49	50	57	63	63	62	53
Ischinomoki	5	4	5	14	12	11	10	13	10	13	4	6

Die größte mittlere Zahl von Graupeltagen im Jahre, nämlich 72, hat der auf der Westseite der Insel Jeso gelegene Ort Sutu (42° 48' N.), während im äußersten Süden des Landes, auf den Riukiu-Inseln und auf Formosa, nur alle paar Jahre einmal ein Graupelfall vorkommt.

Die graupelreiche Westküste von Japan liegt im Luv des in der kalten Jahreszeit wehenden Nordwestmonsuns und ist dann durch unruhiges, böiges Wetter ausgezeichnet.

In ähnlicher Weise sind an der Westseite der Koreanischen Halbinsel die Graupelfälle etwas häufiger als an der Ostseite. So hat Mokpo an der Westseite nach fünfjährigen Beobachtungen (1916—1920) 16.4 Tage mit Graupel im Jahre, dagegen das an der Ostseite liegende Fusan nur 2.0. Im allgemeinen ist aber die Zahl der Graupeltage in Korea nicht groß, und auch im gegenüberliegenden östlichen Teil von China scheint die Jahresanzahl unter 10 zu bleiben. Weiter westlich, im Innern von China und in Tibet, fehlen die Graupelfälle nicht, wie aus den Beobachtungen der Forschungsreisenden deutlich hervorgeht; auf den Hochplateaus von Tibet kommen sie in Höhen bis zu 5000 m auch im Sommer öfters vor. Im Süden des Himalaja, in den Ebenen von Indien, sind Graupeln aber unbekannt.

Das gute japanische Beobachtungsmaterial, das nach Süden bis zu 23° Breite reicht, läßt einen Schluß auf die Äquatorialgrenze der Graupelfälle in dieser Gegend zu; sie scheint mit derjenigen des Schneefalls nahe zusammenzufallen, was bei der Entstehung der Graupelkörner aus Schneekristallen plausibel erscheint. Der Graupelfall vom 28. Januar 1911 in Bagdad zeigt, daß auch in dieser Gegend die Äquatorialgrenze des Schneefalls und des Graupelfalls nahe beieinander liegen.

Eine graupelreiche Gegend ist die südliche Küste von Chile, wo in Puerto Montt 12, Faro Huafo 30, Islote de los Evanjelistas 67 Tage mit Graupelfall jährlich vorkommen. Auch die um das Kap Horn fahrenden Schiffe notieren oft Graupelschauer (französisch giboulée), was bei dem dort herrschenden unruhigen Witterungszustand begreiflich erscheint.

Aus den Arbeiten von Buist (1850), Poëy (1855), Fritz (1876), von Danckelman (1880) über die Verbreitung des Hagels geht hervor, daß er überall vorkommen kann, wenn auch mit sehr verschiedener Häufigkeit, unsicher blieb nur, wie weit auch auf hohem Meere und in den Polargebieten Hagelbildung möglich ist. Mit dieser Frage beschäftigen sich zwei Untersuchungen von H. Harries im Quart. Journ. R. Meteorol. Soc. XXI, XXII, 1895—1896, in denen er zu dem Schluß kommt, daß der Hagel in beiden Gebieten sehr häufig auftritt, viel häufiger, als man bis dahin glaubte. Das ist nicht richtig. Harries ist durch den unterschiedslosen Gebrauch des Wortes hail für Hagel und Graupel zu dieser irrigen Auffassung verleitet worden. Einige Beispiele werden dies zeigen.

Mitten im südindischen Ozean, weit entfernt vom Festland, liegt die kleine Inselgruppe der Kerguelen. Hier ankerte im Christmas-Hafen das englische Expeditionsschiff Erebus vom 12. Mai bis 20. Juli 1840 und beobachtete in diesen 70 Tagen an 24 Tagen »hail«. Dazu bemerkt Harries wörtlich: Is there any fixed station in Europe which can, for its worst hailstorm year, equal this mid-ocean return? Diese Frage müßte man mit Nein beantworten, wenn es wirklich Hagel gewesen wäre. Es waren aber offenbar Graupelfälle; denn die deutsche meteorologische Station, die als Hilfsstation der ersten deutschen antarktischen Expedition auf Kerguelen von Januar 1902 bis Februar 1903 unterhalten wurde, hat keinen einzigen Hagelfall, wohl aber an 43 Tagen Graupel beobachtet. Die Zahl der Graupelfälle würde wahrscheinlich noch größer gewesen sein, wenn die Station auch im Christmas-Hafen an der Nordseite, d. h. der Luvseite der Insel, gelegen hätte und nicht auf der Südostsseite im Lee hoher Berge[1].

Daß der Hagel in den arktischen Regionen bis in die Breite von 82° N. relativ häufig vorkommen soll, hat schon bei der Diskussion des Vortrags von Harries in der englischen meteorologischen Gesellschaft Bedenken erregt (R. H. Scott), und hätte der Verfasser beachtet, was sein Landsmann W. Scoresby (Arctic Regions I 428) über das Vorkommen des Hagels in der Arktis sagt, so wäre er wohl selbst stutzig geworden. Dieser erfahrene Polarfahrer bemerkt nämlich, daß richtiger Hagel in sehr hohen Breiten unbekannt ist,

[1] Vgl. weiter unten die Anmerkung 2 auf der folgenden Seite.

und fügt hinzu: »the only substance resembling hail, that is generated in the frigid zone, consists of a white porous spherical concretion, of a light and snowy texture«. Das sind offenbar Graupeln. Auch Ekholm bemerkt von seinem Aufenthalt auf Kap Thordsen in Spitzbergen (78° 28.5′ N.): »nous n'avons jamais observé de grêle véritable au Cap Thordsen«. Es wurde aber an 6 Tagen Graupelfall beobachtet. Dagegen notierte eine spätere schwedische Expedition nach Spitzbergen (Treurenbergbucht, 79° 55′ N.) im Jahre 1898/1900 an 9 Tagen △ und an 3 Tagen ▲. Die italienische Polarexpedition verzeichnete in der Teplitzbucht auf Kronprinz-Rudolf-Land (81° 47′ N.) außer 45 Schneetagen 72 Tage mit △, das im Text mit nevischio bezeichnet wird. Auch auf dem von da aus nach dem Nordpol gemachten Vorstoß wurde vom 21. Februar bis 22. Juni noch 24mal nevischio beobachtet. Wenn ferner auf dem bei Boothia Felix (rund 70° N.) festgefrorenen englischen Expeditionsschiff Victory im Dezember 1829, in dem die Temperatur zwischen — 22° und — 38° schwankte, 21mal »hail« notiert wurde, so kann man dabei unmöglich an Hagel denken (Contribution to the Knowledge of the Arctic Regions II, 85), und so ähnlich in anderen von Harries benutzten Fällen. Man kann eben aus englischen Beobachtungen allein nicht feststellen, wie hoch polwärts wirklicher Hagel vorkommt.

Aus der Antarktis liegen folgende Beobachtungen vor: die schwedische Expedition notierte auf Snow Hill (64° 22′ S., 57° W.) von März 1902 bis November 1903 13 Tage mit △, 2 Tage mit ▲, die französische auf der Peterinsel (65° 4′ S., 63° 26′ W.) von Februar bis Dezember 1904 6 Tage mit △ und auf der zweiten Expedition 1908/09 26 Tage mit △, 5 Tage mit ▲. Die in höhere Südbreiten vorgedrungenen englischen und norwegischen Expeditionen haben Hagel nicht beobachtet.

Man wird also nach den jetzt vorliegenden Beobachtungen annehmen können, daß Graupelfälle in den Polargebieten bis in hohe Breiten von etwa 82° N. und 70° S. vorkommen, und daß der Hagel schon südlicher die Polargrenze hat. Doch sind diese Angaben noch sehr unsicher und werden voraussichtlich durch spätere eindeutige Beobachtungen von Fachmeteorologen korrigiert werden[1]. Die Aufzeichnungen der Seeleute reichen dazu nicht aus, da diese, wie Wegener (Thermodynamik d. Atmosphäre S. 288, 291 Anm. 1) bemerkt, auch in Norddeutschland die Gewohnheit haben, die Frostgraupeln als Hagel zu bezeichnen. Das tat offenbar schon der Hamburger Polarfahrer F. Martens (Spitzbergische . . . Reise Beschreibung gethan im Jahre 1671), der auf Taf. E Fig. 6 die Abbildung von Graupeln gibt, gefallen »bey Nordwest Wind oder dickem Gewolck Sturmig dabey«, und sie mit Hagel bezeichnet. Wenn man annehmen dürfte, daß auch die Seeleute anderer Nationen zwischen Graupeln und Hagel nicht streng unterscheiden, dann wären die meisten angeblichen Hagelfälle auf hoher See und in hohen Breiten ohne weiteres als Graupelfälle anzusprechen[2]. Das erscheint mir wahrscheinlich und wird

[1] Ich glaube, es wird sich zeigen, daß der Graupelfall keine Polargrenze hat.

[2] Das deutsche Expeditionsschiff Gazelle hat von November 1874 bis Januar 1875 in Betsie Cove auf der Nordostseite der Kerguelen gelegen und meteorologische Beobachtungen angestellt. Die »Bemerkungen zu den meteorologischen Tabellen« sind auf S. 229—241 des V. Teils des

vielleicht zum Teil dadurch erklärt, daß die von den Seeleuten gebrauchten Beaufortschen Wetterbezeichnungen nur die Bezeichnung h (hail) kennen. Es darf auch nicht außer acht gelassen werden, daß manche Graupelformen, die mit Wasser durchtränkt sind, ein eisartiges Aussehen haben, so daß ich bei der Beobachtung solcher Gebilde mir manchmal gesagt habe, man könnte zwischen Schneegraupeln und Eisgraupeln unterscheiden. An Eiskörnerregen ist dabei natürlich nicht zu denken.

Während im tropischen Tiefland der Hagel selten ist — Hans Meyer erlebte im tropischen Tiefland von Afrika bei 400 m Seehöhe nur einmal Hagelfall und ebenso Georg Schweinfurth im Herzen von Afrika (7° 45′, 28° E, 470 m) am 25. August 1870 —, stellt er sich in größeren Höhen, oberhalb 1500—2000 m, ziemlich häufig ein und ist in der Region von 2500—3500 m eine fast regelmäßige Begleiterscheinung der Gewitter. In Bujongola am Ruwenzori, also fast genau unter dem Äquator, hatte die italienische Expedition am 28. Juni 1906 um 11^{a} einen kräftigen Hagelfall in 3798 m Höhe. Das ist die größte mir bekannte Höhe für das Vorkommen von Hagel. In den Hochregionen darüber gibt es sehr häufig Graupelfälle, die bis über 6000 m Höhe beobachtet worden sind. Sie treten gewöhnlich um die Mittagszeit in kräftigen Schauern auf und zwangen schon manchen Hochtouristen zur Umkehr. So wurde z. B. P. Güssfeldt am 20. Februar 1883 durch einen solchen Graupelfall und anschließenden Schneesturm von der Ersteigung des Gipfels des Aconcagua (etwa 7000 m) einige hundert Meter darunter abgehalten. Am nächsten Tage und an einem etwas späteren wiederholte sich der mittägliche Graupelfall und verhinderte wiederum die Besteigung des Gipfels.

Die Höhengrenze der Graupeln liegt also ein paar tausend Meter über der des Hagels. Um absolute Höhenangaben zu machen, liegen noch zu wenig Beobachtungen vor.

Über die Verbreitung von Eiskörnerregen wissen wir fast gar nichts. Außer den in meinem System der Hydrometeore S. 25 angegebenen Vor-

Expeditionswerkes »Die Forschungsreise S. M. S. ‚Gazelle‘ in den Jahren 1874 bis 1876« abgedruckt. In diesen findet sich 8mal (2 im November, je 3 im Dezember und Januar) Hagel notiert, und zwar meist in der Form Hagelböe, Hagelschauer oder gemischt Regen-, Hagel- und Schneeböe. Es sind das offenbar Graupeln gewesen, welche die deutsche Schiffsbesatzung als Hagel bezeichnet hat. Wäre die obenerwähnte, von der »Gauß« eingerichtete meteorologische Station auf Kerguelen (1902/03) nicht mit deutschen Meteorologen, die zwischen Graupel und Hagel zu unterscheiden wußten, besetzt und bedient gewesen, so hätte der Glaube an den Hagelreichtum der Kerguelen nicht widerlegt werden können.

Ein anderer Fall, in dem man Hagel mit Graupel zu deuten hat, ist folgender. Van der Stok hat bei Bearbeitung der vor der niederländischen Küste auf Feuerschiffen gemachten Aufzeichnungen die Häufigkeit, die Dauer, die jährliche und die tägliche Periode der Hagelfälle berücksichtigt (Nederl. Met. Instituut. Mededeelingen en Verhandelingen 13a bis 13c). Verschiedene Anzeichen, insbesondere die jährliche Periode, machen es sehr wahrscheinlich, daß es hauptsächlich Graupelfälle waren, die in die Untersuchung eingingen. Es gibt im Holländischen kein eigenes Wort für Graupel, und erst neuerdings wird dafür manchmal der Ausdruck »Losse Hagel« gebraucht.

Wie die Zahlen in Mohns Tabelle VIIIe »Midlere Antal Dage med Hagel (Graupel)« in den »Klima-Tabeller for Norge« zu deuten sind, habe ich nicht ermitteln können. Einige sind so groß, daß es Graupeltage sein können, andere so klein, daß sie auch für Hageltage niedrig erscheinen.

kommnissen in Norddeutschland (Berlin, Potsdam, Dirschau) und in Petersburg sowie den Mitteilungen in der Met. Zeitschr. über solche Fälle in Breslau, Stettin und Wien kann ich nur anführen, daß das Expeditionsschiff Gauß im Südindischen Ozean südlich 64° S. an 6 Tagen Eisregen beobachtet hat. Ich nehme dabei an, daß es gefrorene Regentropfen waren und nicht Glatteis, das auch manchmal als Eisregen[1] bezeichnet wird. Über einen Fall von Eiskörnern in Japan berichtet T. Matukana (Frozen rain drops at Sapporo) im Jap. Journ. of Astr. a. Geophys. II, 4 (1923).

Ebenso gering ist unsere Kenntnis von der Verbreitung des Glatteises[2]. In der norddeutschen Niederung darf man auf durchschnittlich 2 bis 3 Fälle im Jahr rechnen, auf den Höhen der Mittelgebirge auf etwa die doppelte bis dreifache Zahl. Außer den von Schreiber für Sachsen veröffentlichten fünfjährigen Mittelwerten (Das Klima des Königreiches Sachsen II, S. 74—75), von denen aber manche recht unwahrscheinlich erscheinen, kenne ich nur noch die spezielle Untersuchung von R. C. Mossman über die Glatteisbildung auf dem Gipfel des Ben Nevis (1343 m) in Schottland, der nahe den Hauptzugstraßen der Depressionen liegt (Journ. Scott. Met. Soc. IX, 115—124). Hier wurden in den sechs Jahren 1885—1890 198 Fälle von Glatteis beobachtet, also durchschnittlich 33 in einem Jahre. Die mittlere Dauer der Glatteisbildung betrug 4.4 Stunden; am häufigsten trat es in den Monaten Oktober bis Mai auf, während es im Juli nie vorgekommen ist. Aus Nordamerika liegen mehrere Einzelbeschreibungen von ice-storm oder glaze-storm, wie sie dort genannt werden, vor; sie sind gewöhnlich von größerer Stärke als bei uns, weil die Masse des herabfallenden unterkühlten Wassers beträchtlicher ist[3]. Um zu sehen, ob sie auch häufiger als bei uns vorkommen, habe ich die letzten zehn Jahrgänge (1914—1923) der Beobachtungen des Blue Hill Observatoriums bei Boston daraufhin durchgesehen und gefunden, daß der Jahresdurchschnitt auch nur 9.7 beträgt; Maximum 14, Minimum 4. In den Monaten Mai bis Oktober gab es kein Glatteis, für die übrigen Monate sind die Mittelwerte: Januar 2.7, Februar und März je 1.9, April 0.6, November 1.1, Dezember 1.5. Öfters hat sich die Glatteisbildung 2 bis 3 Tage hintereinander wiederholt, je zweimal sogar an 4 aufeinander folgenden Tagen, im Februar 1915 und November 1921. Beschreibungen von Glatteis in Frankreich findet man in Tissandier, L'Océan aérien und Annuaire de la Société Météorologique de France, wo 1838 sogar im Département Bouches du Rhône,

[1] Wenn Goethe im 1. Teil des »Faust« beim Osterspaziergang von »Schauer körnigen Eises« spricht, so hat er dabei wahrscheinlich an Eiskörnerregen gedacht; denn er hatte gute meteorologische Kenntnisse, und er wußte gewiß zwischen Eiskörnern und Graupeln zu unterscheiden.

[2] Das streifenartige Auftreten von Glatteis und Rauhreif wird von C. Kassner hervorgehoben (vgl. Mitteil. d. Vereinigung d. Elektrizitätswerke XXIV, 1925, S. 1—11).

[3] Vgl. z. B. Monthly Weather Review, December 1924, S. 585 mit lehrreichen Abbildungen, die den durch das Glatteis angerichteten großen Schaden erkennen lassen. Eine zusammenfassendere Darstellung gibt die Arbeit: Sleet and Ice Storms in the United States. By H. C. Frankenfield in Proc. Second Pan American Scientific Congress. Washington 1917. 8°. S. 249—257. — Ein starkes Glatteis in Japan, das bis zu 1000 m Höhe reichte, während darüber Regen fiel, wird beschrieben als: Glaze Storm 22/23 Jan. 1923 in Naguno Prefecture (Journ. Meteorol. Soc. Japan, vol. 42, S. 45—48).

also in etwa 43° N. Br., eines vorkam. Noch viel südlicher aber war das Glatteis vom Januar 1893 in Hongkong (22° 16′ N. Br.), das wahrscheinlich die Äquatorialgrenze der Erscheinung auf der Nordhalbkugel repräsentiert (Meteorol. Zeitschr. 1893 S. 180—181). Im gedruckten Beobachtungsjournal des französischen Schiffes La Bonite finde ich unter dem 6. Mai 1836 um 5^p, als sich das Schiff in 49° 29′ S., 64° 31′ W. befand, die Eintragung »il est tombé du verglas à bord«.

In den Polargebieten scheint die Glatteisbildung in einzelnen Gegenden sehr häufig zu sein. Während die schwedische Expedition auf Spitzbergen (79° 55′) und die holländische in der Karasee (71°) nur relativ wenige Fälle von Glatteis erlebten, wurden auf der Laurie-Insel in den Süd-Orkneys von der schottischen antarktischen Expedition 297 Stunden mit Glatteisbildung notiert, und aus den Aufzeichnungen der belgischen Südpolarexpedition, die sich vom April 1898 bis zum März 1899 zwischen 69° 38′ und 71° 36′ S. Br., 80° 30′ und 96° 40′ W. Lge. bewegte, stelle ich fest, daß 77 Tage mit Glatteis vorkamen, am meisten im August (16) und Oktober (15). Das ist ungewöhnlich viel gegenüber den 9 bzw. 12 Tagen mit Glatteis, welche die beiden französischen Expeditionen im benachbarten Gebiet (Petermann-Insel) zu verzeichnen hatten. Auch hier reicht das Material nicht aus, um die Polargrenze zu bestimmen.

2.

Über die Verbreitung der in der Nähe des Erdbodens stattfindenden unmittelbaren Kondensationen des Wasserdampfes, wie Tau, Reif, Rauhreif, lassen sich wenig verläßliche Angaben machen, da diese Erscheinungen nur an einer kleinen Zahl von Stationen so regelmäßige Beachtung gefunden haben, daß sich die Häufigkeit ihres Auftretens ableiten läßt. Die geringe Ergiebigkeit dieser Art von Hydrometeoren und die unbedeutende Rolle, die sie im Wasserhaushalt der Atmosphäre spielen, machen es einigermaßen verständlich, daß man sich mehr mit der Theorie ihrer Entstehung als mit ihrem Vorkommen in verschiedenen Teilen der Erde beschäftigt hat. Ich habe dies kürzlich bezüglich des Taus und Reifes in der Meteorologischen Zeitschrift (1925) näher ausgeführt.

Im »System der Hydrometeore« hatte ich Beschlag von Tau unterschieden, weil bei ersterem der zur Kondensation gelangende Wasserdampf ausschließlich der Atmosphäre entnommen wird, während beim Tau ein Teil des Wasserdampfes aus dem Boden stammt und nach dem Übergang in die untersten Atmosphärenschichten mitkondensiert wird. C. F. Marvin meint in einer Anmerkung zu der eingangs erwähnten englischen Übersetzung (Classification of the Hydrometeors), daß der Ursprung des zur Kondensation gelangenden Wasserdampfes eine Unterscheidung von Beschlag und Tau nicht notwendig macht, da der aus dem Boden aufgestiegene Wasserdampf alsdann auch der Atmosphäre angehört.

Bei dieser Auffassung, gegen die ich nichts Ernstliches einzuwenden habe, wäre die Bezeichnung Beschlag überflüssig und das Wort Tau ausreichend,

um diese Form der Kondensation zu benennen. Ich glaubte früher einen Unterschied zwischen Beschlag und Tau darin zu finden, daß es nur beim letzteren zur Tropfenbildung kommt, während beim Beschlag eine sehr dünne Wasserhaut die Gegenstände überzieht. Ich übersah aber dabei eine sehr häufige und besonders starke Bildung von Beschlag, nämlich die an Bord von Schiffen, die das Meer befahren. Sie ist oftmals so reichlich, daß sie einem leichten Regen gleichkommt. Die Seeleute nennen sie Tau. In den meteorologischen Schiffsjournalen wird diese Taubildung gewöhnlich nur dann vermerkt, wenn sie besonders stark ist, aber in den stündlichen Beobachtungen des österreichischen Expeditionsschiffes »Novara« findet man sie zu jeder Stunde notiert, in der sie stattgefunden hat. Aus diesen Aufzeichnungen geht hervor, daß die Tau- oder Beschlagbildung meistens schon in den Abendstunden (7—8 Uhr[1]) einsetzt und bis zum Morgen (6—8 Uhr) anhält, daß sie auf allen Meeren, soweit sie von der »Novara« befahren wurden, vorkommt und daß sie bei Annäherung an Festländer besonders stark ist. Auch auf Binnenmeeren, wie dem Mittelmeer, Roten Meer, Persischen Golf, pflegt die Taubildung auf Schiffen kräftig zu sein[2].

Die eben besprochene Kondensation des Wasserdampfes in der Luft über Wasserflächen erfolgt natürlich nur an Gegenständen, die durch Ausstrahlung unter den Taupunkt abgekühlt werden, also auf dem ungeschützten Deck von Schiffen. Auf der Oberfläche des Wassers geht sie nicht vonstatten; denn die Vertikalzirkulation der Wasserteilchen verhindert eine so weitgehende Erkaltung der obersten Wasserschicht. Die Beschlag- oder Taubildung an Bord von Schiffen ist daher für den Wasserhaushalt der Atmosphäre belanglos, aber sie kann dem Menschen gelegentlich nützlich sein. Denn, während es ihm bis jetzt noch nicht gelungen ist, künstlichen Regen zu erzeugen, hat er in der in heiteren Nächten an Bord von Schiffen erfolgenden Taubildung ein relativ einfaches Mittel, der Atmosphäre mühelos Wasser zu entziehen. Es ist freilich eine sehr kleine Menge, die dabei gewonnen wird, die aber, weil es Süßwasser ist, auf dem Meere bisweilen willkommen sein kann. Ein solcher Gedankengang lag vermutlich dem Vorschlag zugrunde, den der im ersten christlichen Jahrhundert lebende griechische Arzt Dioscorides machte, als er empfahl, um auf dem Meere Trinkwasser zu gewinnen, abgeschorene Wolle auf dem Schiffe auszubreiten und, wenn sie ganz naß geworden wäre, süßes Wasser aus ihr auszudrücken (Porta, Magia Naturalis lib. XX, cap. 1).

Indem ich bezüglich der Verbreitung von Tau und Reif auf meinen bereits erwähnten Artikel in der Meteorologischen Zeitschrift 1925 verweise, bemerke ich hier noch, daß die Polargrenze des Taus in der Arktis wahrscheinlich schon bald jenseits des 70. Breitengrades liegt; denn während es in Upsala noch durchschnittlich 72 Tage mit Tau im Jahre gibt, wurden in Vassijaure (68° 25' N., 18° 11 E., 505 m), einer Versuchsstation im schwedischen Lappland, auf der den Hydrometeoren ganz besondere Aufmerksamkeit geschenkt wurde,

[1] Auffällig früh, nämlich um 4p, begann die Taubildung an Bord der »Gazelle« am 9. April 1875, als sie sich in 37.5° S., 85° E. befand.

[2] Die Angabe von Kämtz (Meteorologie I, 357), daß Schiffe auf dem Ozean nur selten feucht werden, ist also nicht richtig.

im Jahre 1906 deren nur noch 6 (1 im Mai, 2 im Juni, 3 im Juli) beobachtet. Auf der Südhemisphäre notierte man auf der »Gauß« als südlichsten Tau den vom 2. Februar unter $51^1/_2$° südl. Breite und 72° östl. Länge.

Die Äquatorialgrenze des Reifes biegt auf den hochgelegenen Plateaus im Innern der Kontinente weit nach Süden aus, so in Südamerika und im Punjab bis etwa 25° Breite. Auch auf Madagaskar kommen Fröste und Reif vor, ja sogar in Angola in rund 15° südl. Breite. Die Ausstrahlung geht auf den frei und hoch gelegenen Flächen offenbar um so kräftiger vor sich, je reiner und staubfreier die Luft daselbst ist. In Ostasien liegt die Äquatorialgrenze des Reifes bei etwa 24° Breite; denn nur noch im Innern von Formosa kommt er bisweilen vor. Japan einschließlich Koreas ist eines der wenigen Länder, die regelmäßig die Zahl der Reiftage in den Monaten und im Jahre bekanntgeben. Dieses Material zeigt sehr schön, wie die mehr kontinentale Lage der Stationen im Innern der großen Inseln, insbesondere von Nipon, die Zahl der Tage mit Reif vermehrt; 120—160 Tage im Jahre sind in Japan und Korea keine Seltenheit. Auch viele hoch gelegene Orte im Innern von Spanien haben zahlreiche Tage mit Reif (100—120), während man bei uns in Norddeutschland nur 60—70 Reiftage hat. Es scheint, daß in mittleren geographischen Breiten von 40°—45° die Reifbildung ein Maximum erreicht; da fehlt die winterliche Schneedecke, und es sinkt andererseits der Taupunkt noch oft unter den Gefrierpunkt, was in südlicheren Lagen immer seltener wird.

In hohen geographischen Breiten, wo während eines großen Teils des Jahres der Boden mit Schnee bedeckt ist, wird die Reifbildung seltener und ist in den eigentlichen Polarregionen ganz geringfügig bzw. wird durch Rauhreifbildung ersetzt. Auf der Petermann-Insel (65° 4′ S.) wurden z. B. notiert:

		1904/05	1908/09
Tage mit	Reif	2	3
	Rauhreif	34	17

In der Treurenbergbai auf Spitzbergen wurden in einem Jahre 9, auf Snow Hill in der Antarktis 23 Reiftage notiert.

Über die Verbreitung des Rauhreifs[1] läßt sich wegen Mangel an entsprechenden Angaben nur wenig sagen. Beobachtungen darüber sind wohl in vielen Beobachtungsnetzen vorhanden, aber sie werden nicht zusammengestellt und veröffentlicht. Nur für Sachsen hat einmal Schreiber fünfjährige Mittelwerte bekanntgegeben (Das Klima des Königreiches Sachsen II, 1893). Sonst muß man sich aus den ausführlich abgedruckten Beobachtungen einzelner Stationen die Tage mit Rauhreif ausziehen, man hat aber meist kein Mittel an der Hand, die Aufzeichnungen auf ihre Vollständigkeit zu prüfen. Soviel scheint festzustehen, daß in mittleren geographischen Breiten der Rauhreif in der Niederung im allgemeinen selten (2- bis 10mal) im Jahre vorkommt, dagegen häufig auf frei gelegenen Höhen und Berggipfeln. Über diesen letz-

[1] Seit der Veröffentlichung des »Systems der Hydrometeore« sind wichtige Untersuchungen über die Entstehung des Rauhreifs von Hilding Köhler erschienen (Geofysiske Publikationer, vol. II, Nr. 1 und 6), auf die ich hier nur verweisen kann.

teren Punkt habe ich schon im »System der Hydrometeore« manche Einzelheit und numerische Angabe mitteilen können.

Über die Verbreitung nach Süden zu kann ich aus dem spanischen Beobachtungsnetz einiges Material beibringen. Die Durchsicht der Jahrgänge 1916—1921 des »Resúmen« auf Rauhreifbemerkungen ergab, daß die Erscheinung in Nordspanien gar nicht so selten auftritt, nämlich an manchen Orten 3- bis 8mal im Jahre. Dagegen ist sie südlich von etwa 40° sehr selten. Ich fand nur je einen Tag mit Rauhreif verzeichnet für das 1100 m hoch gelegene Grazalema in der Sierra gleichen Namens (36° 36′ N.) und für die spanische Besitzung Melilla (35° 18′ N.) an der Küste von Marokko. Am Pik von Teneriffa kommt Rauhreif in den hohen Lagen häufig vor: die 2367 m hoch gelegene Station Izaña hat durchschnittlich 29 Rauhreiftage im Jahre. Die Jahressummen schwankten hier zwischen 39 (1916) und 19 (1919). Das ist der südlichste Punkt (28° 19′ N.), für den ich das Vorkommen von Rauhreif nachweisen kann.

Wie es mit der Häufigkeit der Rauhreifbildung in den Polarregionen steht, ist ziemlich ungewiß. Einige Expeditionen erwähnen die Erscheinung gar nicht, andere geben viele Tage mit Rauhreif an. Das erstere ist der Fall bei den von schwedischen Expeditionen besetzten Stationen Snow Hill (64° 22′ S.) und Treurenbergbai (79° 55′ N.); auch fällt auf, daß die Expeditionen nach dem Roßmeer (zwei englische, eine norwegische) von Rauhreif gar nicht sprechen. Andererseits wurden von der belgischen antarktischen Expedition, auf der Dobrowolski die Formen des Rauhreifes (und Schnees) eingehend untersuchte, 182 Tage mit Rauhreif verzeichnet, neben 261 Tagen mit Nebel (brume). Barkow gibt fürs Weddellmeer 53 Tage mit Rauhreif an und bemerkt, daß sich dieser manchmal ohne Nebel bildete. Es scheint, als ob im Randgebiet der Westantarktis Rauhreif besonders häufig vorkommt, was bei der Nähe der Ozeane und der nahezu dampfgesättigten Luft verständlich ist (vgl. Barkow S. 65).

Die vorstehenden Erörterungen über die Verbreitung der Hydrometeore haben gezeigt, daß die Hydrometeoration im Äquatorialgebiet und in den Polarregionen sehr einfach ist: dort gibt es nur Tau (Nebeltau), Regen und bisweilen Hagel, hier ausschließlich Kondensationen in fester Form. Dagegen tritt die große Mannigfaltigkeit aller Kondensationsformen in mittleren Breiten in die Erscheinung. Zu den meistverbreiteten Hydrometeoren gehört der Hagel, dessen sporadisches und engbegrenztes Auftreten in auffälligem Gegensatz steht zu dem großflächigen des Regens und des Schnees.

Ausgegeben am 25. Juni.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1925

XVI. Gesamtsitzung. 7. Mai.

Vorsitzender Sekretar: i. V. Hr. Lüders.

*1. Hr. Bodenstein sprach über Photochemische Zersetzung von Jodwasserstoff.

Die Zahl der je absorbiertes Quantum zersetzten Molekeln erweist sich unabhängig von der Temperatur und unabhängig vom Aggregatzustand, sie beträgt auch für flüssigen Jodwasserstoff 2 Molekeln je Quant. Für den Mechanismus der Reaktion werden einige Versuche und Betrachtungen beigebracht.

2. Hr. Hintze legte eine Arbeit von Hrn. Prof. Dr. Eduard Sthamer in Berlin vor: »Studien über die sizilischen Register Friedrichs II. (2. Mitteilung)«.

Zunächst wird ein neuer Beweis für die direkte Abhängigkeit der Marseiller Fragmente von dem Originalregister Friedrichs II. in Neapel beigebracht. Sodann wird das von Niese (1913) veröffentlichte neue Fragment aus den Registern Friedrichs II. als Fälschung des 14. Jahrhunderts erwiesen und im Anschluß daran eine Reihe weiterer Fälschungen, die sich in dem Neapeler Originalregister finden, besprochen. Endlich wird gezeigt, daß die Register Friedrichs II. sicher noch bis ins 14. Jahrhundert hinein mehr oder minder intakt erhalten gewesen sein müssen, während man seit dem Ausgange des 16. Jahrhunderts nicht mehr von ihnen nachweisen kann, als was heute noch vorhanden ist.

3. Hr. Franke überreichte einen Sonderabdruck seines Artikels »Die Chinesen« aus dem »Lehrbuch der Religionsgeschichte«, begründet von Chantepie de la Saussaye, 4. Aufl., Bd. I.

4. Das korrespondierende Mitglied Hr. Griffith in Oxford übersandte die Fortsetzung seines Werkes »Oxford excavations in Nubia« (Sonderabdruck).

5. Vorgelegt wurde Monumenta Germaniae historica, Epistolae selectae, tomus III: »Die Tegernseer Briefsammlung« (Froumund), hrsg. von Karl Strecker (Berlin 1925).

Die Akademie hat das korrespondierende Mitglied ihrer philosophisch-historischen Klasse Hrn. Rudolf Wackernagel in Basel am 16. April durch den Tod verloren.

Die Akademie hat das ordentliche Mitglied ihrer physikalisch-mathematischen Klasse Hrn. Müller-Breslau am 23. April durch den Tod verloren.

Ausgegeben am 25. Juni.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1925

XVII. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 14. Mai.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

1. Hr. Schmidt sprach »Über das Extremum der Bogenlänge einer Raumkurve bei vorgeschriebenen Einschränkungen ihrer Krümmung«. (Ersch. später.)

Die Theoreme von H. A. Schwarz und A. Schur über die Bogenlänge einer Raumkurve mit vorgeschriebener Krümmung und einige neue verwandte Sätze werden in sehr einfacher Weise bewiesen.

2. Hr. Hofmann überreichte die 5. Auflage seines Werkes »Lehrbuch der anorganischen Chemie« (Braunschweig 1924).

Glazialgeologische Beobachtungen in den bayerischen Hochalpen.

Von Albrecht Penck.

(Vorgetragen am 12. März 1925 [s. oben S. 140].)

Vorbemerkungen.

Die bayerischen Kalkalpen bieten einen unvergleichlichen Boden für Eiszeitstudien. Während der Eiszeit eigene Gletscher nährend und zugleich durchflossen von zentralalpinem Eis, ermöglichen sie einen selten guten Einblick in die Zusammensetzung der Vergletscherung und deren Zerfall. Leichter als sonst lassen sich in ihnen fluvioglaziale von inter- und postglazialen Ablagerungen scheiden. Ihre Kalke begünstigen die Verfestigung von Geröll- und Schuttmassen, welche in den Zentralalpen locker bleiben. Ältere Schotter gehen daher in jüngere nicht bloß in Form von einzelnen Geröllen, sondern auch als Nagelfluhstücke über, und ebenso erhalten sich tillitartige, verkittete Moränen als Fragmente in jüngeren Ablagerungen. Dadurch wird die Gliederung der Gebilde des Eiszeitalters wesentlich erleichtert.

Es war eine glückliche Fügung, daß ich meine alpinen Eiszeitforschungen gerade in diesem Gebiete beginnen konnte. Geologische Methoden der Beobachtung drängten sich hier auf, die mich dann später mit Eduard Brückner bei unseren Untersuchungen über das gesamte Alpengebiet leiten ließen. Es gereicht mir zu lebhafter Freude, daß ein so hervorragender Alpengeologe wie Otto Ampferer[1] kürzlich ganz gleiche Methoden empfohlen hat. Bei der Ausdehnung meiner Untersuchungen war es mir nicht vergönnt, mein altes Arbeitsfeld wieder zu betreten, das trotz der Nähe von München inzwischen von anderer Seite kaum Würdigung erfahren hatte. Erst als der Krieg ausgedehntere Reisen hinderte, bin ich wieder zu ihm zurückgekehrt, um meinen Studierenden die Alpen zu zeigen und um sie mit den Methoden schärferer geographisch-geologischer Untersuchungen bekannt zu machen. Hr. Posthalter Neuner und Frau Fabrikbesitzer Landes ermöglichten 1917 und 1918 und in den schweren folgenden Jahren 1919, 1920 und 1921 Mittenwald, im Tore zwischen Wetterstein- und Karwendelgebirge, zum Standquartier für Studentenexkursionen zu erwählen. 1923 und 1924 bin ich dahin zurückgekehrt, um meine Untersuchungen zu ergänzen. Im Rißgebiete, wo dies nicht möglich war, hat der

[1] Otto Ampferer, Über geologische Methoden zur Erforschung des Eiszeitalters. Die Eiszeit. I. Leipzig 1924.

kürzlich verstorbene H. v. Wolf durch seine letzte Arbeit die gebliebene Lücke erfreulicherweise großenteils geschlossen. Es ist nötig, die Genesis meiner Studien darzutun, um die enge örtliche Begrenzung des Untersuchungsgebietes zu erklären. Nur was in ein- bis zweitägigen Exkursionen von Mittenwald leicht erreicht werden konnte, ließ sich in das Bereich der Studien ziehen: In Bayern das Isartal zwischen Mittenwald und Fall sowie die Talweitung von Garmisch-Partenkirchen, in Tirol das Gebiet der Gemeinden Scharnitz, Seefeld, Leutasch und Hinter-Riß. Doch konnte ich für die Darstellung auch die Ergebnisse zweier Studentenexkursionen (1909 durch das Karwendelgebirge, 1912 von Garmisch zum Fernpaß) verwerten.

Die Untersuchungen bewegen sich im wesentlichen also auf den Blättern Mittenwald-West und -Ost (97) und Scharfreiter (98) des topographischen Atlas von Bayern 1 : 50000, doch wurden bei ihnen die bayerischen Positionsblätter 1 : 25000 Nr. 865 Walchensee, 878 Eibsee, 879 Partenkirchen und Garmisch, 880 Mittenwald, 881 Karwendelspitz, 889 Dreitorspitz, 890 Scharnitz benutzt. Ihnen wurden die Höhenzahlen entnommen, weil sie vielfach zur Orientierung dienen. Diese Zahlen sind um 0.6—0.7 m höher als die des topographischen Atlas, dem in der Rechtschreibung der Namen gefolgt wurde. Die von Ampferer aufgenommenen Blätter Zirl und Nassereith sowie Innsbruck und Achensee der geologischen Spezialkarte von Österreich 1:75000 geben für den österreichischen Anteil des Gebietes eine ganz vorzügliche geologische Darstellung. Für das gesamte Wettersteingebirge leistet die Karte von Reis und Pfaff 1 : 25000 dieselben hervorragenden Dienste, doch erstreckt sich ihre sonst hohe Verläßlichkeit nicht auf die Darstellung des Quartärs. Für den bayerischen Anteil des Karwendelgebirges fehlt noch eine befriedigende Neuaufnahme. Die vom Alpenverein 1888 herausgegebene Geologische Karte 1 : 50000 des Karwendelgebirges, bearbeitet von A. Rothpletz, unter Mitwirkung von W. Clark, E. Fraas, O. Jaekel, O. Reis und R. Schäfer, ist veraltet, ebenso wie Gümbels für ihre Zeit epochemachende geognostische Karte des bayerischen Alpengebirges 1 : 100000. Beide sehen von einer Gliederung der Quartärgebilde ab.

Meine durch das Studium der Schotterterrassen des Isar- und Loisachtales erzielten Ergebnisse sind bereits 1922 veröffentlicht. Hier folgen nunmehr die Beobachtungen über die Zusammensetzung und die Wirkung der letzten Talvergletscherung des Gebietes, ferner die über ihren Rückzug. Weiter kommen Beobachtungen über alte Breccien und junge Krustenbewegungen. In einer dritten Mitteilung werden die erzielten Ergebnisse in einen größeren Rahmen eingefügt, und es soll gezeigt werden, welche Wandlungen in der Auffassung der Probleme seit 1882 eingetreten sind. Das Kärtchen S. 350 ist für alle drei Arbeiten bestimmt.

Die glazialgeologische Literatur unseres Gebietes wird im folgenden chronologisch zusammengestellt und nach den angegebenen Nummern zitiert. Andere Zitate befinden sich unter dem Text.

1. A. u. H. Schlagintweit: Neue Untersuchungen über die physikalische Geographie und die Geologie der Alpen. Leipzig 1854.
2. C. W. Gümbel: Geognostische Beschreibung des bayerischen Alpengebirges und seines Vorlandes. Gotha 1861. Dazu Blatt Werdenfels der Geognostischen Karte des Königreichs Bayern. I. Das bayerische Alpengebirge 1 : 100000. 1858.
3. A. Penck: Die Vergletscherung der Deutschen Alpen. Leipzig 1882.
4. A. Rothpletz: Das Karwendelgebirge. Zeitschr. d. Deutsch. u. Österr. Alpenvereins 1888. S. 401. Die geologische Karte erschien einzeln.
5. O. Ampferer und W. Hammer: Geologische Beschreibung des südlichen Karwendelgebirges. Jahrb. k. k. geol. Reichsanstalt XLVIII. 1898. S. 289.
6. O. Ampferer: Grundzüge der Geologie des Mieminger Gebirges. Verh. k. k. geol. Reichsanstalt 1902. S. 170.

7. A. Penck und E. Brückner: Die Alpen im Eiszeitalter. Leipzig 1908. Die einschlägigen Kapitel erschienen 1902.
8. O. Ampferer: Geologische Beschreibung des nördlichen Teiles des Karwendelgebirges. Jahrb. k. k. geol. Reichsanstalt LIII. 1903. S. 169.
9. Chr. März: Der Seenkessel des Soiern, ein Karwendelkar. Wissensch. Veröffentl. d. Vereins f. Erdkunde. Leipzig. VI. S. 216.
10. O. Ampferer: Geologische Beschreibung des Seefelder, Mieminger und südlichen Wettersteingebirges. Jahrb. k. k. geol. Reichsanstalt LV. 1905. S. 451.
11. O. Ampferer: Über Gehängebreccien der nördlichen Kalkalpen. Eine Anregung zu weiteren Forschungen. Jahrb. k. k. geol. Reichsanstalt LVII. 1907. S. 727.
12. O. Reis: Erläuterungen zur geologischen Karte des Wettersteingebirges. I. Teil. Geognostische Jahreshefte. XXIII. 1910. München 1911. S. 61. Dabei O. Reis und F. Pfaff: Geologische Karte des Wettersteingebirges 1 : 25000.
13. O. Ampferer: Geologische Spezialkarte von Österreich 1 : 75000. Blatt Zirl und Nassereith. 1912.
14. Desgl. Blatt Innsbruck und Achensee. 1912.
15. Gehl: Ein stadiales Zugenbecken bei Ellmau. Mitteil. d. Vereins d. Geographen a. d. Universität Leipzig II. 1912. S. 32—38.
16. E. Wunderlich: Eibsee- und Fernpaßbergsturz und ihre Beziehungen zum Lermooser Becken. Mitteil. d. Deutsch. u. Österr. Alpenvereins 1913. Nr. 23.
17. R. v. Klebelsberg: Glazialgeologische Untersuchungen vom bayerischen Alpenrande. Zeitschr. f. Gletscherkunde VIII. 1914. S. 226.
18. A. Penck: Die Höttinger Breccie und die Inntalterrasse nördlich Innsbruck. Abhandl. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1920. Phys.-math. Klasse. Nr. 2.
19. E. Fels: Gehängebreccien im Karwendelgebirge. Zeitschr. d. Gesellsch. f. Erdkunde. Berlin 1920. S. 307.
20. E. Fels: Die Kare der vorderen Karwendelkette. München 1921. 17 S.
21. Fr. Levy (Leyden): Diluviale Talgeschichte des Werdenfelser Landes und seiner Nachbargebiete. Berlin 1920. Ostalpine Formenstudien I.
22. A. Penck: Die Terrassen des Isartales in den Alpen. Sitz.-Berichte d. Preuß. Akad. d. Wissensch. Phys.-Math. Klasse. 1922. S. 182—208.
23. A. Penck: Ablagerungen und Schichtstörungen der letzten Interglazialzeit in den nördlichen Alpen. Ebenda S. 214—251.
24. H. v. Wolf: Geographisch-geologische Streifzüge in den Risser und Kreuther Bergen. Der Alpenfreund. 1922. S. 93.
25. A. Penck: Die letzten Krustenbewegungen in den Alpen. Geologiska Föreningens i Stockholm Förhandlingar XLIV. 1922. S. 607.
26. H. v. Wolf: Beiträge zur Kenntnis der eiszeitlichen Vergletscherung des Achenseegebietes in Tirol. Mitteil. d. Geogr. Gesellsch. München XV. 1922. S. 147.
27. Fr. Leyden (Levy): Grundfragen alpiner Formenkunde. Geologische Rundschau XV. 1924. S. 193.
28. H. v. Wolf: Eiszeistudien im Risser Gebirge. Mitteil. d. Geogr. Gesellsch. München XVII. 1924. S. 255.
29. Ampferer und Th. Ohnesorge: Erläuterungen zur Geologischen Spezialkarte der Republik Österreich. Blatt Zirl und Nassereith. 1924. 68 S.
30. Desgl. Blatt Innsbruck–Achensee. 1924. 108 S.
31. J. Sölch: Geographischer Führer durch Nordtirol. Sammlung geographischer Führer I. Berlin 1924.

I. Zusammensetzung und Wirkung der Talvergletscherung.

Der eiszeitliche Inngletscher hat oberhalb Innsbruck zwischen der Mieminger Kette und dem Seefelder Gebirge sein linkes Talgehänge überflutet und ist über den Seefelder Paß in einer Breite von 11 km in das Isargebiet, nämlich

in das Leutaschtal und in das Tal des Seefelder Baches, eingedrungen. Dieses Überfließen geschah nicht derart, daß sich die oberen Partien des Eises von den unteren abscherten, sondern es stieg der Inngletscher gegen den Seefelder Paß hin am linken Gehänge seines Tales allmählich empor, um dann über den Paß nordostwärts abzuschwenken. Auf der Paßhöhe laufen die Gletscherschliffe nach Nordosten, am Abfalle des Passes 100 m unterhalb Mösern nach Osten, während das Inntal eine südöstliche Richtung einschlägt. Bei Reith, nahezu auf der Paßhöhe, aber noch am Inntale gelegen, richtet sich der Gletscherschliff am Übergange der Karwendelbahn über die Seefelder Straße bereits nach Nordosten, gegen die Reither Spitze an der Ostseite des Passes; weiter abwärts an der oberen Kehre der Straße nach Zirl läuft ein solcher nach Osten. Das Aufsteigen des Inngletschers an seiner linken Talseite gegen den Paß wird auch durch die Beschaffenheit des von ihm verfrachteten erratischen Materials erwiesen. Es besteht größtenteils aus zentralalpinen Geröllen, welche aus Inntalschottern stammen; letztere sind im Tale ausgefegt, und ihr Material ist weithin in den nördlichen Kalkalpen verbreitet worden. Eckige zentralalpine Geschiebe fehlen natürlich nicht; sie sind bei Reith sogar sehr häufig; im allgemeinen aber treten sie auf dem überfluteten Passe gegen die verschleppten Gerölle zurück.

An der Ostflanke des Passes hat das Eis zentralalpines Material am Südabfalle der Reither Spitze bis auf 2120 m emporgetragen. Rundformen erstrecken sich bis auf 2250 m, fast bis zur Nördlinger Hütte. Höher noch hat das Eis auf der Westseite des Passes an der Hohen Munde gereicht. Es frachtete zentralalpine Geschiebe über den Sattel der Niederen Munde (2065 m), und eine prächtige Schliffkehle zieht sich auf der Südseite der Hohen Munde in 2300 m Höhe entlang. 2250—2300 m hoch reichte das Eis, das sich vom Inngletscher abzweigte. Dieser aber flutete wenig weiter talaufwärts noch über den 2372 m hohen Tschirgant, an dessen Gipfel Ampferer (6, S. 180) noch ein erratisches Gestein fand. In der Nachbarschaft dürfen wir die alte Eisoberfläche in rund 2400 m suchen.

Die über den Paß geflossene Eismasse staute sich im Norden an den Ketten des Wetterstein- und des nördlichen Karwendelgebirges und ergoß sich zwischen ihnen durch das Leutasch- und Isartal nach Norden. Der Zug der Arnspitzen bildete hier gleichsam eine Wehr, über welches die höchsten Eispartien noch hinwegfließen konnten; lediglich die Gipfel der Arnspitz selbst (2196 m), der mittleren und hinteren Arnspitz (2172 m) ragten über dem Gletscher auf, der also mit gleicher Breite, mit der er sich vom Inngletscher losgelöst hatte, in die Enge zwischen Wetterstein- und Karwendelgebirge eintrat; Rundformen am Westfuß der hinteren Arnspitz, bis 2120 m sich erhebend, dürften der Eisoberfläche entsprechen; zentralalpine Geschiebe liegen in einer flachen Einsattlung westlich davon in etwas über 2020 m und am Südostabfall der vorderen Arnspitz in 2030 m Höhe. Zwischen dieser und der hinteren Arnspitz fehlen sie, auch auf Rundformen. Weiter westlich sind sie ziemlich häufig auf dem Rundhöckergelände gegen den Arnkopf zu, ebenso wie im Westen beim unteren Arnkopf (1769 m). Das etwas diagonal gemessene Eisgefälle zwischen Reitherspitz und Arnspitz war kaum 15‰.

Viel steiler war es von hier gegen Mittenwald hin. Hier treten die nördlichen Karwendel- und Wettersteinketten einander unmittelbar gegenüber zusammen und sind nicht durch ein Zwischenglied voneinander getrennt. Leutasch- und Isartal haben sich vereinigt. Ein einziges Tor öffnet sich gegen Norden (Fig. 1). Auf dessen Westseite zieht sich ein Rundhöckerfeld von 1900 m Höhe am Ostfuße der Wettersteinspitz bis zum Franzosensteig herab. Eine ähnliche Rundhöckerlandschaft erstreckt sich auf der Ostseite unter den Wänden der südlichen Karwendelspitz, ihr gehören der Lindlähnerkopf (1789 m) und ein südlich gelegener Felskopf von 1800 m Höhe an. Rundliche Felsbuckel erheben sich bis gegen 1900 m Höhe, dann beginnen die zackigen Formen. Das Eisgefälle im Tore von Mittenwald betrug sohin auf kaum 4 km 200 m, also mehr als 50‰. Es fand in der Enge ein Sturz des Eises statt, und

Fig. 1.

W Querprofil des Mittenwalder Tores 1 : 50000. *O*

(Der unbekannte Betrag der Aufschüttung des Isartales ist punktiert.)

zugleich wurde es beinahe auf die Hälfte der Breite zusammengedrängt, die es beim Überfließen über das Inntalgehänge bei Seefeld gehabt hatte.

Aber nicht die gesamte Breite (6 km) dieses Eissturzes wurde vom abgezweigten Eise des Inngletschers eingenommen. Kein zentralalpines Gerölle wurde auf dem Rundhöckerfelde am Westfuße der Wettersteinspitz gefunden; erst auf der 1.3 km entfernten Kuppe des Grünkopfes (1589 m) und südwestlich davon am Franzosensteige wurden solche angetroffen. Kein zentralalpines Geschiebe liegt auf den Felsbuckeln des Lindlähnerkopfes und auf seiner Abdachung gegen das Isartal hin. Erst tief unter seinen Felswänden wurden hier auf der Terrasse des Leiterwaldes einige wenige in 1050 m Höhe gefunden. Jedoch fehlt erratisches Material oben nicht. Es liegen gerundete Muschelkalkgeschiebe auf seinem Wettersteinkalk, und dann und wann finden sich Reste von Moränen. Nicht das Eis des Inngletschers, sondern das aus dem Karwendelgebirge kommende des Isargletschers passierte in einer Breite von 0.9 km die Ostseite der Mittenwalder Enge. Daß dem so war, zeigt sich bei Scharnitz. Während hier das linke Gehänge des Isartales von der Arnspitze herab mit zentralalpinen Geröllen überstreut ist, ist der Abfall der Brunnsteinspitz ganz frei von solchen, obwohl sich eine typische Rundbuckellandschaft mit charakteristischen Abstufungen von den südlichen Felswänden der Spitze, also von 2100 m Höhe herab, nach Scharnitz zieht. In ähnlicher Weise floß an der Westseite des Tores von Mittenwald ein allerdings weniger

mächtiger Streifen von Eis des Wettersteingebirges. Nur in der Mitte des Tores passierte Inngletschereis. Wie sich gegenwärtig die verschiedenen Zuflüsse eines großen Gletschers gesondert verhalten, war es in der Eiszeit auch. Aber die Grenzen zwischen diesen drei Bestandteilen des Eisstromes im Mittenwalder Tore sind keine scharfen. In der Höhe von 1300 m bis zum Grünkopf sind die zentralalpinen Geschiebe ebenso spärlich wie rechts der Isar im Leiterwalde. Wir schließen hieraus nicht, daß sich das Inntaler Eis an seinen Flanken mit kalkalpinem mischte, sondern daß hier die Grenzen im Laufe der Vergletscherung Verschiebungen erlitten, so daß sich kalkalpine und zentralalpine Geschiebe mischten, ohne daß gleiches mit kalk- und zentralalpinem Eise geschah. Es wird sich zeigen, daß letzteres in den großen Tälern länger weilte, als es von den Kalkalpen gespeist wurde. Als die kalkalpinen Gletscher schwanden, ging das vorher von ihnen zusammengepreßt gewesene zentralalpine Eis auseinander und verbreitete sich über Gebiete, die während des Hochstandes der Vergletscherung von kalkalpinem eingenommen waren; beim Schwinden der Vergletscherung streute das zentralalpine Eis seine Geschiebe weiter aus als zuvor. Die seitliche Begrenzung des Schwarmes zentralalpiner Erratika, die wir noch kennenlernen werden, ist daher keine Stromlinie des Eises.

Folgende Tabelle enthält die Maße der einzelnen Teile des Gletscherquerschnittes im Mittenwalder Tore, senkrechte Scheiden angenommen:

	Wettersteineis	Grenzgebiet	Inntaleis	Grenzgebiet	Karwendeleis	Summe
Breite........	1.2 km	0.9 km	2.5 km	0.5 km	0.9 km	6.0 km
Querschnitt ...	0.29 qkm	0.39 qkm	1.95 qkm[1]	0.44 qkm	0.26 qkm	3.33 qkm
Tiefe.........	240 m	420 m	780 m	880 m	290 m	550 m

Nach dem Dargelegten dürfen wir die beiden Grenzgebiete während des Höchststandes der Vergletscherung dem kalkalpinen Eise zuzählen; damals war der Querschnitt des Stromes folgender:

Wettersteineis... 0.68 qkm   Inntaleis[1]... 1.95 qkm   Karwendeleis... 0.70 qkm,

d. h. er gehörte kaum zu 60% dem Inntaleis an; aber letzteres hatte größere Mächtigkeit als seine beiden Begleiter; wir dürfen daher wohl annehmen, daß während des Maximums der Vergletscherung rund $^2/_3$ des im Tore strömenden Eises aus dem Inntale kam. Später, als die Eisoberfläche auf 1500 m gesunken war, ist dieser Anteil ein weit größerer gewesen. Der Eisquerschnitt war damals 1.32 qkm, die fast ganz dem Inntaler Eise zufielen; nur 0.09 qkm waren vom Karwendeleis eingenommen.

Das von beiden Seiten her dem Mittenwalder Tore zuströmende Eis war weiter oberhalb gestaut; der Gletscherstand von 2120 m an der Arnspitz ist maßgebend für das gesamte zur Isar bei Scharnitz entwässernde Karwendelgebirge, dessen große Täler bis 2200 m Höhe mit Eis erfüllt waren. Letzteres konnte überfließen, wo eben Lücken in der Umwallung waren. Am deutlichsten wird dies auf dem Bärenalpl, der tiefen Lücke in der Vorderen Karwendelkette, sichtbar. Ein bereits von Ampferer (8, S. 227) aufgefundener

[1] Ohne das unbekannte, von der Isar verschüttete Stück von etwa 0.2—0.3 qkm.

Gletscherschliff westlich Höhenzahl 1838 m weist nach Norden zum Hufachboden und zum Fermersbachtale. Gewiß ist auch Eis über den Hochalpsattel (1804 m) aus dem Karwendeltale in das Rißgebiet gelangt; schon Ampferer sah Moränenmaterial auf der Paßhöhe. Gerundete Formen erheben sich am Passe bis zum Hochalpenkreuz (2198 m), und eine deutliche auch von Fels (20, S. 13) etwas zu tief angesetzte Schliffkehle zieht sich von hier ostwärts. Gleiche Höhe hat das Eis auch im obersten Isargebiete erlangt und hat über das Lafatscher Joch (2085 m) gereicht. Zentralalpine Geschiebe nördlich dieses Passes, von denen H. v. Wolf berichtet (26, S. 186. 264) erweisen, daß Inntaler Eis während seines Höchststandes überfloß, aber ein Gletscherschliff, den ich 1909 gerade auf der Sattelhöhe bloßlegte, weist nach Süden und zeigt, daß später auch Karwendeleis zum Inntal floß. Wenn nun auch das Karwendeltal in seinen obersten Partien Eis in das Rißgebiet sandte, so führte es doch sein Eis hauptsächlich der Isar zu; ein gleichfalls schon von Ampferer bemerkter Gletscherschliff (8, S. 229) oberhalb der Talmündung, dort wo der Bach unter dem Katzenkopfe Fels anschneidet, läuft talauswärts, südsüdwestlich. In den oberen Partien des Karwendeltales lag also eine Eisscheide.

Beim Austritte aus dem Mittenwalder Tore breitete sich die Eismasse im Raume nördlich vom Wetterstein- und Karwendelgebirge aus. Dabei drängte das Inntaler Eis stark nach beiden Seiten. Es schmiegte sich um den Mittenwalder Burgberg. An seinem Ostabfalle laufen die Gletscherschliffe nordnordöstlich, an seinem Nordabfalle westnordwestlich. Zentralalpine Geschiebe überstreuen nicht bloß die Gegend des Ferchensees, wohin sie über den Grünkopf gelangt sein könnten, sondern finden sich auch westlich im Wettersteinwalde. Bereits A. Schlagintweit (1, Tafel XIX) verzeichnet solche in 1360 m Höhe nördlich vom Zirbelkopfe. So hoch habe ich sie hier nicht gefunden. Einzelne größere Hornblendegesteinsblöcke liegen im Alpengraben am Wege zur Windfallhütte in etwa 1170 m Höhe, kleinere Geschiebe zwischen Schachen- und Bannholzweg östlich Höhenzahl 1232 m in 1270 m Höhe, nur 1600 m entfernt vom Kämikopfe. Hat schon Gümbel (2, S. 802) stark abgerollte Urgebirgsgerölle im Wettersteinwalde bei Garmisch gefunden, so erwähnt Reis (12, S. 80) zentralalpine Geschiebe in den Moränen bei der Kälberhütte (1236 m) südlich vom Ferchenbache. Da sind wir dicht beim Reintale, das die Partnach durchströmt, und hier gibt Adolf Schlagintweit erratische Geschiebe in der Mitterklamm in 1000 m Höhe an, weiter oberhalb, als ich solche gefunden. Ein Gletscherschliff am höchsten Punkte (1040 m) des Weges von Ellmau nach der Partnachklamm weist deutlich nach Westnordwesten. Zentralalpine Geschiebe überstreuen den Hohen Kranzberg (1392 m) und sind häufig in den Moränen auf den Terrassenschottern der Isar im Bereiche der Mittenwalder Mähder.

Östlich der Isar sind zentralalpine Geschiebe südlich vom Seinsbache selten. Einzelne wurden in der Ufermoräne des alten Dammkargletschers unweit der unteren Kälberalpe in 1200 m Höhe auch schon von Ampferer (8, S. 240) gefunden, ein einziges im Tale des Seinsbaches im Bette des Lausgrabens (1100 m), dazwischen keine. Nördlich vom Seinsbache sind sie häufig auf den Felsterrassen von 900 bis 1000 m; gegenüber Krünn reichen sie zwi-

schen Hüttle- und Felsengraben bis 1290 m und am Wege zur Fischbachalpe bis 1360 m, wie auch H. v. Wolf bemerkte. Hier sind wir bereits im Längstale der Isar. Aber über den Sattel der Fischbachalpe drang das zentralalpine Eis noch nicht in das Fischbachtal ein. Das geschah erst, wie H. v. Wolf mitteilt, über den Sattel der Grasberger Vorderalp (1314 m), der bis 1450 m mit kristallinen Geschieben überdeckt ist. Weiter unterhalb finden sich solche auch im Fischbachtale. Alle diese nach Osten hin ansteigenden Funde liegen unter der oberen Gletschergrenze. Scharfe Formen verraten, daß der Seinskopf (1956 m) darüber aufragte, aber bereits der Lausberg (1855 m) ist gerundet. Sein Abfall gegen den Seinsbach zeigt ähnlich wie der Südabfall der Brunnsteinspitz stufenförmige Absätze, auf deren Höhen in 1700 m und 1560 m sich typische Rundhöckerlandschaften dehnen. Darum nehmen wir die obere Gletschergrenze hier in wenig über 1700 m Höhe an. Aber nicht ein kristallines Geschiebe wurde gefunden. Der Grat, der sich vom Seinskopf nordwärts zum Felsenköpfl (1702 m) zieht, ist stellenweise ziemlich scharf und deswegen vom Eise wohl nicht überschritten worden. Aber unter dem Felsenköpfl liegt eine deutliche Schliffkehle. Wir setzen danach die obere Gletschergrenze dort, wo das Eis in das Längstal der Isar abbog, in rund 1700 m Höhe an und erhalten bis hierher vom Mittenwalder Tore an ein Eisgefälle von 25‰.

Tief senkt sich der Sattel der Vereinsalp (1430 m) unter die Höhen, die das Eis an der rechten Flanke des Fächers unterhalb Mittenwald erreicht. Aber nicht ein einziges Geschiebe zentralalpiner Gesteine wurde auf der ziemlich ausgedehnten Paßfläche angetroffen. Sie wird in ihrer Gesamtheit von kalkalpinen Moränen eingenommen. Jenseits des Passes finden sich jedoch am Fermersbache unterhalb der Brandelalp in 1100 m Höhe kristalline Geschiebe. H. von Wolf ist der Meinung, daß sie gleich dem andern von ihm im Rißgebiete, auf dem Sattel von Vordersbachau (1277 m; 28, S. 259), an der Mündung des Leckbaches in 920 m Höhe gefundenen, zentralalpinen Erratikum dahin über die Vereinsalpe gekommen sei (24, S. 136). Gleiches könnte auch von den Geschieben von Amphibolit gelten, die Levy nach H. v. Wolfs Angabe (26, S. 279) auf der Höhe der Stufenmündung des Tortales gegen das Rißtal in etwa 1020 m Höhe gefunden hat, sowie von jenem zentralalpinen Erratikum, das nach H. v. Wolf um Hinter-Riß gar nicht so selten ist (28, S. 259). Aber auf eine Strecke von 8.5 km, vom Lausgraben bis unterhalb der Brandelalp im Fermersbachtal, fehlt jedes zentralalpine Geschiebe. Es erweckt den Anschein, als ob im oberen Fermersbachgebiete das Eis höher gereicht habe als am oberen Seinsbache, wo der Rücken vom Wörnerkopf (1979.3 m) bis zum Klein Karle (1810.7 m) nicht vom Eise überschritten war, während im oberen Fermersbachtal das Hirzeneck (1801.7 m), am Südostabfalle der Soiernspitz, ebenso wie die Hintere Kammleitenspitz (1692.1 m) glaziale Rundformen tragen. Danach ist östlich vom Sattel der Vereinsalpe auf eine Eishöhe von mehr als 1800 m, westlich auf weniger als 1800 m zu schließen. Angesichts der Tatsache, daß das im Fermersbachtal strömende Eis über das Bärenalpl vom Karwendeltale gespeist wurde, ist es durchaus nicht unwahrscheinlich, daß es stark genug war, um das Überfließen Mittenwalder

Eises über den Sattel der Vereinsalp zu hindern. Die weiter unterhalb im Fermersbachtale auftretenden kristallinen Geschiebe können auch beim Zerfalle der Vergletscherung von unten her in das Tal gebracht worden sein. Damit steht im Einklange, daß sie, wie alle zentralalpinen Geschiebe im unteren Rißtale, nur wenig hoch über Tal gefunden werden. Wie dem auch sei: Ebenso wie westlich der Isar das zentralalpine Eis dicht am Nordabfall des Wettersteingebirges entlang floß, so trat es östlich des Flusses im Rißgebiet nahe an den Nordabfall des Karwendelgebirges heran.

Zur Bestimmung der Gefällsverhältnisse dieses großartigen Eisfächers haben wir nur wenige Anhaltspunkte. Er flutete über große Teile des Voralpenzuges, und nur, wo er sich hier an Bergen gabelte, die ihm Zuflüsse nicht entgegensandten, strandete er zentralalpines Material in solchen Höhen, die der Teilung der Eisoberfläche nahekommen. Zwei solche Teilungsstellen hat R. v. Klebelsberg im Norden unseres Eisfächers gefunden (17, S. 244. 249). Die eine liegt am Wank (1781 m) östlich Partenkirchen. Hier reichen zentralalpine Geschiebe bis 1620 m; dann hört jede Gletscherspur auf. Danach zu urteilen, ragte der Wank über die Gletscheroberfläche auf, und wir pflichten R. v. Klebelsberg bei, wenn er sie hier auf etwas weniger als 1700 m ansetzt. Sie senkte sich also von der Westseite des Tores von Mittenwald hierher um 200 m, mit einem Gefälle von 22‰. Die andere Gabelstelle liegt nördlich vom Walchensee. In der Einsattelung zwischen Herzogenstand und Benediktenwand erhebt sich hier der Jochberg (1567 m). An seinem Südabfalle liegen zentralalpine Geschiebe in 1370 m Höhe; mit Recht schließt R. v. Klebelsberg danach auf eine Eishöhe von rund 1400 m. Wir erhalten also von der Ostflanke des Mittenwalder Tores hierher ein Gefäll von 500 m, entsprechend 22‰. Vom Mittenwalder Tore bis zu den nächsten Stellen im Nordosten und Norden, wo wir wieder einen festen Anhalt für die Bestimmung der eiszeitlichen Gletscherhöhe haben, ergeben sich nahezu übereinstimmende Gefällswerte. Deswegen nehmen wir an, daß sich das Eis in den niedrigen Gebirgsteilen des Voralpenzuges, die es überflutete, gleichmäßig abdachte und auf 4.5 km Entfernung um rund 100 m senkte. Danach konstruieren wir, ausgehend vom Franzosensteig unter der Wettersteinspitz im Westen und vom Lindlähnerkopf im Osten, die Isohypsen der Gletscheroberfläche in den Gebieten, wo wir für sie sonst keinerlei Anhaltspunkte haben. Die 1800-m-Isohypse schließt sich beim Rehberg unterhalb Mittenwald an das rechte Talgehänge an; das ist durchaus plausibel, denn nichts spricht dafür, daß das Eis den östlich gelegenen Grat zwischen Wörnerkopf (1979 m) und Klein Karle (1811 m) überschritten habe, an dessen Nordseite sich bezeichnenderweise das Steinkar mit 1600 m Schwellenhöhe eingefressen hat. Es kommt unsere Isohypse über Ellmau zu liegen und biegt dann im Wettersteinwald, bis wohin zentralalpines Material gefrachtet wurde, gegen das Wettersteingebirge zurück. Die 1700-m-Isohypse schließt sich an die Soierngruppe dicht bei dem Felsenköpfl an, wo wir eine Schliffkehle in dieser Höhe fanden, und zieht sich über Krünn gegen den Wank, etwas weiter nördlich als die von R. v. Klebelsberg (17, Tafel VIII) gezogene Linie. Gleiches gilt von der 1600-m- und in geringerem Umfang von der 1500-m-Isohypse. Die Übereinstimmung

ist befriedigend. Ob nun die 1700-m-Isohypse der Gletscheroberfläche in ähnlicher Weise wie die 1800-m-Linie zum Wettersteingebirge zurückbiegt, kann erst entschieden werden, wenn das Kreuzjoch bei Garmisch (1720 m) genauer in bezug auf das erratische Phänomen untersucht sein wird. Wir fanden am Nordabfalle die obersten Fremdlinge bei den Trögeln in nur 1440 m Höhe, A. Schlagintweit (1, Tafel XIX) bis 1550 m. Grundmoränen reichen bis etwa 1600 m. Am Kreuzeckhause (1652 m) liegen Trümmer, die einer Moräne angehören können. Ob aber auch das Kreuzjoch vom Eise bedeckt war oder wie die Gipfelpartie des Wank als Nunatak aufragte, bleibt noch festzustellen. Die von A. Schlagintweit (1, Tafel XIX) unter den Nagelfluhwänden des Längenfeld in 1490 m Höhe verzeichneten erratischen Geschiebe stammen möglicherweise aus der Nagelfluh. Sicher ist, daß der aus dem Wettersteingebirge kommende Partnachgletscher am Schachen nicht über 1800 m Höhe hatte, also mindestens 100 m tiefer lag als der Isargletscher beim Betreten der Talweitung von Garmisch–Mittenwald.

Ebenso wie der Eisfächer unterhalb Mittenwald sich längs des Wettersteingebirges westwärts senkte, mußte sich das Eis auch nördlich vom Karwendelgebirge ostwärts senken, denn es brachte zentralalpines Material bis in die Hinter-Riß. Wie hoch es hier stand, läßt sich lediglich aus der Tatsache entnehmen, daß aus dem Rißtale kein zentralalpines Material in das Dürrachtal kam, obwohl die dahin führenden Sättel, der Grasberg- (1541 m) und Baumgartensattel (1557 m), wie H. v. Wolf kürzlich gezeigt hat (28, S. 211), von Eis überschritten wurden. Kalkalpines Eis muß also im Längstal von Hinter-Riß höher gestanden haben als die Pässe, aber wohl schwerlich höher als 1700—1800 m. H. v. Wolf setzt unseres Erachtens die obere Gletschergrenze im Rißgebiete 100 bis 150 m zu hoch an. Sie kann bei Hinter-Riß nicht 1850 m hoch gelegen haben, denn der Kamm des Ronberges (1772 m) zeigt keine Spuren des Eisüberganges, und sie kann bei Vorder-Riß nicht 1650 m hoch gelegen sein, denn am Grasberge liegen die höchsten kristallinen Geschiebe nach H. v. Wolf nur 1450 m hoch. Leider teilt er keine Bestimmungen für den Graskopf und Grammersberg mit. In Übereinstimmung mit R. v. Klebelsberg nehmen wir für die Vorder-Riß eine Eishöhe von 1500 m an. Es senkte sich unser Eisfächer ebenso nach Nordosten wie nach Nordwesten, und über der südlichen Walchenseegegend lag das Eis höher als östlich im Isar- und westlich im Loisachtale.

Die Gebiete, wo sich oberhalb und unterhalb von Mittenwald das Eis weit ausbreiten konnte, sind der Schauplatz großer Moränenentwicklung. So ist es im Dolomitgebiete zwischen Leutasch und Seefeld. Die Inntalmoränen sind hier noch ausgedehnter, als von Ampferer (13) angegeben worden ist, der nur die größeren Vorkommnisse im Maßstabe 1 : 75000 zu verzeichnen vermochte. Sie kleiden namhafte Talstücke zwischen Buchen und Leutaschplatzl, bei Wildmoos und im Kellentale, am Wege von Mösern nach Seefeld, unterhalb Seefeld, selbst am Drahnbache an der Mündung des Trockentales »Durch den Boden« unweit Höhenzahl 1021 m, sowie zwischen Reith und Seefeld aus und nehmen an der Straße von Seefeld nach Leutasch eine solche Entfaltung, daß man hier ein verschüttetes altes Seitental der Leutasch mutmaßen möchte.

Unter den Moränen haben sich bei Leutasch und unterhalb Seefeld Reste der interglazialen Schotter erhalten. Das übergeflossene Eis hat sie nicht entfernt; nur am Rande des Gebietes gegen das Inntal hin hat es den Felsen allenthalben bloßgelegt. Sonst hat es Material abgelagert.

Anders in der Mittenwalder Enge: Zwischen Scharnitz und Mittenwald ist das Isartal beinahe frei von eiszeitlichen Ablagerungen. Moränen fehlen fast gänzlich; postglaziale Schutkegel machen sich breit. Am Brunnsteinköpfele und an der Porta Claudia sowie an der Isar bei Scharnitz springen Rippen in das Tal vor, dessen Übertiefung bereits oberhalb der Enge in dem von Seefeld kommenden Tale des Drahnbaches beginnt, während das aus dem Karwendelgebirge kommende Isartal nicht bloß stufenförmig mündet, sondern auch in seiner untersten Partie mit Moränen ausgekleidet und stellenweise von interglazialen Schottern verschüttet ist, worauf hier nicht näher eingegangen werden soll. Das Drahnbachtal und das Isartal der Enge sind die Hauptbahn des Gletschers gewesen. Im Leutaschtale reichen Anhäufungen Inntaler Grundmoränen bis in die Enge hinein und werden noch unterhalb Lochlehen angetroffen; dann entfaltet sich ein breiter Talboden bei der Kirche, auf ihn folgt ein zunächst sanft ansteigender, gegen das Isartal steil abfallender Felsriegel, den die Leutasch in enger Klamm durchbricht. Auf 100 m hoher Stufe mündet das Leutaschtal in das Isartal. Ebenso wie die erwähnten Moränenablagerungen bringt diese Stufe zum Ausdruck, daß das Leutaschtal nur eine Nebenbahn des Eises in der Mittenwalder Enge gewesen ist. Aber die Stufenmündungen des Puiten- und Berglentales an seiner linken Flanke bekunden, daß es auch seinerseits übertieft ist.

Die Übertiefung der Mittenwalder Enge setzt sich nördlich des Tores eine Strecke weit fort. In stumpf endender Talweitung liegt Mittenwald; im Westen stürzt der Abfluß des Lautersees in der Lainauklamm herab, im Osten der Gassellahnbach in enger Schlucht. Die Runsen des Karwendelgebirges nehmen talabwärts an Tiefe und Breite bis 1200 m Höhe zu; dann werden sie wieder eng und schmal, und in engen Rinnen stürzen sich ihre Wildbäche zur Isar. Die einstige Erfüllung der Weitung mit interglazialen Bildungen ist bis auf unbedeutende Reste entfernt, welche gerade genügen, um deren früheres ausgedehnteres Vorhandensein zu erweisen. Da findet sich unter dem Kalvarienberge noch ein Rest interglazialen Seetones; 1924 war er in 6 m Mächtigkeit erschlossen. Ausgedehnte Reste von interglazialen Terrassenschottern liegen auch noch im Raineckwalde rechts der Isar, angelehnt an die interglaziale Viererspitzbreccie, auf die wir zurückkommen. Ein Vorsprung von Hauptdolomit schließt die Weitung nach Norden ab; Gletscherschliffe, nach Nordnordost gerichtet, steigen an ihm im Eisenbahnanschnitte auf. In seinem Schutze erstrecken sich unter den Mähdern die 1922 beschriebenen interglazialen Ablagerungen, welche die Isar am Horn in einem schleifenförmigen Bogen durchbricht. Darüber breiten sich mächtige Grundmoränen, deren langgedehnte Züge Endmoränenwälle vorgetäuscht haben. Doch machen Richtung und Zusammensetzung sicher, daß es sich um drumlinartige Formen handelt. Wie bei Seefeld und in der Leutasch also auch hier glaziale Zuschüttung und Konservierung interglazialer Gebilde in einem Gebiete der Eisausbreitung.

Nicht der gesamte Eisfächer unterhalb Mittenwald war ein Gebiet glazialer Akkumulation. Der Hohe Kranzberg bildet eine Rundhöckerlandschaft, in der nur stellenweise Moränenreste auftreten. Seine nordsüdlich streichende Rippung verrät sich aus der Entfernung durch Baumreihen. An seinem Ostfuße bezeichnet der seichte, 2—3 m tiefe, abflußlose Schmalsee einen Streifen geringer Erosion, und ein solcher zieht sich auch zwischen den drumlinartigen Rücken im Brunnentale in den Mähdern nordwärts, so daß hier Schotterausbisse auftreten. Ausgeschliffen ist der Weg, den das Eis zwischen Kranzberg und Wettersteingebirge eingeschlagen hat. Hier liegen der 18 m tiefe Lautersee (1011 m) und der 20 m tiefe Ferchensee (1060 m) zwischen Rundhöckern des Hauptdolomites; sie werden nicht von dessen geologischer Struktur maßgebend beeinflußt, welch letztere sich in den Seewänden unter dem Grünkopf so deutlich offenbart. Erst im Wettersteinwalde stellt sich die schon von Gümbel (2) als Hochgebirgsschotter kartierte Moränenbedeckung ein. Die genannte Tiefenlinie trägt den Charakter einer typischen Transfluenzstufe. Bereits der Ferchensee gehört in das Flußgebiet der Loisach, das hier dicht an die Isar heranreicht. Auch nach Norden erstreckt sich das Moränengebiet der Mittenwalder Mähder nicht bis an das Ende des Eisfächers. Wo derselbe die Höhen erreichte, welche das Längstal der Isar im Norden begleiten, fehlt schon oberhalb Wallgau die Moränendecke; postglaziale Schotter machen sich breit, und in einem vor ihrer Zuschüttung bewahrten Winkel erstreckt sich der 33 m tiefe Barmsee[1]. Am Fuße der Erhebung, an dem der tiefere Teil des Eisfächers nach Osten hin entlangglitt, sind wir wieder in einem Gebiete glazialer Erosion.

Glaziale Erosion und glaziale Akkumulation wechseln in gesetzmäßiger Weise auf dem Wege des vom Inngletscher abgezweigten Astes in den Kalkalpen. Wo das Eis gestaut war oder sich frei ausbreiten konnte, akkumulierte es, wo es mit steilem Gefälle dahinströmte oder auf ein Hindernis stieß, erodierte es. Es ist dieselbe Gesetzmäßigkeit, welche die Tätigkeit eines Flusses beherrscht, der sich das ihm passende Bett schafft. Diese Analogie ist um so bemerkenswerter, als unser Gebiet ganz und gar im Nährgebiet der Vergletscherung liegt, wo eine Moränenablagerung infolge oberflächlichen Schmelzens des Eises ausgeschlossen war und nur an der Sohle des Gletschers durch die Erdwärme geschehen konnte. Letztere verwandelt die im Eise eingefrorene, bewegte Untermoräne in abgelagerte Grundmoräne.

II. Der Zerfall der Vergletscherung und die glazialen Stauseen.

Ablagerungen aus der Zeit des Rückganges der letzten Vergletscherung sind in den großen Tälern der Bayerischen Alpen selten. Nur da und dort sieht man bei Mittenwald einen kleinen Ufermoränenwall, z. B. am Saume des Rehbergwaldes in 930 m Höhe oder auf der Felsterrasse an der Mündungsstufe des Gassellahnbaches, wo zwei kurze Wälle nebeneinander in 1020 m Höhe laufen. Die Art des Rückganges wird offenbart durch gelegentliche

[1] Die Tiefenangaben für Ferchen- und Barmsee danke ich Hrn. Lehrer Rob. Weyerer in Weilheim, die für den Lautersee beruhen auf eigenen Lotungen.

Terrassierung des Talgehänges. Solche finden wir namentlich an der rechten Seite der Talmündung des Seinsbaches. Über der Spitze von dessen Schuttkegel (1005 m) finden sich deutliche Absätze in 1018 m, 1053 m, 1083 m, 1105 m, 1150 m und 1170 m Höhe. Die obersten sind in den Felsen geschnitten; die tieferen bestehen aus losem Geröll, das durch den Fußweg nach der Vereinsalp bloßgelegt ist. Ihre Entstehung denken wir uns wie folgt: Als der das Isartal erfüllende Gletscher schwand, floß an seinem Rande das dem Seinstale entströmende Wasser in immer geringer werdenden Höhen entlang, den Felsen abwaschend oder Geröll anhäufend. Sechs seiner Bahnen haben sich in einem Höhenintervall von 150 m erhalten. Sie lehren, daß die Eisoberfläche hier ebenso quantenweise sank wie der Eisrand bei Innsbruck quantenweise zurückging (18, S. 104). Das eine setzt das andere voraus. Das allmähliche Herabsinken der Gletscheroberfläche wird auch durch zahlreiche Umfließungsrinnen am rechten Isartalgehänge gegenüber Wallgau angezeigt. Die Fußpartien von Seinskopf und Schöttlkarspitz fallen hier stufenförmig ab; an der einspringenden Kante der Absätze ziehen sich hier vielfach Rinnenstücke entlang, welche nur von Flüssen, die einem Gletscher entlang flossen, eingeschnitten sein können. Man kann sie bis über 1300 m hinauf verfolgen. Bestockung mit dichtem Walde hindert ihr näheres Studium.

Bei diesem quantenweisen Rückzuge zerfiel die große Vergletscherung schließlich in einzelne Teile. Zwischen denselben entstanden eisfreie Lücken, in denen glaziale Stauseen sich sammelten und Flüsse flossen, die unter den heutigen Bedingungen nicht entstehen konnten. Ihre Ablagerungen helfen den Zerfall erkennen. Er geschah auf den beiden Seiten des Eisfächers unterhalb Mittenwald in verschiedener Weise. Rechts löste sich sein Zusammenhang mit den aus dem Karwendelgebirge und seinen Vorbergen kommenden Zuflüssen; diese blieben noch längere Zeit hoch oben als selbständige Gletscher bestehen, nachdem aus dem Isartale das Eis geschwunden war. Links hingegen zerriß der Eisfächer; von dem im Isartale zurückbleibenden Gletscher löste sich der im Loisachtale befindliche gänzlich los und blieb eine Zeitlang für sich bestehen.

Das Gelände zwischen Isar- und Partnachtal nördlich vom Wettersteingebirge gibt Gelegenheit, diesen Zerfall näher zu verfolgen. Aus dem schwindenden Eise tauchte hier zunächst der Hohe Kranzberg (1392 m) auf. In dem von ihm nach Norden sich ziehenden Kreidenbachtale liegen lose Schotter, z. T. schräge geschichtet. In etwa 1060 m Höhe ist ihnen ein Tonlager eingeschaltet. Sie verraten einen See von rund 1100 m Spiegelhöhe. Ein solcher konnte nur existieren, wenn das Kreidenbachtal durch Eis im Norden verschlossen war. Ein tiefer gelegener, also jüngerer glazialer Stausee lag eine Zeitlang am Kranzbache selbst. Gerade gegenüber an der Mündung des Kreidenbachtales finden sich deutliche bis 1030 m ansteigende Schotterterrassen, auf dem ein im schottischen Stile erbauter Landsitz steht. Eine Kiesgrube bei der benachbarten Jagdhütte erschließt in gleicher Höhe Deltaschotter; gegenüber der Terrasse wird unter solchem an der Mündung des Kreidenbaches sogenannte Kreide, sehr feiner Kalkschlamm, ausgebeutet. Moränenbedeckung fehlt hier. Wir haben also auch am Kranzbache die Anzeichen eines glazialen

Stausees, der nur existieren konnte, wenn das abwärts gelegene Tal vom Eise verriegelt war. Mutmaßlich floß er gegen Westen zum Ferchenbach durch den Drüsselgraben ab, dessen scharf eingeschnittener, leicht gewundener Lauf gerade in der Höhe seines Spiegels beginnt. Am Kranzbache folgen wenig weiter abwärts am linken Ufer zwei große Kreidegruben. In der oberen wird der feine Kalkschlamm von zäher Grundmoräne mit vielen gekritzten Geschieben bedeckt, in der unteren wird er nach oben lediglich steinig. Nach diesen Lagerungsverhältnissen können diese Kreidevorkommnisse gleich der bereits 1922 erwähnten (23, S. 225) von Kaltenbrunn am Kankerbache in die Zeit des Herannahens der letzten Vereisung verweisen; es ist aber auch denkbar, daß die Grundmoräne des in nächster Nachbarschaft endenden Gletschers in den Stausee hineinfloß, oder daß jener sich gelegentlich in diesen hineinschob. Nach dem Gesamtauftreten der Ablagerung ist letzteres nicht ausgeschlossen. Mit den interglazialen Seetonen des Isartales können wir die Ablagerung nicht in Verbindung bringen.

Wie am Kranzbache gibt es an dem in entgegengesetzter Richtung fließenden Ferchenbache Stauseeablagerungen. Sie sind in der Talweitung von Ellmau erschlossen. Diese ist ein beim Gletscherrückgange verschüttetes Talstück und kann nicht mit Gehl als glaziales Zungenbecken angesprochen werden (15), in dem nach Levy (2, S. 75, 77) der Reintalgletscher eine Zeitlang endete. Schloß Ellmau steht in ihm auf einer Terrasse von 1010 m Höhe, deren Fortsetzung im Walde nordwestlich der Häuser von Ellmau liegt. Hier erschließt ein Anschnitt des Ellmauer Baches Deltaschotter, bis 1005 m reichend, unter flach gelagertem Geröll. Wir erhalten hier also den Beweis eines Sees von 1005 m Spiegelhöhe, der nur bestehen konnte, wenn das abwärts gelegene Ferchenbachtal verriegelt war. Dies kann aber nicht in nächster Nähe geschehen sein; denn unsere Schotterablagerung läßt sich auf dem rechten Gehänge des Ferchenbachtales bis in die Nähe des Laingrabens verfolgen. Sie bildet eine Reihe von Terrassenstücken, die sich von 1010 m Höhe auf 1000 m senken, gelegentlich sitzen sie auf Moräne auf, vielfach werden sie vom Gehängeschutt des Stellwagelskopfes (1280 m) bedeckt. Dieser Dolomitschutt unterscheidet sich deutlich von ihrem Wettersteinkalkgeröll. Auch am rechten Talgehänge liegen lakustre Ablagerungen. Bei Hintergraseck reichen Bändertone bis 960 m. Der sperrende Damm muß also weiter talabwärts gelegen gewesen sein. Man möchte ihn im Partnachtale suchen; aber auch hier finden sich Deltaschotter. Sie werden durch eine kleine Grube in 1010 m Höhe dort erschlossen, wo der vom Reintaler Bauern nach Partenkirchen führende Weg den Sulzgraben eben überschritten hat. Danach wäre auf eine Ausdehnung des Ellmauer Stausees bis ins Partnachtal hinein zu folgern; das stauende Eis müßte im Norden, in der Gegend der heutigen Partnachklamm, gelegen gewesen sein. Daß sich die lakustren Ablagerungen gerade in der Gegend von Ellmau so gut erhalten und der Charakter des Seebodens sich am unteren Drüsselgraben so gut zu erkennen gibt, hängt damit zusammen, daß der Ferchenbach beim Verlassen der Ellmauer Weitung auf Fels gestoßen ist, den er in einer epigenetischen Schlucht quert. Dies hat Gehl (15) richtig erkannt.

Am Kranzbache finden sich Hinweise auf eine noch tiefere Absperrung. Bei Klais quert er in 935 m Höhe die Furche, in der Eisenbahn und Landstraße Partenkirchen–Mittenwald die Wasserscheide Loisach–Isar überschreiten. Der Kranzbach ist hier in einen sich nach Westen zum Kankerbache hin senkenden flachen Schuttkegel wenig tief eingeschnitten. Auf dem Schuttkegel liegt der Bahnhof Klais. Bei seiner Erweiterung wurde sehr grober, an Wettersteinkalkgeröllen reicher Schotter angeschnitten. Der Kranzbach ist also einmal zu dem nach Partenkirchen fließenden Kankerbache übergeflossen. Das setzt voraus, daß er nicht wie heute nach Krünn zur Isar hin gelangen konnte. Nachdem der Eisriegel, der die Staubildung am oberen Kranzbache in 1030 m oberhalb Klais verursacht hatte, geschwunden war, bestand ein tieferer in mehr als 935 m unterhalb Klais, der den Kranzbach zwang, nach Westen umzubiegen. Grobes Kalkgeröll ist hier am Kankerbache mehrfach aufgeschlossen, z. B. oberhalb der Enge beim Hirschbichl (890 m), und bei Kaltenbrunn (860 m). Wie schon 1922 (23, S. 225) erwähnt, entwickelten sich dann weiter abwärts am Kankerbache zwei Schotterterrassen, die an seinem rechten Gehänge entlang ziehen. Die obere senkt sich von 860 m bis 810 m, die tiefere setzt nahe dem Ende der oberen in 810 m ein und erstreckt sich weiter nach Westen. Sie endet mit unruhigen Oberflächenformen in 750 m Höhe. Das Material beider Terrassen ist grobes, ziemlich unregelmäßig geschichtetes Geröll; Moränenbedeckung fehlt. Gegen ihr Westende hin zeigt die untere Terrasse schräges Fallen nach Nordwesten. Dagegen haben die Schotter am linken Gehänge bei Kainzenbad mit deutlicher Deltastruktur östliches bis nordöstliches Fallen. Sie bilden keine zusammenhängende Terrasse, sondern einzelne Sporne, auf deren Höhen gelegentlich kesselartige Vertiefungen auftreten. Diese Schotter reichen fast bis zum Eintritte der Partnach in die Garmisch-Partenkirchener Talweitung. Sie lehren, daß der Kankerbach in einen See mündete, in den auch von Westen her Schotter geschüttet wurde. Das kann nur ein Stausee hart am Rande eines in der Talweitung liegenden Gletschers gewesen sein.

Ganz ähnliche Schotter finden wir an der andern Seite der Talweitung auf dem Rücken zwischen dem Loisachtal und einem am Fuße des Krammer gegen den Herrgottschrofen ziehenden Tälchen. Sie lagern auf der dortigen interglazialen Nagelfluh, die unter ihnen glatt abgewaschen ist. Ihre Oberfläche zeigt mehrere Kessel von 10 bis 15 m Tiefe, wie sie in Schottern am Eisrande entstehen, die Eispartien verschüttet haben. Das Schmelzen der letzteren verursachte Einbrechen des hangenden Kieses. Wir haben also östlich Partenkirchen und westlich Garmisch Spuren eines Eishaltes. Schotter am Ausgange der Partnachklamm, am Anstiege des Weges zum Reintaler Bauern in 830 m und Schotter dicht neben der Klamm am Wege nach Vordergraseck erweisen auch, daß das unterste Partnachtal von jenem Gletscherhalte gestaut war. Es war nicht der Partnachgletscher, sondern der Loisachgletscher, der sich in der Talweitung von Garmisch-Partenkirchen ausbreitete. In 700 m bis 800 m Höhe endend, konnte diese Zunge nicht den See mit etwas über 1000 m Spiegelhöhe stauen, den wir im Partnach- und Ferchenbachtale kennengelernt hatten. Dieser See verlangte einen Damm von min-

destens 1000 m Höhe. Ufermoränen einer so hoch reichenden Gletscherzunge haben wir bei Partenkirchen nicht gefunden. Aber weiter talab gibt es Spuren eines entsprechenden Gletscherhaltes. Wie bereits früher berichtet (23, S. 225), sitzt auf der Höhe des Ettaler Berges (875 m) eine Ufermoräne des Loisachgletschers auf Deltaschottern, die in einen zwischen ihm und dem Ammergletscher gelegenen Stausee geschüttet worden sind, und weiter talab schlingt sich eine deutliche Endmoräne um das kleine Moos von Schwaiganger am Ostende des Murnauer Mooses (664 m; 7, S. 338). Sie verrät einen Halt des Loisachgletschers am Nordostende des Murnauer Mooses. Zwischen beiden Vorkommnissen ergibt sich ein Gefälle von 14°/₀₀, also weniger als der Loisachgletscher (22°/₀₀) während der Hocheiszeit auf dem Wege durch den Voralpenzug gehabt hat. Mit einem solchen Gefälle kommen wir bei Garmisch-Partenkirchen genau auf die Höhe von 1000 m, welche die das Partnachtal stauende Eismasse mindestens gehabt haben muß. Wir halten daher für wahrscheinlich, daß sie sich bis an das Ende des Murnauer Mooses erstreckt hat. Keinesfalls können wir sie mit der Randlage des Gletschers in Verbindung bringen, die wir bei Weilheim auf dem Alpenvorlande nachgewiesen haben (7, S. 337). Eine hier endende Gletscherzunge konnte nur über den Molasseriegel von Murnau gespeist werden, der sich auf 700 m erhebt und also noch von Eis in ansehnlicher Dicke überflossen gewesen sein müßte. Wenn wir diese auch nur zu 100 m annehmen, so kommen wir bei Garmisch-Partenkirchen zu einer entsprechenden Eishöhe von 1200 bis 1300 m, die, 500 m unter der hocheiszeitlichen gelegen, erheblich größer als die zur Stauung benötigte war und eine fast ununterbrochene Überflutung des Landes zwischen Partenkirchen und Mittenwald bedeutete.

Eine Gletscherzunge von 1000 m Höhe bei Partenkirchen lag 700 m unter der hocheiszeitlichen und konnte ziemlich weit in das untere Partnachtal hineindringen, das sich beiderseits der Klamm in 900 bis 1000 m etwas ausweitet. Auf diesen sanft U-förmig gebogenen Terrassenflächen wird die stauende Ausstülpung des Loisachgletschers geendet haben. Wie weit er in das Kankerbachtal eindrang, läßt sich nicht entscheiden. Mutmaßlich bestand hier noch ein Zufluß vom Isargletscher herüber, der von der andern Seite her den See im Kranzbachtale und, wie wir sehen werden, Seen auf der Nordseite des Karwendelgebirges staute. Später, als die Kranzbachwasser durch das Kankerbachtal zur Loisach flossen, existierte eine solche Verbindung nicht mehr. Damals war der Loisachgletscher bei Partenkirchen 1000 m unter die hocheiszeitliche Gletscheroberfläche, nämlich auf 750 bis 800 m herabgesunken, und der Isargletscher uferte bei Klais in mehr als 935 m Höhe, also höher als gleichzeitig der Loisachgletscher. Damals aber auch konnte dieser nicht mehr einen See im Partnachtale stauen, und ebenso konnte der schwächliche Isargletscher nicht mehr seine Nebenflüsse mit Erfolg abdämmen. Die Periode der Stauseebildung war vorüber. Sie erfolgte während der relativ kurzen Spanne Zeit, in der sich der Loisachgletscher vom Murnauer Moos bis Partenkirchen zurückzog.

Wo der Partnachgletscher endete, als der Loisachgletscher das Partnachtal staute, bleibt noch genauer festzustellen. Mächtige Moränen breiten sich

beiderseits der Mündung der Bodenlähne, im Spitzwalde und im unteren Schachentale. Sie ließen mich hier einen Gletscherhalt mutmaßen (7, S. 351). Reis (12, S. 79) gibt an, daß sie sich mit gerolltem Material und »Kreide« vergesellschaften. Danach scheinen hier ähnliche Verhältnisse obzuwalten wie im Seinsbachtal. Ich konnte die Gegend nicht neuerlich besuchen. Ein Wall, den das Positionsblatt Dreitorspitz in der rechten Flanke des Reintales unter dem Königshaus am Schachen angibt, sollte locken, hier einmal nach einer Endmoräne zu suchen.

Die Speisung des in der Garmisch-Mittenwalder Weitung liegenden, vom Isargletscher losgelösten Eises kann nur unbedeutend sein. Schon als das Eis unter die Hochfläche der Törlen eingesunken war, was gewiß eher geschah, als der Hohe Kranzberg auftauchte, konnte im Loisachtal nur ein schwacher Eisarm nördlich der Törlen vorbei in die Garmisch-Partenkirchener Weitung gelangen, und noch geringer mußte die Eiszufuhr gewesen sein, als die Eisoberfläche hier auf 1000 m und gar auf 700 m gesunken war. Sonst kommen als Nährgebiet nur die Nordwände des Zugspitzkammes sowie das Höllental in Betracht, ein kleines Nährgebiet für eine große Eismasse. Wir mutmaßen daher, daß unsere Talweitung nach Zerfall der großen Vergletscherung im wesentlichen von totem Eise erfüllt war. Damit steht das geringe Gefälle der Seen stauenden Zunge bis zum Murnauer Moose hin im Einklang.

Wie beim Schwinden der großen Vergletscherung nördlich des Wettersteingebirges zunächst noch Gletscher im Loisach- und Isartale bestehen blieben, so trennten sich beim weiteren Eisrückgange südlich des Wettersteingebirges die Gletscher des Isar- und Leutaschtales. Beide rissen an der Stufenmündung der Leutasch auseinander, und hier setzte die Wirkung des rinnenden Wassers schon ein, als in der Weitung von Mittenwald noch Eis lag. Schotter, deren fluvioglazialer Ursprung sich durch ihre Führung von teilweise abgewaschenen gekritzten Geschieben verrät, ziehen sich über der Leutasch längs der Straße durch die ganze Klamm hindurch. Bei der Kapelle an der Straße bilden sie einen förmlichen Moränenwall, der sich quer über eine alte Klamm (22, S. 205) legt, die von der heutigen durch ein Felsköpfchen getrennt ist. Man sieht die alte Klamm östlich von unserem Walle unter der Straße sowie westlich von ihm gegen die heutige Klamm hin. Mutmaßlich hat der Wall bewirkt, daß die alte Klamm außer Gebrauch gesetzt wurde. Aber der durch die neue Klamm angedeutete Lauf der Leutasch ist nicht erst daraufhin in Gebrauch genommen. Auch über der neuen Klamm ziehen sich Schotter zum Isartale. An diesem brechen sie ab. Weiter unterhalb deuten unregelmäßig geschichtete Geröllmassen an der linken Seite der Talweitung bei Mittenwald einen alten Flußlauf an, der am Eise entlang strömte. Möglicherweise war er die Fortsetzung der Leutasch.

Das zuletzt im Isartale befindliche Eis war sicher totes und gewiß außer Zusammenhang mit dem Inntaler Eis. Die allerhöchstens 1000 m Eis, die beim Maximum der Vergletscherung auf dem sonnigen Seefelder Paß gelegen haben, müssen rascher geschmolzen sein als die 1100 m Eis, die das schattige Tor von Mittenwald durchströmten. Zuvor schon muß sich der Zufluß des Eises über den Seefelder Paß sehr gemindert haben. Sobald sich

hier die Eisoberfläche unter 1500 m senkte, kann die Eisüberflutung des Passes keine einheitliche mehr gewesen sein. Die auf der Paßhöhe liegenden Berge, wie der Brunschberg (1510 m), wie Gschwend (1500 m), wie Hochmoos (1555 m) und Hochmähder (1510 m) mußten aus dem Eise auftauchen und dasselbe in mehrere, den Tälern folgende Stränge teilen, so daß das im Isartale eine viel geringere Speisung als zuvor erhielt. Das die Stauseen aufdämmende Eis war daher auch hier wahrscheinlich in ähnlicher Weise unterernährt und im Absterben begriffen wie das entsprechende des Loisachtales. Es ist ferner denkbar, daß das Zerreißen des Eises auf dem Paß schon eher erfolgte, als weiter unterhalb im weiten Tale des Drahnbaches noch ein bis zur Paßhöhe (1180 m) aufragender Eiskuchen vorhanden war.

Dieses Problem hat sich erst gestellt, als meine Untersuchungen im Felde abgeschlossen waren, und ich habe das Paßgebiet von Seefeld nicht mit der entsprechenden Fragestellung durchwandert. Aber seit langem kenne ich eine einschlägige Tatsache. Südwestlich von Seefeld zieht sich das Tal der Seewiesen in der Richtung auf Mösern. Hier finden sich schräge geschichtete Schotter, abgelagert von einem alten Gletscherbache, teils gelehnt an das Talgehänge, teils sich als »os«-ähnlicher Wall in der Talmitte ziehend. Sichtlich mündete der über die Möser Mähder noch gerade ins oberste Isargebiet hereinhängende Saum des Inngletschers hier in einen See von 1180 m Höhe, den man später durch Anlage eines künstlichen Dammes beim Seekirchl wieder ins Leben zu rufen trachtete, der aber als Naturgebilde nur bestehen konnte, wenn der Abfluß des Seebaches gehindert war. Dies konnte bewirkt werden, wenn weiter im Norden noch Eis gelegen war, das höher anstieg als bis zum niedrigsten Punkte des Passes.

III. Glaziale Stauseen und Rückzugsstadien.

Der Gletscherzerfall auf der rechten Seite des großen Eisfächers unterhalb Mittenwald geschah in der Weise, daß sich der Zusammenhang des Inntaler Eises mit den seitlichen Zuflüssen löste und sich dazwischen zeitweilig Stauseen bildeten. Typisch läßt sich diese Entwicklung im Gießenbachtale studieren, das, aus der Seefelder Gruppe kommend, stufenförmig in die Hauptbahn des Inntaler Eises, in das Drahnbachtal unterhalb Seefeld mündet. Die obere Partie des Tales, der landschaftlich entzückende Talzirkus von Eppzirl, ist stark vermurt. Sie entbehrt des oberirdischen Abflusses und wird unterhalb der Wiesen der Luxfalle von einem Dolomitriegel (1341 m) durchsetzt. An dessen Nordfuß sprudeln zahlreiche Quellen hervor. Sie speisen den von Südosten kommenden Gießenbach, der das untere Talstück durchmißt, anfänglich eingeschnitten in Schotter und Moränen, dann in einer Klamm die 100 m hohe Mündungsstufe durchmessend. Ampferer hat bereits die erwähnten Glazialbildungen beschrieben und eine Abbildung der von ihnen eingenommenen Talstrecke gegeben (10, S. 460, Taf. XII, Fig. 1). Wir ergänzen seine Darstellung in einzelnen Punkten (vgl. Fig. 2).

Die Klamm des Gießenbaches ist nicht im entferntesten so eng wie die Leutaschklamm. Man kann sie leicht passieren. Gleichwohl folgt ihr der

Talweg nicht. Er steigt vielmehr am Abfalle der Mündungsstufe ziemlich steil an und biegt dann in eine Furche ein, die mit Grundmoräne ausgekleidet ist. Sie ist eine alte Klamm von allerdings nur geringer Tiefe. Mit leichtem Abstieg führt der Weg von der Stufenhöhe zum Bache herab und erreicht mächtige, unregelmäßig geschichtete, vornehmlich aus Dolomit bestehende Schotter (Su), die das Tal in mehr als 40 m Mächtigkeit erfüllt haben. Man kann sie ebensogut als Ausläufer der interglazialen Verschüttung des Isartales auffassen (22, S. 198) wie als eine Talverbauung an den Flanken des über den Seefelder Paß hinwegflutenden Eises. Über unsere Schotter breiten sich Grundmoränen (M), die durch zentralalpine Geschiebe ihre Inntaler Herkunft erweisen. Ampferer hat dargetan, daß das Inntaler Eis nicht etwa

Fig. 2.

Profil durch das Gießenbachtal, Höhe 1 : 10000, Länge 1 : 25000.

D Hauptdolomit. Su Untere Schotter. M Grundmoräne.
T Seeton. B Blocklage. So Dolomitschutt und hangender Schotter.

bloß von unten her in das Gießenbachtal eindrang, sondern daß es diesen linken Seitenkamm vom Seefelder Joche an überflutete und ostwärts sich bis zur Oberbrunnalpe erstreckte. Es legte sich quer vor den Talkessel von Eppzirl und drückte dessen Eis ganz zur Seite. Bis über den Dolomitriegel ist es aufwärts vorgedrungen, wie ein kristallines Geschiebe nördlich der Luxfalle bezeugt.

Wie Ampferer bereits dargetan, stammen die zahlreichen kristallinen Geschiebe im Gießenbach aus den erwähnten Grundmoränen her. Gleichen Ursprunges ist eine Blocklage im Hangenden der Moränen an der Basis einer jüngeren Schotterlage. Eine Strecke weit bilden Grundmoränen allein die Talverbauung, stellenweise werden sie von talaufwärts fallenden Schottermoränen ersetzt, und von etwa 1175 m Höhe stellen sich in ihnen Seetone (T) ein, welche allmählich die Moränen ersetzen und über 1200 m Höhe herrschend werden. Diesen lakustren Ablagerungen fehlt heute ein Riegel, der ihre Entstehung plausibel machte. Er ist geschwunden. Der allmählich sich vollziehende Übergang der Grundmoränen in die Tone macht sicher, daß er aus Eis bestand, und ihre Beschaffenheit vergewissert uns, daß es Inntaler Eis war. Sie gleichen der tonigen Grundmasse der Grundmoräne. Über den Seetonen lagert eckiger Dolomitschutt (So), den der Gießenbach herbeigefrachtet

hat. Er breitet sich über das ganze Gebiet des Stausees, erreicht an dessen oberen Ende 60 m Mächtigkeit, ist aber wesentlich jünger. Er zeigt nirgends Deltaschichtung. Nirgends fanden sich Moränen auf den lakustren Tonen. Letztere gehören also in die Zeit des Schwindens der Vergletscherung, als diese nicht mehr den 1500 m hohen Kamm westlich vom Gießenbachtal zu überfließen vermochte, sondern auf 1200 m bis 1300 m ansteigend lediglich dessen Mündung verriegelte.

Spuren ähnlicher glazialer Stauseen finden sich unterhalb Mittenwald in den vom Nordabfalle des Karwendelgebirges kommenden Tälern des Gassellahn-, des Seins- und des Fermersbaches. Aber im Gegensatz zu den bisher betrachteten werden sie von Moränen bedeckt und erheischen daher eine gesonderte Betrachtung.

Wir begeben uns zunächst in das Tal des Gassellahnbaches, dessen obere Verästelungen als Kälberbach in den Wänden der nördlichen Karwendelkette zwischen Wörner- und Tiefkarspitze wurzeln, und zu dem vom Dammkar durch die obere Ochsenalp und die untere Kälberalp ein Tal herabzieht. Wo letzteres mündet, findet sich Bänderton in 1100 m Höhe. Wie der des Gießenbaches lagert er auf zäher toniger Grundmoräne auf. Aber er wird bedeckt von grobem Kalkschutt, der zur Endmoräne eines alten von Ampferer (8, S. 240) zuerst erwähnten Dammkargletschers gehört. Östlich der unteren Kälberalp baut er in 100 m Mächtigkeit eine Terrasse auf, zu der vom Mittereck zwei Ufermoränen herabziehen; westlich der Alp bildet er einen 500 m langen, Eisenbahndamm ähnlichen Wall, in dem wir in rund 1200 m Höhe einige zentralalpine Gerölle fanden. Es liegt hier eine prachtvoll alte Ufermoräne des alten Dammkargletschers vor, der, zwischen westlicher Karwendelspitz (Mitterkreuz 2385 m) und Tiefkarspitz (2431 m) wurzelnd, bis 1100 m herabreichte. Neben diesem Dammkargletscher lag ein Tiefkargletscher, der in rund 1200 m Höhe den Kälberalplbach erreichte und neben demselben in dem vom Tiefkar kommenden Tälchen mächtige Moränen aufschüttete. Auch am oberen Kälberalplbache hinterließ eine von den Wörnerwänden herabkommende Eiszunge Moränen in 1350 m Höhe. Drei Lokalgletscher endeten also zeitweilig nebeneinander im Gebiete des Gassellahnbaches. Zwei von ihnen hinterließen mächtige Endmoränen. Die der untersten sitzen auf den Ablagerungen eines alten Sees auf, der nach seiner Lage nur als glazialer Stausee gedeutet werden kann.

Der Seinsbach wurzelt gleichfalls am Nordabfalle des Karwendelgebirges, und zwar östlich vom Gassellahnbache. Das zwischen Wörnerspitz (2477 m) und Hochkarspitz (2483 m) gelegene Wörnerkar gehört zu seinem Einzugsgebiet, aber sein Lauf ist zwischen Vereinsalp und Isar im wesentlichen westwärts gerichtet. Steigen wir an ihm aufwärts, so gehen wir längs einer Mündungsklamm entlang. Wo der von Norden kommende Lausgraben mündet, weitet sich das Tal ein wenig, und hier quert der Lausgraben unmittelbar, bevor er den Seinsbach erreicht, unter der Ochsenalp (1176 m) eine verschüttete Schlucht. Sie ist etwa 20 m hoch mit grobem Geröll erfüllt, darüber folgt in 20 m Mächtigkeit Seeton, der nach der Art seines Auftretens als glaziale Stauseebildung aufzufassen ist, und schließlich von 1150 m Höhe

an Moräne. Am Fuße des Aufschlusses wurde im Bachbett ein kristallines Geschiebe gefunden, das einzige im Seinsbachtale.

Gegenüber erschließt eine Reiße eine sehr mächtige Schuttablagerung, die bis etwa 1250 m heraufreicht. Seltene deutlich gekritzte Geschiebe machen sicher, daß wir es mit der mächtigen Moräne eines alten Gletschers zu tun haben, der, aus dem Wörnerkare kommend, sich am Seinsbache abwärts erstreckte. Sie ist der Vorposten einer zusammenhängenden Moränenerfüllung, die sich 1 km weiter oberhalb von der Mündung der Reißenden Lahn an einstellt und sich über die Paßhöhe der Vereinsalp hinüber bis ins Quellgebiet des zum Fermersbache gehörigen Moosgrabens erstreckt. Der Seinsbach schneidet, bevor er an der Mündung der Reißenden Lahn in eine enge felsige Schlucht eintritt, gegen 100 m in diese Moränenerfüllung ein, die an seinem linken Gehänge in 1340 bis 1380 m Höhe eine deutliche Terasse bildet. Zusammengesetzt wird diese mächtige Ablagerung aus Moränen und Geröll, die sich nicht scharf voneinander scheiden. Doch halten sich die Moränen mehr in den hangenden Partien, die selteneren Schotter mehr in den liegenden. Letztere zeigen stellenweise — in etwa 1340 m Höhe — deutliche Deltastruktur, nach unten gehen sie in Seetone über, der in 1250 m Höhe den Sockel des ganzen Komplexes bildet. Man erhält den Eindruck einer typischen Talverbauung. Oberflächlich stellen sich auf ihr — etwa 800 m oberhalb der Mündung der Reißenden Lahn — deutliche Moränenwälle ein. Sie gehören zu einem aus dem Wörnerkar gekommenen Gletscher, der sich auf der Vereinsalpe hammerförmig ausbreitete, ein Ende am Seinsbache entlang bis etwa 1350 m nach Westen, ein anderes bis zu den Alphütten (1395 m) nach Osten streckte. Man kann mehrere Wälle unterscheiden, zwischen denen sich ein Seelein befindet. Auf dem am weitesten nach Norden gerückten stand das großherzoglich luxemburgische Jagdschloß; der benachbarte innere zeigt eine sehr deutliche nach Osten gerichtete Krümmung. Auf dem östlichsten Moränenwalle stehen die Häuser der Vereinsalp. Von hier zieht sich im Tal des Fermersbaches eine Schotterablagerung herab. Der Moosgraben und weiter abwärts namentlich der Sandbach erschließen in 1200 bis 1360 m Höhe schüttiges, sandiges Material, das dann und wann durch ein gekritztes Geschiebe seinen fluvioglazialen Ursprung erweist. Die Schichtung ist flach. Die Ablagerung ist nicht in einen See geschüttet. Sie stellt wohl den rechten steilen Übergangskegel des auf der Vereinsalp endenden Gletscherastes dar.

Die geschilderten Verhältnisse weichen in mancher Hinsicht von denen am Gassellahnbache ab. Zunächst darin, daß die Seetone an der Ochsenalp nicht auf Moränen, sondern auf Schotter aufsitzen. Die Schichtfolge Seeton auf Schotter wird sich entwickeln, wenn ein Tal allmählich vom Eise verriegelt wird. Sie ist charakteristisch für das Herannahen und nicht für das Schwinden einer Vergletscherung. Wir sind daher geneigt, den durch die Seetone an der Ochsenalp angezeigten Stausee mit 1150 m Spiegelhöhe in die Zeit des Herannahens einer Vergletscherung zu verweisen. Die Schichtfolge oberhalb der Mündung der Reißenden Lahn dagegen erinnert an die an der Einmündung des Dammkargletschers ins Gassellahntal. Aber während dort Endmoränenwälle auf den Stauseetonen aufsitzen, erscheinen letztere hier zunächst als

Basis einer Talverbauung mit ziemlich ebener Oberfläche. Erst weiter aufwärts künden Endmoränen einen Halt im Gletscherrückgange. Schon deren enge Verknüpfung mit der Terrasse macht wahrscheinlich, daß auch diese in die Zeit des Eisschwindens gehört. Unabweislich wird eine solche Folgerung bei der Annahme von H. v. Wolf, daß zentralalpines Geschiebe über den Sattel der Vereinsalp gefrachtet worden sei, wovon allerdings, wie erwähnt, keine Spur zeugt, denn das, was wir sehen, sind die Moränen des aus dem Wörnerkar kommenden Gletschers. Dieser müßte sich auf dem Sattel breitgemacht haben, als das zentralalpine Eis hier geschwunden war, und müßte ihm dann im Seinsbachtale bis zur Mündung des Lausgrabens nachgestoßen sein. Doch konnte er ihm nicht auf dem Fuße folgen, sondern es rissen zwischen ihm und dem sich zurückziehenden Eise Löcher auf, in denen sich in wechselnder Höhe Stauseen sammelten. Nach seinem Vorstoße von mehr als 5 km müßte sich der Wörnergletscher wieder auf die Höhe der Vereinsalpe zurückgezogen haben und hier eine Zeitlang stationär geblieben sein, Moränenwälle zwischen 1350 m und 1400 m aufbauend.

Einfacher gestalteten sich die Verhältnisse, wenn wir nicht an einen Strang zentralalpinen Eises glauben, der über den Sattel der Vereinsalp kam, sondern annehmen, daß der Sattel immer von kalkalpinem Eis bedeckt war, das, an den mächtigen Gletscher des Fermersbachtales gelehnt, den Mittenwalder Eisfächer hinderte, in letzteres einzudringen. Dann haben wir nur an einen Vorstoß dieses kalkalpinen Eises um etwa 1 km zu denken. Ohne einen solchen Vorstoß nach dem Zerreißen von Haupt- und Nebengletscher können wir die Verbauung am oberen Seinsbach nicht verstehen.

Am großartigsten sind die Stauseeablagerungen im Tale des Fermersbaches entwickelt, das gegen Vorder-Riß sich ziehend, im Verein mit dem Seinsbach- und Isartal die Soierngruppe umklammert. Es wurzelt gleichfalls unter den Wänden des Karwendelgebirges zwischen Hochkarspitz und Bärenalpl. Mit 1138 m Höhe setzt bei der Brandelalpe ein förmlicher Damm quer über das Tal (Fig. 3). Fast in seiner gesamten Höhe von 80 m wird er aus delta-

Fig. 3.

Das Delta der Brandelalp 1 : 10000.
.... Wälle von Kalkblöcken und Schotter. B = Bänderton. M = Moräne (aufgearbeitetes Neokom).
Schräg-schraffiert = Neokom.

artig geschichteten Schottern (S) und eingeschalteten Seetonen (B) aufgebaut, die auf Neokommergeln aufsitzen. An der Grenze gegen dieses Liegende lagern große Blöcke jener Mergel in einer grünlichen Grundmasse (M). Das Ganze erinnert an Geschiebelehm. Gekritzte Geschiebe finden sich darin ebenso wie in den Tonen im Schotter. Das Material ist rein kalkalpin. Aufgesetzt dieser Ablagerung sind niedere Blockwälle oder Reihen von groben Kalkblöcken. Sie

verraten einzelne Randlagen eines Talgletschers, der auf dem lakustroglazialen Sockel endete. Aufschlüsse weiter abwärts, namentlich an dem dicht unterhalb der Brandelalp mündenden Bache, zeigen unten Schotter wieder auf Neokom gelagert, darüber Seetone mit gekritzten Geschieben; die Tone lassen sich noch bis Höhenzahl 1089 m verfolgen und verlieren sich dann. Talaufwärts bricht die Ablagerung jäh ab.

Unser Profil zeigt, daß die Ablagerung an der Brandelalp wie keine zweite in den Alpen der finnischen Salpausselkä gleicht. In der Tat stellt sie gleich derselben eine subaquatische Endmoräne dar, abgelagert in einem See, der das Fermersbachtal zeitweilig wenigstens bis mindestens 1110 m erfüllte[1]. Hier wie da lehnen sich an die distale Seite mächtige Tone, fällt die proximale Seite steil ab gegen eine Weitung, in welcher zur Zeit ihrer Entstehung das Eis lag. Ein See von 1110 m Spiegelhöhe im Fermersbachtale kann nur ein glazialer Stausee gewesen sein, dadurch entstanden, daß das Tal weiter unterhalb durch einen Eisriegel verschlossen war. Dieser aber konnte vom Isargletscher gebildet werden, der in das Rißgebiet eindrang.

Wie am proximalen Abfalle der Salpausselkä liegt oberhalb des Dammes der Brandelalp ein altes Gletscherbett, das Tal weitet sich auf, seine Entwässerung geschieht östlich der Brandelalp in epigenetischer Schlucht, welche zur Anlage einer Klause gelockt hat. Es ist ein kurzer Halt des Gletscherrückzuges, der hier festgelegt ist. Einen längeren verraten die drei großartigen Ufermoränen, die sich erst 2.5 km weiter oberhalb am Hufachgraben, einer der Wurzeln des Fermersbachtales, einstellen. Sie begrenzen unterhalb des Hufachbodens das Ende eines bis 1200 m herabreichenden Gletschers, der vom Abfalle der Hochkar- (2441 m) und Raffelspitz (2324 m) ausging. Ein etwas kleinerer Gletscher hat gleichfalls im Quellgebiet des Fermersbaches weiter östlich im Bereiche des Wechselbodens unter der Schlichtspitze gelegen; wir kennen Moränen von ihm in 1376 m Höhe. Wahrscheinlich reichte er bis unter 1300 m Höhe herab.

Die Glazialerscheinungen im Fermersbachtale zeigen nahezu die gleiche Anordnung wie die am Seinsbache. Wir erkennen einen Vorstoß eines Kalkalpengletschers, der groß gewesen sein muß, wenn zentralalpines Eis über die Vereinsalp geflossen ist. Denn letzteres mußte auch das obere Fermersbach-

[1] Dieser See hat nichts mit einem solchen im untersten Rißtale zu tun, auf den wir aus den dort — zwischen Fermersbach- und Fischbachmündung — von H. v. Wolf (28, S. 269) beobachteten schräge geschichteten, nordwärts fallenden Schottern schließen; denn diese werden bereits in 850 m Höhe von horizontal geschichteten überlagert. Der See im unteren Rißtale hatte also nur 850 m Spiegelhöhe und muß auch als ein Stausee betrachtet werden, den das noch im Isartale bei Vorder-Riß lagernde Eis auftaute. Er ist also jünger als der Stausee im Fermersbachtale. Daß es sich um einen Ausläufer der im Isartale auftretenden interglazialen lakustren Ablagerungen handelt, ist nach der Beschreibung H. v. Wolfs nicht anzunehmen. Dagegen ist nicht unmöglich, daß die Schichtfolge an der Brandelalp ihr Seitenstück in den postglazialen Schottern im Längstale der Riß findet. Dieselben sind in der Gegend des Alpenhofes auf der rechten Talseite unten recht unregelmäßig geschichtet, darüber folgen flach geschichtete Partien, denen ein zerschnittener Schuttkegel aufsitzt. Man kann hier an Ablagerungen eines glazialen Stausees denken, der sich vor einer ähnlich weit in das Rißtal eindringenden Zunge des Isargletschers erstreckte, wie der Stausee im Fermersbachtal. Möglich ist, daß Eisschollen, die auf jenen Stauseen trifteten, zentralalpines Geschiebe weiter in das Rißgebiet frachteten, als es der Gletscher tat.

tal passieren. Rühren die unterhalb des Dammes der Brandelalp am Wege zur alten Klause auftretenden zentralalpinen Geschiebe von ihm her, so müssen sie weiter oberhalb durch das vom Nordabfalle der Karwendelkette vorstoßende Eis vollständig ausgeputzt worden sein. Mindestens 2 km war der Vorstoß des Karwendeleises bis zur Brandelalp. Später zog es sich wieder um 2.5 km zurück und blieb neben dem Wörnerkargletscher als Hufachgletscher noch längere Zeit stationär. Glauben wir aber nicht an den unerweisbaren Übergang zentralalpinen Eises über die Vereinsalp, so handelt es sich an der Brandelalp nur um einen sehr unbedeutenden Vorstoß des Gletschers über seine eigenen, in einen See geschütteten Anschwemmungen; auf den Vorstoß, ob groß oder klein, folgte ebenso wie im Seinsbachtale ein Gletscherhalt in engeren Grenzen. Beide Vorgänge haben sich auch im Gassellahnbachtale abgespielt. Die in der linken Ufermoräne des Dammkargletschers auftretenden kristallinen Geschiebe können nicht anders gedeutet werden, als daß auch er in das Bereich zentralalpinen Eises vorstieß, wobei er sich über einen glazialen Stausee erstreckte. Darauf blieb er eine Zeitlang stationär. Dies erfolgte dort, bis wohin der Gletscher vorher vorgestoßen war, während am Seinsbache und Fermersbache sich Vorstoß und stationäres Verweilen deutlich voneinander scheiden. Diese Tatsache veranlaßt uns, beides gesondert zu betrachten.

Jedes stationäre Verhalten eines Gletscherendes weist auf eine gewisse Konstanz klimatischer Verhältnisse. Ein Gletschervorstoß aber braucht nicht notwendigerweise auf eine Verschlechterung des Klimas zurückgeführt zu werden, sondern kann auch Folge des Gletscherzerfalls sein. Dies wird uns klar, wenn wir uns das Verhältnis eines Haupt- und Nebengletschers bei einer großen Vergletscherung vorstellen. Der Hauptgletscher strömt hoch angeschwollen in den Hauptbahnen der Eisbewegung und staut die aus den kleinen Nebentälern kommenden Gletscher neben sich hoch auf. Beginnt er abzuschmelzen, so läßt seine stauende Wirkung auf die Nachbarn nach, und diese fließen ihm nunmehr wegen gesteigerten Oberflächengefälles rascher zu, dabei vorstoßend, was sich noch fortsetzen kann, wenn der Zusammenhang zwischen ihnen und dem Haupttalgletscher geschwunden ist. Die Vorstöße, die das Eis des Dammkar-, Seinsbach- und Fermersbachtales während des Rückzuges der Vergletscherung gemacht hat, tragen alle Kennzeichen eines derartigen mechanischen Vorstoßes. Ein solcher steht unter starker Beeinflussung durch orographische Gegebenheiten. Er vollzieht sich daher ebensowenig wie die Zerreißung des Gletschers gleichzeitig, und die Stauseebildung ist nicht synchron.

Dagegen haben wir alle Ursache, anzunehmen, daß die von gewaltigen Endmoränen umgebenen Enden der vom Dammkar und vom Wörnerkar kommenden und des im Hufachboden lagernden Gletschers synchron sind und ein bestimmtes Stadium im Rückzuge der Vereisung darstellen, denn ähnliche Endmoränen wiederholen sich in gleicher Höhe in den Nachbartälern. Östlich vom Fermersbachtal lagen unter dem Nordabfall der Vorderen Karwendelkette noch zwei ansehnliche Gletscher. Vom Fuße der östlichen Karwendelspitz (2539 m) erstreckte sich im Rontal ein Gletscher bis zur großen, mit riesigen Blöcken überstreuten Endmoräne unterhalb der Ronalpe auf 1200 m herab. Ampferer hat sie bereits zutreffend charakterisiert (8, S. 226).

An der linken Flanke des von den gewaltigen Torwänden ausgehenden Tortales zieht sich bis zur Tortal-Hochlegeralp ein deutlicher Ufermoränenwall empor, der, begleitet von einer Reihe riesiger Blöcke, zwischen 1200 und 1600 m Höhe ungemein deutlich zu erkennen ist. Auch diese Gebilde hat Ampferer kurz erwähnt (8, S. 225). Weiter gegen Osten folgen ansehnliche Reste von Lokalgletschern in den drei Tälern, die sich von den Felswänden der Hinteren Karwendelkette zur Riß ziehen. Sie sind von Ampferer gleichfalls bereits beschrieben worden (8, S. 222). Schwärme von Ufermoränenwällen ziehen sich im Ladizer Walde zum Johannistal herab und umrahmen einen alten bis 1200 m herabreichenden Gletscher, der seine schüttigen Endmoränen über ältere Grundmoränen breitete. Die Ladizalp liegt außerhalb, der Weg vom kleinen Ahornboden zum Spielisjoch läuft innerhalb dieser Ufermoränenlandschaft, die auf der anderen Talseite ein Gegenstück hat. Bis zum Spielisjoch (1776 m) reicht sie unter der Laliderer Spitz (2596 m) herauf. Höher noch muß das Eis am Fuß der Wände gestanden haben. Unter den Laliderer Wänden hängt im Laliderer Tale vom Spielis- und vom Hohljoche ein Wallpaar bis zum Laliderer Niederleger (1500 m) herab; tiefere Moränenwälle erwähnt Ampferer vom Gumpen-Niederleger (1149 m) und der Auerl-Alpe (1100 m; 8, S. 219). Ich habe das Tal nicht begangen. Unter den Wänden der Grubenkar- (2662 m), Spritzkar- (2609 m) und Eiskarspitz (2624 m) endlich lagerte ein Gletscher längere Zeit und reichte mindestens bis zur Engalpe (1216 m), zu welcher sich auf der linken Seite des engen Grundbaches eine Ufermoräne herabzieht. Der große Ahornboden scheint die zugehörige Schotterfläche gewesen zu sein. Die weiter abwärts folgenden, von Ampferer (8, S. 215) gleichfalls erwähnten Moränen an der Hagelhütte tragen bereits den Typus der Grundmoränen des Rißtales.

Alle diese alten Gletscher des Vorderen und Hinteren Karwendelgebirges gehören einem Typus an, wie er heute in den Alpen nur selten vorkommt. Sehen wir vom Damm- und Mitterkargletscher ab, so lagern alle am Fuße steiler Felswände, die sie durch Lawinen speisten. Eigentliche Firnfelder hatten sie nicht oder nur im beschränkten Umfange. Alle dehnten sich auf der Schattseite des Gebirges und entwickelten sich unter besonderer orographischer Begünstigung. Es kann daher die Frage entstehen, ob der von ihnen angezeigte Halt im Rückzuge der Vergletscherung nicht bloß Folge orographischer Begünstigung sei. Hiergegen spricht die Tatsache, daß wir bei den meisten dieser Gletscher mit Ampferer (8, S. 178) zwei besondere Stadien ihrer Entwicklung unterscheiden können: ein größeres, währenddessen sie auf 1100—1300 m Höhe herabreichten, und ein kleineres, als sie in 1500—1600 m Höhe und darüber endeten. Zwischen beiden Stadien schalten sich allerdings noch weitere Moränenwälle ein, aber diese halten sich durchweg an die Nachbarschaft der unteren. Eine deutliche Lücke klafft zwischen der obersten von ihnen und dem oberen Stadium. Das sieht man besonders deutlich am Hufachboden. Längst hat man die Ufermoränen verlassen, welche sich als lange, Block überstreute Wälle an der rechten Seite des Hufachgrabens entlangziehen, bevor man eine modellartige Endmoränenlandschaft beim Thomasalpl erreicht, deren Ampferer (8, S. 285) be-

reits gedacht hat. Ganze Gruppen von Latschen bewachsenen Wällen umkränzen hier eine alte Gletscherzunge in 1650 m Höhe. Allerdings fehlt dieses Stadium in nächster Nachbarschaft unter den Wänden der Raffelspitz (2324 m) — hier ist es offenbar unter mächtigen Schutthalden begraben —, aber wenig weiter ostwärts setzt es unter der Bärenalplspitz (2304 m) wieder ein; und fast ununterbrochen zieht sich von hier am Hals vorbei ein Endmoränenwall an steilen Felswänden entlang bis zum Fuße der Vogelkarspitz (2524 m), wo er zungenförmig bis 1585 m herabhängt. Unter den mächtigen Schutthalden des Wörner heben sich bei 1650 m zwei Wälle hervor, die sich ufermoränenähnlich gegen die Wörnerlähne herabziehen. Am Nordwestfuß der Wörnerwände selbst liegen auf einer Dolomitrippe Blockreihen, die am Fuße eines bis 1830 m Höhe herabreichenden Schneefleckens angehäuft worden sein dürften. Weiter westlich zeigt am Rande des Mitterkares ein Wallpaar in 1630—1670 m eine schmale Gletscherzunge an. Entsprechendes sehen wir im Schatten der Hinteren Karwendelkette auf der Ostseite des Hochalpsattels. Da begleitet ein Endmoränenwall in 1740 m Höhe den Nordabfall des Kammes, der vom Hochalpenkreuz (2198 m) zu einem nördlichen Vorgipfel der Birkkarspitz (2502 m) ansteigt.

Wenn orographische Begünstigung die alleinige Ursache der mit so großer Regelmäßigkeit wiederkehrenden Gletscherstadiums wäre, dessen Enden wir zwischen Mittenwald und der Eng in 1100—1300 m Höhe begegnen, dann wäre nicht einzusehen, warum eben dieselben Felswände, an die sich Gletscher von solchen Maßen lehnten, auch die alleinige Ursache vom Verbleiben wesentlich kleinerer gewesen wären. Beide Gletscher, die größeren und kleineren, setzen bei gleicher Exposition verschiedene Höhen der Schneegrenzen voraus. Die der größeren muß höher als 1776 m gelegen gewesen sein, denn so weit reichen die Ufermoränen am Spielisjoch. Kleine Gletscherchen reichen heute von der Eiskarlspitz (2624 m) auf 2200 m herab und verraten, daß die gegenwärtige Schneegrenze im Karwendelgebirge bei Nordexposition unter 2500 m liegt. Danach setzen die größeren unter unseren Lokalgletschern eine Depression der Schneegrenze von weniger als 700 m voraus. Wir können sie daher nicht zum Bühlstadium rechnen, das eine Depression von 900 m verlangt, und können sie unbedenklich zum Gschnitzstadium stellen, von dessen Depression der Schneegrenze (600 m) die ihre gewiß nicht weit abweicht. Für die Einordnung der höheren Endmoränen unter den Karwendelwänden in die glaziale Chronologie haben wir nur folgenden festen Anhaltspunkt: Die zugehörigen Ufermoränen liegen am Nordwestfuße des Wörner in mehr denn 1800 m Höhe, und höher muß die zugehörige Schneegrenze angesetzt werden. Nun liegen aber innerhalb unserer höchsten Endmoränen im Wörnerkare und beim Thomasalpl perennierende Schneeflecken in nur 1900—2000 m Höhe, in denen Spalten aufreißen. Eine geringe Herabdrückung der heutigen Schneegrenze würde daher genügen, um die Gletscher der hochgelegenen Endmoränen wieder herzustellen. Wir weisen sie daher dem Daunstadium zu, dessen Endmoränen sich ja allenthalben in den Alpen in der Nachbarschaft der heutigen Gletscher halten.

Zwei der drei Rückzugsstadien, zu deren Feststellung die Untersuchung der Alpen im Eiszeitalter geführt hat, sind also in unserem Gebiete vorhanden. Beide sind jünger als der Zerfall der Vergletscherung; denn im Fermersbachtale liegt der fluvioglaziale Damm der Brandelalpe unterhalb der tiefsten Gschnitzmoräne des Hufachbodens, und im Gassellahnbachtale sitzen die Moränen des Gschnitzstadiums auf den glazialen Stauseetonen auf, sind also gleichfalls jünger. Dieses Ergebnis erfährt eine Bestätigung durch folgendes: Außerhalb des Bereiches der Gletscher des Gschnitzstadiums trifft man im Soierngebiet gewaltige Schuttmassen an Stellen, wo sich heute solche nicht mehr ablagern; so z. B. an der Westflanke des Seinskopfes, nördlich vom Schöttlkar im Laingraben mit seinen Seitenästen, dem Schöttlalpl- und Kaltwassergraben, endlich am Lausgraben. Sie werden von den Bächen, die sie aufgeschüttet haben oder längs derer sie aufgeschüttet worden sind, zerschnitten und streichen an ihnen in Mächtigkeit von 20 bis 30 m aus. An der Reißenden Lahn reichen sie bis dicht an die Moränen heran, welche das Seinsbachtal unterhalb der Vereinsalp erfüllen. Hier sieht es aus, als seien sie an den Flanken des Eises abgelagert, das sich im Seinsbache erstreckte, unmittelbar bevor dasselbe den durch die Endmoränen auf der Höhe der Vereinsalp angedeuteten, zum Gschnitzstadium gehörigen Halt machte. Das Bett der Reißenden Lahn nämlich führt nicht direkt zum Seinsbache herab, sondern ist neben demselben verschleppt. Das letzte Stück ihres Laufes führt über Fels, während wenig weiter oberhalb sich am Seinsbache nur Schutt oder Moräne findet. Endlich fügen sich die Schuttmassen, die bei der Vereinsalp von letzterem Rückzugsstadium ausgehen und zum Fermersbach herabziehen, ganz in den Rahmen unserer Schuttbildungen. Wir stellen diese daher ins Gschnitzstadium. Sie treten aber auch mit der von mir als postglazial beschriebenen Terrasse des Isartales in engsten Konnex. Am Felsengraben gegenüber dem Dorfe Krünn sitzt ein Kegel unseres Schuttes der Terrasse auf, und sein Material verzahnt sich mit dem ihrigen. Am Markgraben ersetzt unser Schutt sichtlich Terrassenschotter (22, S. 190). Aus all diesen Gründen bringe ich heute die postglaziale Terrasse des Isartales, entgegen meiner früheren Ansicht (22, S. 197), mit einer Phase des Eiszeitalters in Verbindung und erachte sie für eine Aufschüttung aus der Zeit des Gschnitzstadiums. Wenn dies zutrifft, kann natürlich während desselben unten im Isartale kein Eis mehr gelegen gewesen sein, das benachbarte Täler aufstaute.

Einzelne Rückzugsstadien der Vergletscherung finden sich auch sonst im Gebirge. Die der Soierngruppe hat H. v. WOLF (28, S. 264) kürzlich erwähnt. Ich pflichte ihm bei, wenn er die Endmoränen im Schöttlkar (1530—1550 m), den sehr auffälligen Endmoränenwall bei der Hundsstallhütte (1293 m) im Fischbachtale und die von ihm im Baier-, Mitter- und Krapfenkare entdeckten Moränen samt und sonders dem Gschnitzstadium zuweist, denn die höher gelegenen haben eine niedrigere Kammumrahmung von 1900 bis 2000 m als die tiefstgelegene, die einem aus dem Soiernkare unter der Soiernspitze (2258 m) gekommenen Gletscher entspricht. Ganz unbedeutend ist der flüchtig von C. MÄRZ (9, S. 306) erwähnte Moränenwall zwischen dem oberen (1562 m) und unteren (1552 m) Soiernsee, auf der Schwelle des

Soiernkares; deutlicher ein Endmoränenwall bei der Soiernlacke (1842 m), den wir mit H. v. Wolf dem Daunstadium zuweisen. Letzterem gehört nach H. v. Wolf der Wall im Falkenkare zwischen 1700 und 1800 m Höhe an. Im Seefelder Gebirge sind die Rückzugsstadien spärlich. Eine Endmoräne fehlt auf den Stauseetonen am Gießenbache, ebenso auf der oberhalb gelegenen Felsschwelle. Der auf ihnen auftretende Dolomitschutt erinnert indes an denjenigen, den wir im Soierngebiete dem Gschnitzstadium zuweisen konnten. Er kommt aus dem oberen Gießenbachtale und steht mit der Schutterfüllung des Moderkarl in Verbindung. Auch der oberhalb der Seetone liegende Felsriegel wird nicht von einer Endmoräne gekrönt. Hat ein Gletscher des Gschnitzstadiums im Eppzirler Tale gelegen, so muß er oberhalb jenes Riegels geendet haben, wo sich eine ungeheure, jugendliche Verschüttung breitmacht. Vielleicht deckt sie die Moränen eines Lokalgletschers zu. Sichere Anzeichen eines solchen treffen wir erst oberhalb der Eppzirler Alpe. Da erstreckt sich in 1600 m Höhe eine blocküberstreute Terrassenfläche, an deren Steilabfall sich mehrere gekritzte Geschiebe fanden. Bei einer Umrahmung von 2300 m Höhe kann man an eine Moräne des Gschnitzstadiums denken, dessen Gletscherende in weniger als 1600 m Höhe zu suchen wäre. Deutlich tritt es uns im Puitentale entgegen, dessen Moränenwälle Ampferer bereits erwähnt hat (10, S. 530). Sie reichen im Schatten der Gehrenspitzen (2382 m) von 1800 m auf 1500 m, vielleicht sogar tiefer herab und deuten auf eine Schneegrenze von rund 2000 m. Das ist dieselbe, die wir früher für das Gschnitzstadium auf der Nordseite der Mieminger Kette errechneten (7, S. 345). Hier reichten dessen Gletscher nur auf 1500 bis 1600 m Höhe herab. Ähnlich verhält es sich mit den Gletschern von Ampferers zweitem, ältestem Stadium, das unserem Gschnitzstadium entspricht, im Bereiche der südlichen Karwendelketten (8, S. 179). Durchweg liegen bei gleicher Exposition und bei gleich hoher Überragung die Enden der kurzen Talgletscher im Norden rund 400 m tiefer als im Süden, was einem Anstiege der zugehörigen Schneegrenze von 200 m entspricht.

Neben den kurzen Talgletschern haben wir im südlichen Teile des Hochalpenzuges der Kalkalpen ganz ebenso wie im nördlichen Spuren kleiner und kleinster Hängegletscher. Kleine Moränenwälle, von Ampferer bereits erwähnt (10, S. 466), kleben am Ostabfalle der Reitherspitze: der Apparat eines Miniaturgletschers hängt am Westabfalle der Freiing (2325 m) bis 1900 m herab. An der Ostseite der Arnspitze (2196 m) liegt in 1920 m Höhe eine zierliche Endmoräne. Alle diese Gletscherchen deuten auf eine Höhe der Schneegrenze von 2000 m. Sie gehören danach gleichfalls dem Gschnitzstadium ebenso wie das Gletscherchen am Hobelehnskopfe auf der Südseite des Wettersteingebirges, das ich früher erwähnt habe (7, S. 345). Wir haben hier Spuren von Hängegletschern neben solchen von Talgletschern desselben Stadiums, während wir auf der Nordseite des Karwendelgebirges ebenso wie auf der Nordseite des Mieminger Gebirges Reste von Hängegletschern im Nährgebiete von Talgletschern eines älteren Stadiums haben. Ebenso liegt es nach Ampferer (8, S. 179) im Wurzelgebiete der Täler innerhalb des Karwendelgebirges.

Auf der Nordseite des östlichen Wettersteingebirges treffen wir nicht entfernt so großartige Endmoränen wie die unter den Wänden der Vorderen und Hinteren Karwendelkette. An der Hanimosalpe scheinen solche zu fehlen. Nicht gerade bedeutend ist die Moränenlandschaft zwischen Kämi- und Zirbelkopf, welche die Windfallhütte (1395 m) trägt. Ansehnlichere Moränenwälle begleiten das gleichfalls unter der Wettersteinwand wurzelnde Kämital. Andeutungen von solchen begegnet man bei der Wettersteinalp (1465 m). Ein kleines Endmoränengebiet trägt auch die Hochalm (1706 m) südlich vom Längenfeld unter dem Höllentorköpfl (2150 m); es deutet auf eine Schneegrenze von 1900 m. Es scheint, als ob die Wettersteinwände nicht so enorme Schuttmassen geliefert hätten wie die allerdings noch steileren Wände der nördlichen Karwendelkette. Damit steht im Einklang, daß wir im Partnachtale keine ähnlich auffällige End- und Ufermoräne finden wie unterhalb des Dammkares oder im oberen Johannistale. Aber diese haben auch keine Seitenstücke im Karwendeltale. Unterhalb des Hochalpsattels habe ich hier keine Endmoränen gefunden. Was man dafür nehmen könnte, die Trümmer unterhalb der Angeralpe am Larchet rühren, wie AMPFERER richtig hervorhebt (8, S. 223 und 228), von Bergstürzen her. Der obere von beiden hat zeitweilig unweit der Angeralpe einen kleinen See aufgestaut, dessen lehmige Sedimente sich an seine Trümmer lehnen. Sie enthalten eine Menge kleiner Schnecken. Hr. H. GAMS hatte die Freundlichkeit, die von mir gesammelten zu bestimmen. Er fand Limnea truncatula Müll., Hyalinia nitens Mich. und zahlreiche junge Exemplare einer anderen Hyalinia, Vitrina elongata Drap., Patula ruderata Studer, Cochlicopa lubrica Müll., und Carychium minimum Müll., lauter Arten, die heute noch im Karwendeltale vorkommen können.

Alte Breccien und junge Krustenbewegungen in den bayerischen Hochalpen[1].

Von Albrecht Penck.

(Vorgetragen am 12. März 1925 [s. oben S. 140].)

Als Anregung zu weiteren Forschungen hat Otto Ampferer seine Arbeit über Gehängebreccien der nördlichen Kalkalpen bezeichnet (11). Nicht weniger als 35 Vorkommnisse in Tirol hat er größtenteils zuerst kennengelehrt. Die bayerischen hat er nicht behandelt. Zu ihrem Studium bot die Gegend von Mittenwald gute Gelegenheit, doch wurden auch einige von Ampferer beschriebene Örtlichkeiten neuerlich untersucht. Sofern sich dabei Neues herausstellte, sei von ihnen zuerst berichtet.

Wiederholt hat Ampferer ein Breccienvorkommnis im Hintergrunde des Karwendeltales beschrieben (8, S. 227. 11, S. 743). Es zieht sich vom Hochalpsattel zum Tale längs des kleinen, vom Sattel kommenden Baches herab. Dieser hat an seiner linken Flanke, von Höhenzahl 1687 m an, eine Breccienwand, gekrönt von Moräne. Rechts beißt Muschelkalk aus. Zwischen 1570 m und 1476 m sitzt die Breccie auf recht fester Grundmoräne mit selten gekritzten Geschieben auf. An sie denkt offenbar Ampferer, wenn er von abgerundeten Stücken von Wettersteinkalk und feinerem Material in der Breccie spricht. Letztere besteht aus eckigem Material und fällt deutlich nach Süden — nicht wie Ampferer angibt, nach Norden —, während ihre Sohle sich sowohl westwärts zum Karwendeltale als auch nordwärts zu unserem Bache hin senkt. Diese offenbart in 1550—1570 m Höhe eine große Gufel (Ausbröcklungshöhle; 18, S. 77) in der Breccie gerade über der Moräne. Die Hochalpbreccie ist also ebenso zwischen Moränen gelagert wie die von Hötting bei Innsbruck. Die mehrfach mit den Breccien des Wettersteingebirges erwähnte Ablagerung von den Öfen im oberen Leutaschtal (6, S. 178. 7, S. 336. 10, S. 529. 11, S. 749. 12, S. 79) gehört nicht zu den Gehängeschuttbildungen. Sie ist ein altes Delta, bestehend aus gerolltem Material des Gaistales; Ampferer fand auch seltenes, zentral-alpines. Das Schichtenfallen ist unter 20°—30° ostwärts; rechts des Baches, der die Ablagerung nicht durchschneidet, liegt auf ihr Moräne auf. Ein altes Delta wird auch vom benachbarten Scharnitz- oder Klammgraben erschlossen. Hier ist das Material weniger gerollt und mehr eckig. Bis 1230 m ansteigend, fällt es nach Südosten. Weiter oberhalb liegt am Klammbache

[1] Zitate S. 302. Karte S. 350.

zwischen 1280 m und 1340 m sehr grobe Breccie, die eine Vertiefung im Dolomit ausfüllt und gleich dem tiefer gelegenen Delta von Moränen bedeckt wird. Die unterste Partie ist besonders grobblockig und enthält große, gerundete Geschiebe, die stellenweise in gelbem Lehm eingebettet sind. Ein einziges kristallines wurde gefunden. Bemerkenswert sind Rollsteine einer rötlichen Breccie mit rötlichen Kalken und rötlichem Bindemittel, die anstehend nicht bekannt ist.

Die alten Deltas bei den Öfen und dem Klammbache sind in den gleichen See von mindestens 1230 m Spiegelhöhe geschüttet, der heute nicht bloß zur Leutasch, sondern auch durchs Katzenloch (1222 m) zum Inn bei Telfs ablaufen könnte. Die höhere Breccie am Klammbach gehört zu ihnen als Ablagerung eines Wildbaches und Gehängebildung. Weiter unterhalb finden wir dann an der Leutasch zwischen dem Platzl und der Kirche horizontal geschichtete Schotter, die von Moränen bedeckt werden und gegenüber der Kirche solche unterlagern (22. S. 188). Ampferer erblickt in ihnen lediglich eine Anlagerung an die höhere moränenbedeckte Terrasse, in der er in den oberen Mähdern unweit des Klammbaches eine Nagelfluh gefunden hat und am Weidachsee die von uns gleichfalls als interglazial nachgewiesene Nagelfluh kennt (10, S. 530. 29, S. 38). Er ist geneigt, diese Nagelfluhbildungen mit denen des Klammbaches und der Öfen als eine ältere Nagelfluhbildung interglazialen Alters zusammenzufassen, in welche die Schotter an der Leutasch wie in einem Tale eingelagert sein sollen. Dieser Ansicht kann ich mich nicht anschließen. Nach Lagerung und Auftreten gehören die flach geschichteten, also fluviatilen Schotter an der Leutasch und die Nagelfluh am Weidachsee zusammen. Sie sind beide zwischen Moränen gelagert und interglazial. Interglazial sind zwar auch die Ablagerungen an den Öfen und am Klammbache, denn sie werden von Moränen überlagert und enthalten erratisches Material. Aber sie verlangen als Bildungsort einen See von mindestens 1230 m Spiegelhöhe. Der See muß abgelaufen gewesen sein, als sich die Schotter zwischen dem Platzl (1150 m) und Weidachsee (1098 m) ablagerten. Daher halten wir die Bildungen an den Öfen und am Klammbache für älter als die Schotter- und Nagelfluhablagerungen weiter abwärts. Es trifft nicht zu, daß letztere Gerölle die ersteren enthalten, wie 1922 angegeben wurde (22, S. 188), sondern sie führen Gerölle von ein und derselben roten Breccie unbekannten Ursprunges. Es ist deswegen nicht nötig, sie in zwei verschiedene Interglazialzeiten zu verweisen; es ist auch denkbar, daß in den Deltaschottern an den Öfen und im Klammbache Äquivalente der sonst im Isartale verbreiteten interglazialen, lakustren Formation vorliegen, die wir in die Riß-Würm-Interglazialzeit verlegen. Damit soll aber nicht gesagt sein, daß sie im gleichen See abgelagert wurden.

Weiter abwärts im Leutaschtale hat Ampferer am Nordabfalle des Zuges der Arnspitze eine verfestigte Gehängeschuttbildung angetroffen (10, S. 457. 11, S. 748), die mit erratischen Stücken überstreut ist. Sie erfüllt eine von der Hinteren Arnspitz gegen Lochlehen in der Leutasch herabziehende Gehängefalte. Zwei Runsen führen in dieser abwärts, welche jeweils ungefähr mit der Grenze der Breccie zusammenfallen, so daß diese im wesentlichen

auf den Riedel zwischen beiden beschränkt ist; oben greift sie etwas über die östliche, unten etwas über die westliche hinaus. In etwa 1500 m lehnt sie sich in beiden Runsen an eine höhere Felsstufe an. Sie besteht gewöhnlich aus grobem, verkittetem Blockwerk von Wettersteinkalk, welches sich unmittelbar auf solchen legt. Die höheren Partien sind feinstückiger. Wie Ampferer habe ich in der Breccie zentralalpine Geschiebe nicht gefunden.

In 1300 m Höhe vereinigen sich beide Runsen zu einem typischen Lahner, an dessen rechter Seite sich Fels erhebt, während an der linken Seite Breccie manchmal auf einem Felssockel bis unter 1200 m herab verfolgt werden kann. Wenig unterhalb der Vereinigung der beiden Runsen, dort wo der von Lochlehen zur Arnspitz führende Weg in die Runse einbiegt, ist die Breccie mit Inntaler Moräne bedeckt, die sie glatt abschneidet. Einzelne etwas aufragende Fragmente der Breccie sind typisch in der Richtung des Leutaschtales geschrammt. Von hier baut sich eine steile Breccienhalde in das Leutaschtal, auf welcher der sich öfters gabelnde Arnspitzenweg nach Lochlehen herabführt. An einem westlichen Wegaste läßt die Breccie sich ziemlich ununterbrochen bis 1160 m herab verfolgen, an einem östlichen bis 1140 m. Tiefer trifft man in beiden Fällen betonartige Moräne mit seltenen kristallinen Geschieben. Durch ihre tillitartige Beschaffenheit weicht sie von der Hangendmoräne der Breccie ab, sowie von den sonst im Leutaschtale (z. B. 1 km weiter oberhalb im Bache) auftretenden Moränen. Am östlichen Wegaste tritt diese Moräne so dicht an die etwas höher gelegene, gut erschlossene Breccie heran, daß an einer Überlagerung durch letztere nicht zu zweifeln ist. Die nördlich der Arnspitze befindliche Breccie ist also gleich der Hochalpsattelbreccie zwischen Moränen gelagert und war bei Bildung der letzteren bereits verfestigt.

Ähnlich der Arnspitzbreccie lagert ein kleines Breccienvorkommnis im Isartale oberhalb Mittenwald. Es liegt an der Mündung der Sulzleklamm gegen ihren Schuttkegel in 1140 m Höhe, also 200 m über Tal, während die Arnspitzenbreccie bis über 100 m über Tal herabreicht. Die steilfallende Schichtung vergewissert uns, daß es sich nicht etwa um die Spitze eines alten Schuttkegels handelt. Es liegt ein Stück alter Schutthalde, wenn nicht gar ein Stück alten Deltas vor. Als lakustro-glazial haben wir das von Ampferer und Hammer (5, S. 329) und dann von ersterem (11, S. 742) an der Mündung des Hinterautales in das Scharnitzer Becken gefundene Konglomerat bereits früher gedeutet (22, S. 187), ebenso die Nagelfluh an der Westseite des Riedbodens unterhalb der Mündung des tiefen Tales.

Gegenüber Mittenwald lehnt sich an den Nordabfall der Viererspitze nördlich der westlichen Karwendelspitz eine ausgedehnte Gehängeschuttbildung, die sich in Form einer deutlichen Schutthalde, anfänglich mit einer Böschung von 35°, tiefer mit geringerer zur Terrasse des Raineck und zum Ochsenboden[1] herabzieht (vgl. Fig. 1, IV/V). Sie besteht aus Trümmern der

[1] Es gibt bei Mittenwald zwei Ochsenboden; der eine liegt auf der Isarterrasse nordöstlich vom Raineckwalde; er möge hier als unterer, der unter dem Dammkare befindliche hingegen als oberer bezeichnet werden. Zu ihm führt von der Erzgrube aus der Ochsenbodenweg, zum ersteren der »untere« Weg.

südlich aufragenden Viererspitz (nördliches Karwendelkreuz 2053 m), nämlich aus meist über faustgroßen Brocken von Wettersteinkalk. Größere Trümmer sind selten. Die Bildung dieser Halde geschieht heute nicht mehr. Sie ist von Wald bedeckt, der bis an die Felswände heraufreicht. Auch ist die Schüttung der Trümmer nicht so locker wie an den heutigen viel höher gelegenen Schutthalden der nördlichen Karwendelkette. Gewöhnlich ist der Schutt ziemlich dicht gelagert, stellenweise ist er zu einer festen Breccie verkittet. In ihrem Aufbau gewährt die Schlucht, die sich von der Nord-

Fig. 1.

Hauptdolomit, Mindel-Moräne, Hochland-Breccie, Riss-Moräne, Viererspitz-Br., Terrassenschotter, Würm-Moräne

Profile durch die Hochland- und Viererspitz-Breccie 1 : 15000.

I. Vom Wörnergrat über den Hochlandriedel zum Mitterkartal und abwärts im Kälberalpelbache.
II. Von den Steinklippen am Fuße des Wörner über den Hochlandriedel zum Kälberalpelbache.
III. Vom Predigtstuhl über den Mittereckriedel zum Kälberalpelbache.
IV. Vom Abfalle der Viererspitz zum unteren Ochsenboden.
V. Vom Abfalle der Viererspitz längs des oberen Ochsenbodenweges zum Rainbache.
VI. Epigenetische Schlucht des Rainbaches oberhalb der Erzgrube.

seite der Viererspitz zum Rainbache bei der Erzgrube zieht, einen guten Einblick. Feste Breccie, von Ampferer (11, S. 744) bereits erwähnt, reicht hier bis 1435 m herauf und stößt unmittelbar an die Wände des Wettersteinkalkes an. Weiter abwärts, vom Ochsenbodenwege gut sichtbar, tritt die Schlucht gerade an die Grenze der alten Gehängeschuttbildung und den Fels. Jene erscheint hier als ziemlich lockerer, steil geböschter Schutt. Man versteht hier, warum Reis und Pfaff die Ablagerung als rezenten Gehängeschutt kartiert haben (12). Noch weiter abwärts stellt sich wieder feste Breccie ein, deren Wände im wahren Sinne des Wortes groteske Formen aufweisen. Eine scharfe Grenze zwischen Schutt und Breccie ist nirgends zu erkennen. Beide sind verschieden stark verkittete Partien derselben Ablagerung. Die unterste Strecke der Schlucht durchbricht klammartig einen Vorsprung des Wettersteinkalkes und

schnürt von dessen Felswänden einen Pfeiler los, an den die Breccie unmittelbar anstößt. Es handelt sich um einen epigenetischen Einschnitt (Fig. 1, VI). Am Eingange dieser Schlucht (unter 1100 m) ist die Breccie besonders feinstückig.

Zwei Runsen ziehen sich an unserer Gehängeschuttbildung von den Wänden der Viererspitz in den Raineckwald herab. Die westliche wird vom Ochsenbodenwege bei Höhe 1394 m gequert. Sie erschließt schüttiges Material, welches an der rechten Seite der Runse in 1410 m von Moräne mit allerdings selten gekritzten Geschieben überlagert wird (Fig. 1, V). Unter dem Schutte stellt sich weiter aufwärts feste Breccie ein, die an Fels anstößt. In der östlichen Runse sieht man gleichfalls Schutt, unter welchem sich bergwärts Breccie hervorhebt, die in 1520 m Höhe an Felsen anstößt. Geht man in der Runse abwärts, so trifft man alsbald Moräne. Da auf ihr Quellen nicht auftreten, kann sie nicht das Liegende der Schuttbildung darstellen, sondern muß in deren Hangendes verwiesen werden. Noch weiter abwärts erreicht man wieder Breccie. Die Gehängeschuttbildung am Nordabfalle der Viererspitz wird also stellenweise von einem Moränenmantel überzogen und ist daher keine rezente. Nur ganz unbedeutende Schuttmassen dicht unter den Wänden der Viererspitze können als solche aufgefaßt werden.

Abwärts erstreckt sich die alte Gehängeschuttbildung der Viererspitz bis in das Bereich der interglazialen Schotterterrassen des Isartales, und zwar zieht sie sich im Raineckwalde unter die Schotter herab. Dies sieht man deutlich (Fig. 1, V) beim Anstiege des Ochsenbodenweges nördlich vom Schuttkegel des Rainbaches. Über letzterem erheben sich Breccienpartien, die bis 1020 m herabreichen. Nordwestlich davon liegt ein Schotterausbiß zwischen 1000 m und 1060 m Höhe, und zwischen den ersten Serpentinen des Ochsenbodenweges lagert in 1070 m Höhe Terrassenschotter auf Breccie. Ganz wenig weiter westlich und etwas tiefer wird diese von Moräne bedeckt, welche als ein Ausläufer der Moränendecke auf der Schotterterrasse erscheint. Unsere Gehängeschuttbildung gehört also in das Liegende der Terrasse, die an die alte Schutthalde angelagert ist. Die letztere wird nicht bloß von Moränen überlagert, sondern auch von solchen unterteuft. Das sieht man am unteren Ochsenboden, in der westlichsten der drei Runsen, die in ihn einschneiden (Fig. 1, IV). Am »unteren« Wege, der vom Raineckwalde zur unteren Kälberalpe führt, findet man feste Breccie, die in der Runse unterhalb des Weges in 1145 m Höhe eine feste tillitartige Grundmoräne mit deutlich gekritzten und seltenen zentralalpinen Geschieben überlagert. Wir verfolgen letztere im Graben bis 1100 m Höhe herab; in gleicher Höhe stellen sich wenig weiter abwärts die höchstgelegenen Schotter der Isarterrasse ein, deren Verhältnis zur tillitartigen Moräne nicht zu erkennen ist.

Weitere Vorkommen alter Breccie finden sich östlich der eben besprochenen im Quellgebiete des Kälberalplbaches ziemlich hoch unter den Wänden des Wörner und der Tiefkarspitze. Sie sind weniger zusammenhängend als die Viererspitzenbreccie. Es handelt sich um eine Reihe einzelner, voneinander getrennter Stücke. Das oberste liegt vor dem Wörner auf dem Wörnergrat (1990 m) (Fig. 1, I); es bricht hier nach Osten in etwa 10 m Mächtigkeit gegen

das Wörnerkar bei westlichem Schichtfallen jäh ab und zieht sich lediglich auf der Westseite des Wörnergrates zum Quellgebiete des Kälberalplbaches bis 1850 m Höhe herab. Es fehlt diesem Breccienstück die nährende Wand. Tiefer liegt hier über den »Wasserfällen« ein dünner, vielfach zerrissener Breccienschleier in 1590 m bis 1680 m Höhe, der, in nordwestlicher Richtung fallend, vor dem Fuße der Wände des Wörner gelegen, von diesen durch einen Felsenriegel getrennt ist. Ein drittes Vorkommnis krönt den Riedel zwischen dem obersten Kälberalplbache und dem aus dem Mitterkar kommenden Bache (Fig. 1, I. II). Die Hochlandhütte (1630 m) steht auf ihm, es zieht sich herab bis zur oberen Kälberalpe (1553 m) und streicht auf beiden Seiten des Riedels in Wänden aus. Die Oberfläche ist bei der Hochlandhütte ebenso wie oberhalb der Wasserfälle von breiten Karren durchsetzt; die Schichtung ist recht flach. Wir haben es weniger mit einer Halde als mit einer Talzuschüttung zu tun, die eine alte, quer über den heutigen Riedel ziehende Furche erfüllt. Letztere reicht am Anstiege zur Hochlandhütte bis 1500 m herab. Die Dolomitbreccie beim trigonometrischen Punkt 1566.4 m liegt bereits auf ihrer nördlichen Begrenzung. An seinem Nordwestabfalle zeigen unweit einer Jagdhütte große Blöcke die Fortsetzung der Breccie in dieser Richtung an. Ein weiteres kleines Vorkommnis liegt östlich der Jagdhütte im obersten Kälberalpltale zwischen 1380 m und 1400 m Höhe (Fig. 1, I); es ist das tiefste der ganzen Serie. Ansehnlicher ist das Vorkommnis zwischen 1530 m und 1650 m auf dem Riedel zwischen den zum Dammkar und Mitterkar führenden Tälern. Es lehnt sich als Haldenrest an den Abfall des Predigtstuhls und zieht sich gegen das Mittereck hin (Fig. 1, III). Stellenweise hat es an 50 m Mächtigkeit. In seinen Westwänden dehnt sich eine große Gufel gerade an der Grenze gegen den liegenden Dolomit. Sie liegt abseits vom Ochsenbodenweg zur Hochlandhütte. Trümmer von ähnlicher Breccie wurden in etwa 1570 m auf dem Abfalle des Felsriegels gefunden, der das Dammkar nach unten begrenzt. Endlich sitzt ein Stückchen Breccie in 1480 m Höhe, dort, wo der Ochsenbodenweg in das zum Dammkare führende Tal einbiegt. Ein von den Karwendelköpfen nach Norden ziehender Dolomitrücken trennt es von der benachbarten Viererspitzbreccie[1].

Wir fassen die aufgezählten Breccienvorkommnisse im oberen Gebiete des Kälberalplbaches als Hochlandbreccie zusammen. Sie besteht vornehmlich aus Trümmern von Wettersteinkalk, welche viel fester verkittet sind als die der Viererspitzbreccie. Solche Karrenoberflächen, wie wir sie bei der Hochlandhütte und über den Wasserfällen haben, wären bei letzterer ausgeschlossen. Zentralalpines Material wurde in beiden Breccien nicht gefunden, aber in der Liegendmoräne der Viererspitzbreccie am unteren Ochsenboden. Gleich letzterer ruht die Hochlandbreccie auf Moränen. Das sieht man deutlich, wenn man von der oberen Kälberalpe unter den Ostwänden des Riedels zur Hochlandhütte geht (Fig. 1, II). Man kommt hier zunächst auf eine betonartig aussehende Ablagerung, die sich durch die Führung zahlreicher gekritzter Geschiebe

[1] Abseits von all den geschilderten Vorkommnissen liegt ein Breccienausbiß weiter im Osten im Bereiche des Fermersbaches, 500 m östlich von der Schlaghütte am Wege zum Wechselboden in 1310 m Höhe. Er bezeugt, daß auch am Fuße der Schlichtspitz Breccienbildung erfolgt ist.

— zentralalpine wurden nicht gefunden — als ein echter Tillit erweist. Unmittelbar darüber steht die, wie schon erwähnt, flach gelagerte Breccie an. In ganz ähnlicher Weise findet sich am Ostfuße des Breccienriedels zwischen Predigtstuhl und Mittereck (Fig. 1, III) Tillit. Die unmittelbare Auflagerung der daneben sich erhebenden Breccie ist indes nicht erschlossen. Eine Hangendmoräne ist lediglich über der Breccie am Ochsenbodenwege beim Einbiegen in das Dammkartal zu beobachten. Darüber, daß auch die anderen Vorkommnisse viel älter sind als die in der Gegend oberflächlich herrschenden Moränen, kann kein Zweifel sein, denn diese liegen unten in den Tälern, zwischen welchen sich die Breccienriedel erheben (Fig. 1, I. II. III). Gleich der Viererspitzbreccie ist also die Hochlandbreccie zwischen zwei Vergletscherungen gebildet. In ihrem Auftreten zeigen beide Breccien jedoch recht erhebliche Verschiedenheiten. Die Viererspitzbreccie ist eine nahezu intakte Schutthalde, stellenweise überkleidet mit Moränen; die Hochlandbreccie zerfällt in einzelne Vorkommnisse, welche im allgemeinen von den Felswänden getrennt sind, die sie gespeist haben. Sie ist zerschnitten durch Täler von über 200 m Tiefe, zwischen denen sie nur noch als Krönung von Riedeln auftritt. Diese Täler sind älter als die letzte Vergletscherung der Gegend, die sich in ihnen breitmachte. In ihnen lagern die mächtigen Endmoränen des Gschnitzstadiums. Dagegen sind die Runsen, welche in die Viererspitzbreccie einschneiden, allesamt postglazial.

Die Viererspitzbreccie senkt sich bis tief ins Isartal hinab, die Hochlandbreccie hört im Gebiete des Kälberalplbaches in einer Höhe auf, wo jene in einem benachbarten Winkel des Isartales einsetzt. Wenn von ihr gesagt wurde (23, S. 250), daß sie bis unter die Terrassen des Isartales hinabreiche, so geschah dies zu einer Zeit, als beide benachbarten Breccien noch als eine einheitliche Bildung aufgefaßt wurden. Die Viererspitzbreccie ist eine reine Gehängebildung, verkitteter Gehängeschutt, der sich bis zu den lakustren Ablagerungen des Isartales hinab verfolgen läßt. Die Hochlandbreccie verschüttet, wie insbesondere Fig. 1, II erkennen läßt, einzelne Talverästelungen, die 50—100 m tief zwischen die sie trennenden Riedel eingeschnitten sind. Diese alten Riedel laufen stellenweise quer über die heutigen, wie wiederum Fig. 1, II zeigt.

In ihrem Auftreten kann die Viererspitzbreccie mit der Arnspitzbreccie im Leutaschtale verglichen werden. Dagegen hat die Hochlandbreccie große Ähnlichkeit mit zwei Breccienvorkommnissen, die wir im Wettersteingebirge an entsprechenden Stellen, nämlich am Fuße der Wände von Wettersteinkalk, entweder im Bereiche des Hauptdolomites oder in dem der Raibler Schichten, in 1500—1900 m Höhe finden. Das eine befindet sich am Schachen (Fig. 3, I. II). Es wird von Reis (12, S. 78) erwähnt und kartiert. Es liegt ganz ähnlich wie das der Hochlandhütte auf einem schmalen Riedel, nämlich dem gratartigen First des Teufelsgsaß (1942 m), der sich zwischen der breiten Felsennische der Schachenalp und dem 900 m tieferen Reintal erstreckt. Die Breccie zieht sich mit Unterbrechungen herab bis zum Königshause (1866 m). Hier verschüttet sie eine alte, 30 m tiefe, nach Westen gerichtete Schlucht. Sie besteht aus verfestigtem Gehängeschutt und ist der unbe-

deutende Überrest einer Schutthalde, die sich an den Nordabfall des Wettersteingebirges lehnte. Lediglich Material des Hintergehänges ist in ihr vorhanden; zentralalpines wurde nicht gefunden. Ihre Lage zwischen dem Rande des Reintaltroges und der Nische der Schachenalm, die gleichfalls einen eigenen Gletscher geborgen hat, macht zweifellos, daß sie vor der letzten Vergletscherung nicht bloß abgelagert, sondern auch tief zerschnitten war. Nach unten wird sie durch 600 m hohe Felswände begrenzt, die zum Schachenwalde abfallen. Wie weit sie sich hier erstreckt hat, läßt sich nicht ermitteln.

Fig. 2.

Die Längenfeld-Kreuzeck-Breccie 1 : 25000.

I. Profil in nordöstlicher Richtung längs der Firstlinie Alpspitz–Kreuzjoch.
II. Profil in östlicher Richtung vom Vorderen Waxenstein über das Höllental und Längenfeld zum Bodenlahnentale.

Das großartigste Breccienvorkommnis des Wettersteingebirges liegt am Längenfeld und Kreuzeck südlich von Garmisch (Fig. 2). Bereits GÜMBEL hat es als Hochgebirgsschotter verzeichnet und abgebildet (2, S. 802, Profil 89, Tafel XII). Er hebt hervor, daß es stellenweise Rauchwacken- und Nagelfluh-ähnlich sei. REIS beschreibt es und stellt im Verein mit PFAFF (12) seine Verbreitung genau dar. Es dehnt sich auf dem Gebiete der Wasserscheide zwischen dem Hammerbache und dem Bodenlahnenbache und nimmt in der Firstlinie Alpspitze–Kreuzjoch eine muldenförmige Einsenkung ein (Fig. 2, I). Hier bildet sich die Hochfläche des Längenfeldes. In mehr als 1800 m Höhe lehnt sich die Breccie an dessen höchste, gerade an 1900 m Höhe heranreichende, aus Raibler Kalken bestehende Erhebung und zieht sich, durch eine ziemlich ebene Fläche etwas terrassiert, ostwärts bis zu dem weiten Sammelkessel des Bodenlahnenbaches. Hier bricht sie in steilen 60—70 m hohen Felswänden

jäh ab. Reis (12, S. 78) gibt davon eine Abbildung. Ein Ausläufer dieses Vorkommnisses zieht sich von der Jagdhütte nordöstlich auf dem schmalen Wasserteiler zwischen dem zum Hammerbache fließenden Stegerbache gegen das Kreuzeck. Es fällt zwischen diesem und dem Kreuzjoche südwärts gegen den Sammelkessel des Bodenlahnenbaches mit steilen Wänden ab. Nach Norden, gegen die Talweitung von Garmisch-Partenkirchen hin, ist ein Ausbiß nicht bekannt.

Am Längenfeld senkt sich die Basis der Breccie in nordöstlicher Richtung von etwa 1850 m auf 1640 m hinab und liegt daher am Nordosteck des Vorkommens am tiefsten. Zugleich steigert sich ihre Mächtigkeit; dort, wo sie im Westen gegen die Hupfleite abbricht, ist sie kaum 20 m dick, während sie an ihrem Ostabbruche gegen das Bodenlahnental 60—70 m hohe Wände bildet. Levy (21, S. 79) möchte letztere mit der Übertiefung des Reintales in Verbindung bringen, aber dieselbe endet oberhalb der Mündung der Bodenlahne und kann deren rückwärtige Erosion nicht beeinflussen. Die Beschaffenheit der Breccie ist eine recht wechselnde. In ihren unteren Partien ist sie vielfach, auch in ihren höchsten westlichen Partien ziemlich feinstückig. Ihre Bestandteile sind hier vielfach gerundet. Echte Gerölle rechtfertigen die von Gümbel gebrauchte Bezeichnung Hochgebirgsschotter. An solchen feinstückigen Stellen ist die Schichtung deutlich. Sie ist gewöhnlich geneigt, bei häufigem Wechsel des Fallwinkels. Nach oben zu nehmen die Blöcke überhand. Es entwickelt sich eine sehr grobe, nur undeutlich geschichtete Breccie. Sowohl in dieser groben wie auch in der feineren liegenden Breccie kommen dann und wann gekritzte Geschiebe vor. Das Material ist fast ausschließlich kalkalpin. Bruchstücke und Gerölle von Wettersteinkalk walten unbedingt vor. Selten nur finden sich Fragmente zentralalpiner Gesteine, meist von Gneis. Manchmal sind sie stark angewittert, doch gibt es auch frische. Gelegentlich trifft man ferner gerundete Blöcke eines feinstückigen Kalkkonglomerates, einer echten löcherigen Nagelfluh. An den westlichsten und südlichsten Ausbissen ruht die Breccie unmittelbar auf Raibler Kalken. An ihrem Nordosteck aber, dort wo ein kleiner Quell an ihrer Sohle auftritt, erscheint unter ihr in 1640 m Höhe Moräne, die man bis zum Firste nordöstlich der Jagdhütte verfolgen kann.

Nordöstlich vom Längenfeld dehnt sich ein zweites großes Breccienvorkommnis. Es lehnt sich an die Südostseite des Kreuzecks und, nach den von Reis und Pfaff kartierten Grenzen zu urteilen, senkt sich seine Sohle nach Südosten. Die Basis der Kreuzeckbreccie streicht also senkrecht zu der der Längenfeldbreccie. Ein schmaler, stellenweise unterbrochener Breccienfirst streicht zu letzterer hinüber. Sein Südwestende sitzt auf Moräne, die sich bis auf 1640 m Höhe erhebt. Wenig weiter gegen Norden aber, dort wo der Fußsteig ins Bodenlahnental herabsteigt, hebt sich das Grundgestein auf fast 1620 m Höhe empor. Von hier aus senkt sich die Brecciensohle in den Wänden südlich vom Kreuzeck ziemlich steil nach Nordosten, nach der Karte von Reis und Pfaff bis 1500 m herab. Ich habe diese nicht leicht zugänglichen Abbrüche nicht durchstiegen. Aus einiger Entfernung sieht man zwischen Breccie und Hauptdolomit Partien, die an Moränenausbisse denken

lassen. Von der tiefsten Stelle steigt die Brecciensohle gegen das Kreuzjoch hin an. Sie senkt sich also hier nach Südwesten, daher der Sohle am Längenfelde entgegen. Die Breccienvorkommnisse vom Längenfeld, Kreuzeck und Kreuzjoch ziehen sich also in einem ähnlichen Talkessel herab, wie ihn heute die Bodenlahne sich am Fuße der Breccienwände ausgeweitet hat.

Die an zwei Stellen unter der Breccie erschlossene Moräne macht das Auftreten von gekritzten Geschieben und von erratischem Material in ihr verständlich. Eine unmittelbar auf der Breccie aufliegende Hangendmoräne ist nicht erschlossen. Aber südlich des Längenfeldes finden sich die Endmoränen der Hochalpe in der in sie eingeschnittenen Vertiefung; sie sind unbedingt jünger. Die Längenfeld-Kreuzeck-Breccie lagert also genau so wie die Hochlandbreccie zwischen Moränen.

Die Längenfeldbreccie erinnert durch ihre feste Beschaffenheit an die oberen Partien der Höttinger Breccie. Während aber diese im Höttinger Graben wie eine Schutthalde an ein Talgehänge angelagert ist und sich am Fuße schuttkegelartig ausbreitet, fehlt der Längenfelder das Hintergehänge, das sie gespeist haben könnte. In ihrer ganzen Erstreckung liegt sie auf einer Wasserscheide zwischen sehr tief eingeschnittenen Tälern, wie Profil II in Fig. 2 deutlich zeigt. Die steilen Abbrüche gegen den 400 m tiefen Sammelkessel des Bodenlahnentales machen sicher, daß sie sich in dasselbe weiter herabgezogen hat. Doch finden sich hier keinerlei Reste von ihr. Dagegen machen die sie im Norden und Osten flankierenden Höhen des Kreuzecks und Kreuzjochs wahrscheinlich, daß sie sich nicht in die Talweitung von Garmisch-Partenkirchen herabzog, während ihre Abstürze gegen die Hupfleite hin anzeigen, daß sie sich einst weiter gegen Westen erstreckte. Das nicht seltene gut gerollte Material in der Ablagerung schließt aus, daß sie in der Art einer Schutthalde entstanden ist, für die ein Hintergehänge fehlen würde. Es handelt sich vielmehr um eine Wildbachbildung, um Überreste eines alten Schuttkegels, der von Westen her aufgeschüttet wurde. Als Quelle für diesen Wildbach kann nur das Höllental in Betracht kommen, das westlich vom Längenfelde beinahe 800 m tief unter dessen First eingeschnitten ist. Denken wir uns dessen Hochfläche westwärts mit gleichem Anstiege fortgesetzt (Fig. 2, II), so kommen wir auf 2150 m gerade über dem oberen Eingang der Höllentalklamm, also 1050 m über dem Bach. Die Fortsetzung des Anstieges (260‰) führt über den Gipfel des Waxensteins hinweg und weiterhin über den Gipfel der 8 km entfernten Zugspitz. Große Veränderungen in der Gestaltung des Gebirges müssen sich seit der Ablagerung der Längenfeldbreccie vollzogen haben, und zwar nicht bloß durch das fortgesetzte Einschneiden der Täler, sondern auch in bezug auf die Höhenlage einzelner Teile zueinander.

Gleiches lehrt das Breccienvorkommnis im Törl auf dem Kamme des Wettersteingebirges. Es erfüllt bei der Meilerhütte 2376 m eine alte Schlucht, die den First des Gebirges in westöstlicher Richtung quert (Fig. 3). 230 m weit kann sie verfolgt werden, oben mit einer Breite von 20 m, unten von kaum 10 m. Die Wandungen dieser Schlucht sind glattgewaschen wie die einer Klamm. An sie stoßen unten horizontale Bänke einer gut geschichteten Nagelfluh an, die man nördlich der Hütte bis auf 2335 m, südlich von ihr

bis auf 2270 m herab verfolgen kann. Hier findet sie sich auch neben der alten Klamm in einem engen Felsspalt, in dem sie ein gangartiges Vorkommen vortäuscht. Über der Nagelfluh, mit ihr sich verzahnend, lagert südfallende grobe Breccie mit zum Teil sehr großen Blöcken. Das Material von Breccie und Nagelfluh besteht aus Gesteinen der nächsten Nachbarschaft, nämlich Wettersteinkalk und Raibler Sandstein, wie solcher lediglich nördlich des Törl vorkommt. Die Wasserbewegung ging also von Westen nach Osten, entsprechend dem Gefälle der verschütteten Schlucht. Zentralalpine Gesteine wurden

Fig. 3.

Die Törl- und Schachenbreccie 1 : 25000.

I. Profil vom Törl in nordwestlicher Richtung durch das Schachenkar über das Königshaus ins Reintal.
II. Profil auf dem Grat vom Törl über die Schachenplatte, das Teufelsgsaß und Königshaus zum Schachenwald.
(Breccien schwarz; Grundgestein schraffiert.)

nicht gefunden. Manche Gerölle sind stark angeätzt, einige ausgelaugt. Glazial bearbeitetes Material fehlt. Die westöstliche Wasserbewegung steht mit den heutigen Reliefverhältnissen nicht im Einklang. Denn westlich des Törl liegen die Raibler Schichten tiefer als die Nagelfluh. Auch fehlt hier die Höhe, welche das Material der groben Breccie geliefert haben könnte. Seit Ablagerung von Nagelfluh und Breccie sind sehr bedeutende Veränderungen in Gestalt und Höhenverhältnissen des Gebirges geschehen. Ein Bach, welcher den Wettersteinkamm durchsägen und mit seinen Geröllen verschütten konnte, ist bei den heutigen Verhältnissen undenkbar. Rinnendes Wasser mangelt allgemein auf den Höhen des Wettersteingebirges. Die gute Rundung der herbeigeführten Gerölle weist zudem auf einen weiten Transport. Man muß sich also denken, daß westlich vom Wettersteinkamm einst höhere Partien aufragten, welche

das Bachgebiet begrenzten und die Trümmer für die Breccie lieferten. Stellt man sich aber derartige Höhen vor, und versucht man sich irgendwie das Flußgebiet eines alten Törlbaches zu umgrenzen, so muß man dafür den Nordabfall des Fraunalpl in Anspruch nehmen, also den Raum, auf welchem die nur 1400 m entfernte Schachenbreccie liegt. Diese erachten wir daher für jünger als die Nagelfluh und Breccie am Törl. Das wird aus Profil I in Fig. 3 ohne weiteres ersichtlich.

Es ergeben sich also Gründe dafür, daß unsere Breccien nicht allesamt, wie bisher angenommen, gleich alt sind: Die Viererspitzbreccie ist jünger als die Hochlandbreccie, die Schachenbreccie jünger als die Törlbreccie. Die Längenfeldnagelfluhbreccie ist nicht die älteste ihrer Art, denn sie führt Gerölle einer älteren Nagelfluh. Drei von diesen Vorkomnissen tragen übereinstimmende Züge hinsichtlich ihres Auftretens. Die Hochland-, Schachen- und Längenfeldbreccie liegen am Fuße des Hochalpenzuges, an die Wände von Wettersteinkalk gelehnt, oder dicht vor denselben, dort wo sie sich über die vorgelagerten Hochflächen von Dolomit und Raibler Schichten erheben. Diese Hochflächen erscheinen wie Überreste einer riesigen Talweitung, die sich im Längstalzuge der Isar und Loisach zwischen dem Hochalpen- und Voralpenzug erstreckt und in ersteren sich einbuchtet. In diese Einbuchtungen, nicht aber in die heutigen Täler, ziehen sich die Hochland- und Längenfeldbreccie herab, und gemein ist ihnen, daß sie hier als Talverschüttungen erscheinen, als Ablagerungen von Wildbächen, die sich an Stellen finden, wo solche heute nicht mehr entstehen können. Die Hochlandbreccie zeigt den Übergang solcher Wildbachaufschüttungen zu echten Gehängebreccien, die Schachenbreccie ist größtenteils eine solche. Die gemeinschaftlichen Züge ihres Auftretens weisen auf gleiches Alter. Sie bilden einen mittleren Breccienhorizont; älter ist der höhere der Törlbreccie, jünger der tiefere der Viererspitzbreccie.

Den älteren Horizont können wir nicht in Beziehung zu Ablagerungen des Eiszeitalters bringen. Die Törlbreccie enthält weder zentralalpines noch glazial bearbeitetes Material. Ihre hohe Lage macht sicher, daß sie zu einer Zeit entstanden ist, als die Konfiguration des Gebirges eine wesentlich andere war als heute; auch weicht die Beschaffenheit der mit ihr verbundenen Nagelfluh von den Nagelfluhen des Eiszeitalters durch das Auftreten leichter Eindrücke der Gerölle etwas ab. Wir bezeichnen sie daher einstweilen als präglazial. Die beiden jüngeren Breccienhorizonte sind interglazial. Zentralalpine Geschiebe in der Längenfeldbreccie erweisen, daß vor ihrer Ablagerung Inntaler Eis bereits bis ins Loisachgebiet gelangte; bis beinahe 2000 m ansteigend, lehrt die Hochlandbreccie, daß zur Zeit ihrer Ablagerung das Eis bis in die Grenzen des späten Daunstadiums zurückgegangen war. Kristalline Gesteine in den Liegend- und Hangendmoränen der Viererspitzbreccie verraten das Eindringen zentralalpinen Eises in die Kalkalpen vor und nach ihrer Ablagerung; ihre Ausdehnung bis in das Gebiet der Gschnitzmoränen hinein bezeugt weitgehende Eisfreiheit des Gebietes zur Zeit ihrer Entstehung. Das verschiedene Verhalten der beiden in Betracht kommenden Breccienhorizonte zu den Tälern schließt nun aus, daß sie gleich alt sind: Auf Wasserscheiden gelegen sind die Vorkommnisse des mittleren Horizontes älter als die heutigen

Talverzweigungen; der tiefere Horizont reicht tief bis ins Isartal herab und tritt hier in Verknüpfung mit anderen interglazialen Ablagerungen. Er ist zwar älter als die interglaziale Schotterterrasse, deren Geröll ihm auflagert, aber Breccienmaterial verknüpft sich auf das innigste mit den unter den Schottern liegenden Seetonen. Das sieht man deutlich am Fuße der Schotterterrasse des Raineckwaldes. Da streicht nördlich der Viehweide am Rain Seeton aus, der sich durch nasse Stellen verrät. Dort aber, wo er nördlich des Landhauses des Professors Schreyögg bloßgelegt ist, sind ihm Breccienpartien eingeschaltet, die wir nur als Fortsetzung der 800 m weiter östlich anstehenden Viererspitzbreccie ansehen können. Gleiches gilt von dem weiter nördlich gelegenen Hirtenbichl (931.7 m). Auch hier ist mit den Seetonen brecciöses Material vergesellschaftet. Man darf streng genommen nicht, wie 1922 geschehen, von Deltaschottern reden (22, S. 187). Gleiches gilt von den Deltabildungen oberhalb der Mündung des Seinsbaches an der Straße nach Wallgau und an der Isar. Daß sich bei Wallgau mit den lakustren Tonen Breccien verknüpfen, ist bereits hervorgehoben (22, S. 189). Wir haben also eine Breccienformation aus der Zeit des interglazialen Sees im Isartale. Die interglaziale Viererspitzbreccie gehört dazu. Der Boden aber jenes Sees lag unter der Sohle des heutigen Isartales. Dieses ist in seiner heutigen Tiefe älter als er, älter als die Viererspitzbreccie, welche wir gleich den Seetonen in die Riß-Würm-Interglazialzeit stellen.

Die Seetone sind die älteste Ablagerung der Riß-Würm-Interglazialzeit unseres Gebietes. Sie schließen sich unmittelbar an die Rißmoränen an. Für den zweiten Breccienhorizont bleibt daher kein Raum mit in jener Zeit, und wenn er älter als der der Viererspitz ist, so muß er in eine ältere Interglazialzeit gehören. Als solche kommt für die Hochland-, die Schachen- und die Längenfeld-Kreuzeckbreccie in erster Linie die Mindel-Riß-Interglazialzeit in Betracht. Wir halten die letztgenannten Vorkommnisse daher für gleich alt mit der Höttinger Breccie, deren Zugehörigkeit zu der Mindel-Riß-Interglazialzeit wir eingehend begründet haben (18). Die Höttinger Breccie zieht sich allerdings viel weiter ins Tal herab, als es unsere Vorkommnisse tun; sie erstreckt sich bis in das Bereich der alten Inntalterrasse, und erst auf derselben vollzieht sich der Übergang der Schutthalde in einen Schuttkegel. Diesem allerdings fehlt das gerollte Material, das in der Längenfeld–Kreuzeckbreccie eine so hervorragende Rolle spielt, und wenn er in seinen tiefsten Partien sich bis 70 m über dem Inn herabzieht, so ist im Auge zu behalten, daß in der nächsten Nachbarschaft, nur 4.5 km weit talabwärts, das Bohrloch von Rum[1] eine außergewöhnlich tiefe jugendliche Einsenkung des Inntales verrät. Möglicherweise hat sie die untere Partie der Höttinger Breccie mit ergriffen. Die Tatsache, daß manche Bänke im Mayerschen Steinbruche leicht bergwärts fallen, macht eine tektonische Einbiegung gerade hier nicht unwahrscheinlich. Wenig weiter abwärts bricht bei der Rumer Alp die Breccie hoch über dem Inn ab, ähnlich wie die Längenfeld-Kreuzeckbreccie über der Bodenlahne.

---

[1] Vgl. O. Ampferer, Über die Bohrungen von Rum und bei Häring in Tirol und über quartäre Verbiegungen der Alpentäler. Jahrb. d. geolog. Staatsanstalt, Wien LXXI, 1921, S. 71.

Zeigt die Höttinger Breccie gerade bei Hötting in ihrem morphologischen Auftreten an einer Stelle Ähnlichkeit mit der Viererspitzbreccie, so ergeben sich in geologischer Hinsicht große Verschiedenheiten. Während sich die Viererspitzbreccie mit den lakustren Tonen des Isartales verzahnt, bildet die Höttinger Breccie an ihrer tiefsten Stelle den Sockel der entsprechenden Formation des Inntales und wird von derselben überdies durch den Höttinger Schutt getrennt, der die Riß-Würm-interglazialen Ablagerungen des Inntales einleitet. Ihn vergleichen wir mit der Viererspitzbreccie. Es überlagert im Inntale die lakustre Formation eine auf dem Lande vonstatten gegangene Wildbachbildung; im Isartale erscheint sie gleichzeitig mit einer mächtigen Gehängeschuttbildung. Sollte sich die Ansicht von AMPFERER bestätigen, daß die Dawaldbreccie (8, S. 184, 192. 11, S. 739) zum Delta des Vomperloches gehört, dann hätten wir auch im Inntale Breccien aus der Zeit des großen Riß-Würm-Interglazials.

In unserem Gebiet hat die Alpspitzbreccie in der Unter-Leutasch so viel Ähnlichkeit mit der Viererspitzbreccie, daß wir sie unbedenklich mit derselben parallelisieren. Mit Vorbehalt tun wir gleiches mit der Breccie und dem Delta an den Öfen bei der Ober-Leutasch. Auch die Nagelfluh der Wanne bei Eschenlohe (23, S. 222) gehört zu den tief in das Tal herabreichenden Nagelfluhbreccien. Dagegen schließt sich die interglaziale Breccie der Hochalpe im Karwendeltale durch den Mangel eines Hintergehänges mehr dem mittleren Breccienhorizonte der Mindel-Riß-Interglazialzeit an. Ob der von FELS (19) unter dem Gipfel der Moserkarspitze im Karwendelgebirge gefundene Breccienrest dem letzteren Horizonte beizuzählen ist, oder ob er dem der Törlbreccie entspricht, vermögen wir nicht zu sagen.

Die drei von uns unterschiedenen Breccienhorizonte verraten uns eine fortschreitende Umgestaltung des Gebirges. Sie ist minimal seit Ablagerung der jüngsten, der Riß-Würm-interglazialen Breccien, recht ansehnlich seit der Bildung der Mindel-Riß-interglazialen. Der Hochlandbreccie am Wörnergrate ist das Hintergehänge genommen. Statt seiner erstreckt sich das Wörnerkar. Die gesamte Ablagerung ist durch tief eingeschnittene Täler in einzelne Vorkommnisse zerlegt worden, die sich auf Riedel zwischen Tälern beschränken. Die Schachenbreccie kann sich ursprünglich nicht auf den schmalen Grat des Teufelsgsaß beschränkt haben. Sie muß sich dort weiter erstreckt haben, wo heute die Nische der Schachenalm liegt. Bereits REIS hat darauf hingewiesen (12, S. 77), daß die Längenfeld-Kreuzeck-Breccie einen weit größeren Raum für ihre Bildung benötige als sie heute einnimmt: der tiefe Einschnitt des Höllentales trennt sie vom Ursprungsorte ihres Materiales. Alle drei Breccien beschränken sich auf eine bestimmte Höhenzone. Sie haben sich gewiß einst weiter talwärts erstreckt. Aber jede Spur fehlt hier von ihnen. Tief müssen sich die Täler eingeschnitten haben, in die sie ausliefen. Daß endlich sehr bedeutende Veränderungen sich im Antlitz der Alpen vollzogen haben, seitdem ein Gebirgsbach quer über den Wettersteinkamm beim Törl hinweggeflossen ist, bedarf keiner weiteren Erörterung. Es fragt sich nun, ob alle diese Veränderungen in einer bestimmten Reihe verlaufen, nämlich

Glieder einer normalen Abtragungsgeschichte sind, oder ob sie außerdem die Annahme tektonischer Veränderungen erheischen.

Die Hochland- und die Schachenbreccie sagen in dieser Hinsicht nichts Bestimmtes aus. Ihre Zerschneidung kann verursacht sein durch eine Talbildung, die sich infolge einer früheren Hebung langsam in das Gebirge hineinfraß oder die rasch der letzteren folgte. Dagegen gibt die Längenfeldbreccie eine bedeutsame Auskunft. Sie führt erratische Geschiebe, die bis zu einer Höhe von 1675 m vorkommen, während solche in den Hangendmoränen der Gegend, die am Nordabfalle des Kreuzecks im Stegerwalde weit größere Verbreitung haben als die Karte von Reis und Pfaff angibt, bloß bis 1440 m gefunden wurden. Daraus folgt, daß vor der Breccienbildung das zentralalpine Eis näher an den Nordabfall des Wettersteingebirges herantreten konnte als während der letzten Vergletscherung, daß es das kalkalpine Eis mehr zur Seite drängen konnte als später. Es war also relativ stärker. Das mußte der Fall sein, wenn die Kalkalpengletscher schwächer waren als später, wenn also die Kalkalpen damals weniger hoch waren. Wir schließen deswegen auf eine seit der Ablagerung der Breccie erfolgte Hebung des Wettersteingebirges. Diese Folgerung gilt auch für den immerhin möglichen Fall, daß die Gneisgeschiebe bei den Trögeln nicht der Würmvergletscherung, sondern einer älteren angehören. Dann würde sich ergeben, daß während der Würmvergletscherung das zentralalpine Eis noch weniger hoch an den Vorlagen des Wettersteingebirges heraufgereicht hätte, daß es noch mehr gehindert gewesen wäre, sich hier auszudehnen als vor Ablagerung der Breccie; die Verschiedenheit zwischen der Würmvergletscherung und jener, welche der Bildung der Längenfeldbreccie vorausging, würde noch größer sein, als wir annehmen.

Auch das Kalkgeröll am Törl weist auf eine jugendliche Hebung des Wettersteingebirges. Hier gibt es heute in mehr als 1700 m Höhe nur einen beständig fließenden Bach, nämlich den Abfluß des Höllentalferners. Sonst sickert alles Wasser wegen der sehr tiefen Lage des Karstwasserspiegels in die Tiefe. Ein Bach, der eine 100 m tiefe Klamm im Kalke auswaschen konnte, setzt entweder einen im Westen befindlichen, höher gelegenen Gletscher oder eine seichte Lage des Grundwasserspiegels voraus. Für einen solchen Gletscher ist heute kein Raum; er verlangt an Stelle des heutigen Frauenalpl eine hohe Aufragung, von der keine Spur mehr vorhanden ist. Entweder ist sie gänzlich abgetragen worden oder in die Tiefe gesunken. Es ist aber auch denkbar, daß sich der heutige Wettersteinkamm gegenüber dem Frauenalpl gehoben hat. Ein Anhaltspunkt spricht für die eine oder andere tektonische Bewegung: mächtige Schutthalden umsäumen den Abfall des Wettersteingebirges gegen das Frauenalpl hin. Sie verraten, daß hier, wo die Karte von Reis und Pfaff eine Störungslinie verzeichnet, eine Unstetigkeit des Oberflächengefälles noch nicht ausgeglichen, also kürzlich entstanden ist. Wollen wir nicht zur Annahme eines alten Gletschers greifen, der von einem höheren Frauenalpl sich gegen die Meilerhütte hin erstreckte, so müssen wir annehmen, daß im ganzen Gebiete der Karstwasserspiegel viel seichter lag, daß das ganze Gebirge weniger hoch lag. Darauf weist

eine Tatsache. Westlich vom Mitterkreuz der westlichen Karwendelspitze liegt eine große, mehr als 50 m tiefe Doline mit 2231 m Bodenhöhe. Sie zeigt eine alte Karsthochfläche im Karwendelgebirge gerade dort an, wo es sich gegen das Mittenwalder Tor hin senkt. Diese Karsthochfläche ist bis auf diesen einen Rest durch die Entwicklung der Hänge des Karwendelgebirges aufgezehrt worden. Die Hangentwicklung setzt aber eine Hebung voraus. Daß sich ein Rest der alten Karsthochfläche gerade dicht beim Mittenwalder Tore erhalten hat, erweckt den Eindruck, daß dieses an einer Stelle geringster Hebung des Gebirges eingeschnitten ist, während das Wettersteingebirge im Westen und das Karwendelgebirge im Osten Gebiete stärkerer Hebung anzeigen. Aber wenn man auch im Sinne dieser Erklärung den Wettersteinkamm als relativ stark gehoben betrachtet, muß man auch zur Annahme greifen, daß er stärker gehoben war als seine unmittelbare Vorlage, das Frauenalpl, denn von diesem kam der Bach, der in die sich hebende Kette einschnitt. So drängt sich auch bei diesem Erklärungsversuche die Frage auf, ob die über ihrer nördlichen, reich gegliederten Vorlage des Frauenalpl mit dem Schachenkopf, des Hirschbühl, des Kämi- und Zirbenkopfes sich jäh und prall erhebende Wettersteinwand auf einen jugendlichen Bruch zurückzuführen sei, längs dessen sich die Scholle des Wettersteinkammes emporgehoben habe, vielleicht noch gegenüber einem Widerlager von nunmehr abgetragenen Raibler Schichten. Alle die mit der Meiler-Nagelfluh und -Breccie in Verbindung stehenden Probleme fänden durch eine solche Annahme eine befriedigende Lösung.

Gibt es also Hinweise darauf, daß sich das Wettersteingebirge während der Zeit unserer Breccienbildungen ganz entschieden gehoben hat, so fehlt es im Norden nicht an Anzeichen einer starken Senkung. Die Anzapfung des Höllentales durch den Hammerbach setzt eine solche in der Talweitung von Garmisch-Partenkirchen voraus. Diese erscheint in den Alpen als ein recht fremdartiges Gebilde. Sie hat eine Talsohle von außergewöhnlicher Breite, die man durchaus nicht auf die Ausräumung widerstandsunfähiger Gesteine zurückführen kann, denn solche sind in der Gegend in bescheidenem Umfange vorhanden. Wo sie ausgeräumt sind, sind nur schmale Furchen zwischen schmalen Rippen und keine breite Weitung entstanden. Das sieht man deutlich in der Längstalfurche zwischen Partenkirchen, wo Rippen von Raibler Kalken mit Furchen von Raibler Sandstein wechseln. Zusammen bilden beide eine Talung, deren Boden zwischen 900 und 1000 m wechselt und recht jäh gegen Partenkirchen abfällt. Die dortige Talweitung liegt 200 m tiefer. Sie steigt westwärts sanft gegen Grainau bis auf 750 m an. Zwischen der Schmölz und Garmisch wird sie von der Loisach durchflossen. Weiter westwärts zieht sie aber nicht mehr an letzterer aufwärts, sondern neben deren ziemlich engem Tale gegen den Eibsee hin. Der mächtige Trümmerhaufen eines von der Riffelspitz abgegangenen Bergsturzes trennt diesen von ihr ab. Unverkennbar liegt er in ihrer Fortsetzung. Erst an seinem Westufer findet sie ihr Ende. Da erheben sich jäh 500 m über dem Spiegel des Sees die Wände von Hauptdolomit unter den Törlen. 200 m steigen an ihnen Schutthalden empor. Die Zerstörung der Wände dauert also fort. In nicht allzu

ferner Zeit werden sie ihr zum Opfer gefallen sein. Daß sie noch vorhanden sind, zeugt von ihrer Jugendlichkeit. Die üblichen wandbildenden Faktoren kommen bei ihrer Entstehung nicht in Frage. Es fließt an ihrem Fuße kein lebhaft einschneidender Fluß entlang, sondern hier liegt der stille Eibsee, dessen Brandung nicht einmal ihren Schutt zu beseitigen vermag. Kein Gletscher ist an ihnen entlang geflossen, der sie unterschnitten haben könnte; senkrecht verlaufen sie zur Richtung des Eisstromes, der über die Törlen kam. Ich weiß nur eine Entstehungsmöglichkeit für die Wände unter den Törlen am Eibsee: daß sie durch einen ziemlich jungen Bruch gebildet worden sind, an dem das Westende der Garmisch-Partenkirchener Talweitung in die Tiefe sank. In dieser Auffassung begegne ich mich mit Reis (12, S. 107), welcher diese auffälligen Steilabstürze am Eibsee für tektonisch bedingt hält, falls damit die Wände unter den Törlen gemeint sind. Es ist denkbar, daß gleichzeitig mit diesem Einbruche der Bergsturz von der Riffelspitz, der das obere Ende des Einbruchfeldes abgliederte, und ein weiterer Bergsturz, der nach Ehrwald lief (16), abgingen.

Die geologischen Verhältnisse stehen mit einer solchen Annahme im Einklang. An einer Stelle ragt am Fuße der Wände unter den Törlen am Südwesteck des Eibsees festes Gestein auf, nämlich Jura, überlagert von Neokom. Höher folgen am Weiter Bach Kössener Schichten. Alle diese Schichtglieder sind jünger als der Hauptdolomit der Törlen. Man kann sich sehr wohl vorstellen, daß sie an ihm abgesunken sind. Allerdings wäre auch denkbar, daß der Dolomit über sie in ähnlicher Weise hinweggeschoben sei, wie der Wettersteinkalk des Schneefernerkopfes und der Wetterspitzen über den Jura und das Neokom bei Ehrwald. Allein eine direkte Überlagerung ist nirgends zu erkennen. Auf der Karte von Reis und Pfaff, deren Verläßlichkeit ich gerade hier feststellen konnte, ist die horizontale Entfernung vom Fuße der Dolomitwand bis zum obersten Ausbiß der Kössener Schichten 100 m bei einem Vertikalabstand von 60 m, bis zum Neokom sind es fast 200 m in der Horizontalen und 100 m in der Vertikalen. Da ist Platz genug für eine Verwerfung oder starkes Abbiegen der Schichten, aber keine Möglichkeit, eine Überschiebung zu beweisen.

Gleich den Wänden unter den Törlen bildet die von ihnen begrenzte über 1500 m hohe Hochfläche auf den Törlen einen sehr bemerkenswerten Zug in der Oberflächengestaltung des Loisachgebietes. Sie zeigt nur leichte Wellungen; flache Rundhöcker, im Bereiche des Plattenkalkes durch grobe Karren zerfressen, wechseln mit flachen Wannen, in denen sich Wiesen dehnen, und die auf unterirdische Entwässerung angewiesen sind. Da und dort zeigen sich dolinenartige Vertiefungen, manchmal auch Schlundlöcher. Wir haben hier auf 4 qkm eine Landschaft, wie wir sie sonst nur auf den Hochflächen weiter im Osten der Kalkalpen, auf dem Steinernen Meer und auf dem Dachsteinplateau antreffen. Ein Karstgelände ist vom eiszeitlichen Eise überschritten und umgestaltet worden. Nicht häufig findet man erratische, aus den Zentralalpen stammende Geschiebe, während im Winkel zwischen den Törlwänden und dem Abfalle der Zugspitze von dieser ein Gletscher herabkam, wie N 20° O gerichtete Gletscherschliffe bei der verfallenen Seealpe leh-

ren. Diese Moränen erstrecken sich bis nahezu zum Eibsee herab, erweisend, daß dessen Südufer schon zur letzten Eiszeit eingetieft war. Weiter folgen östlich die Bergsturzmassen des Eibseebergsturzes, westlich die des Ehrwalder Bergsturzes (16). Moränen ohne zentralalpines Material liegen auch auf dem Südabfalle des Törlplateaus. Die Wände gegen den Eibsee sind frei von glazialen Wirkungen und glazialen Ablagerungen; sie sind postglazialer Entstehung. Während nun aber die ähnlich gestalteten Hochflächen der weiter östlich gelegenen Kalkalpen hoch über das umgebende Gebirge aufragen, ist die Hochfläche der Törlen in dasselbe eingesenkt. Fremdartig liegen sie am Fuße der Zugspitz (2964 m). Im Westen werden sie überragt durch die 800 m höhere Upspitz. Im Norden haben wir Gipfel von 1900 bis 2000 m.

Eigenartig ist auch die Art und Weise, wie die Loisach um das Plateau herumfließt. Unterhalb des Lermoser Beckens tritt sie in die sanft nach Norden ansteigende Fläche des Pontiefensteiges, die sich vor dem Plateau der Törlen streckt. Auf der anderen westlichen Talseite kommt ihr vom Abfalle des Daniel der Häselgörgraben entgegen. Es sieht aus, als ob hier ein felsiger Riegel quer vor das Lermoser Becken gelegen habe, den die Loisach in ziemlich engem Tale durchmißt. Dann tritt sie in breiterem Tale an den Westabfall der Törlen, der sich plump und ungegliedert 700 m über ihr erhebt. Bei Griesen biegt sie rechtwinklig um, obwohl sie ein niederer Paß zur Ammer herüberleiten könnte, der nicht gerade hoch über die Terrassenfläche des Arlesberges an der Umbiegungsstelle ansteigt. Parallel zum stumpfen Ende, das die Garmisch-Partenkirchener Talweitung bis zum Eibsee streckt, fließt sie nach Osten, vom Eibseegebiet durch den Miesing-Berg getrennt. Dieser beginnt massig als Hoher Seeberg (1351 m) gegenüber dem Nordende des Törlplateaus, von dem er nach den Untersuchungen von Reis und Pfaff (12) durch eine Verwerfung getrennt ist. Einen sich gabelnden Sporn streckt er an das Nordufer des Eibsees, einen längeren längs der Loisach. Das ist der lange, schmale Rücken des Gschwandwaldes, der sich nicht höher über die Loisach erhebt als die Abdachung am Pontiefensteige, aber sich talabwärts senkt. Kaum 800 m hoch endet er bei der Schmölz. Auffällig ist seine Schmalheit. Sie kommt im Landschaftsbilde nicht voll zur Geltung, weil der Trümmerhaufen des Lerchwaldes vom Eibseebergsturz sich unmittelbar an ihn anlehnt. Auch ist er von dessen Trümmern weithin bedeckt. Denkt man sich all dieses Trümmerwerk entfernt, so stellt sich heraus, daß die Loisach sozusagen zwischen ihrem linken Talgehänge und einer rechts von ihr befindlichen felsigen Talterrasse die Weitung von Garmisch-Partenkirchen betritt, aber vom Miesing-Berge an des rechten Talgehänges entbehrt. Nie und nimmer hätte sich in solcher Situation ihr Lauf entwickeln können. Er mußte in die westliche Fortsetzung der Talweitung herabgleiten, falls diese bei seiner Anlage vorhanden gewesen ist. Noch als er bis zu niederen Felsterrassen eingeschnitten war, mußte ein rechtes Talgehänge vorhanden gewesen sein. Dieses ist seither verschwunden. So erhalten wir denn im Norden der Eibseegegend wie an ihrem Westsaume Hinweise auf starke Einsenkungen in junger geologischer Vergangenheit. Im Verein mit der anziehenden Wirkung, die die Talweitung von Garmisch-Partenkirchen auf den Bach

des Höllentales ausgeübt hat, führen sie uns zu der Annahme, daß jene Talweitung ein ziemlich junges Senkungsfeld ist.

In dieses Senkungsfeld münden der von Süden kommende Hammerbach und die Partnach in viel bewunderten Klammen. Auf den ersten Blick könnte es scheinen, als ob hier die an Stufenmündungen üblichen Klammen vorlägen. Allein beide Klammen weichen von solchen ab. Man steigt in das Höllental und in das Partnachtal nicht außen am Gehänge der Talweitung empor wie an den Stufenmündungen, sondern geht in ihre Mündungen hinein, um dann durch einen Anstieg die Klamm zu vermeiden, die erst in einiger Entfernung von der Talweitung endet. Weder das Höllental noch das Partnachtal haben oberhalb ihrer Klammen einen so wohl entwickelten Talboden wie z. B. das Leutaschtal bei Mittenwald, in den der Bach beim Klammanfange einschneidet, während sich der Talboden neben ihm als Terrasse fortsetzt. Höllentalbach und Partnach treten vielmehr von oben ebenso durch Felsentore in ihre Klammen hinein, wie sie unten in solchen aus ihnen herauskommen. Ihre Klammen tragen den Charakter von Talengen, wie z. B. die Salzachöfen, die sich an einen Ort starker Hebung anknüpfen. Trifft letzteres zu, so zeigen sie eine Aufsattelung in der Richtung Waxenstein–Wamberg, also parallel zum Senkungsfelde von Garmisch-Partenkirchen an. Als eine weitere Erhebungswelle tritt nach dem früher Auseinandergesetzten uns der Hauptzug des Wettersteingebirges entgegen. So ergeben sich denn nicht wenige Anhaltspunkte für junge Krustenbewegungen im Wettersteingebirge und seinen nördlichen Vorlagen, von Krustenbewegungen, die sich teilweise wenigstens, wie die Längenfeldbreccie lehrt, während des Eiszeitalters abgespielt haben.

Die Eiszeit in den bayerischen Hochalpen.

Von Albrecht Penck.

(Vorgetragen am 12. März 1925 [s. oben S. 140].)

Unsere glazialgeologischen Beobachtungen in den bayerischen Hochalpen und über die dortigen alten Breccien[1] haben nicht bloß dank der ins Einzelne gehenden Untersuchung, sondern namentlich wegen besonderer Gunst der Verhältnisse auf eng begrenztem Raume Einzelergebnisse gezeitigt, die auf fast alle Fragen der Glazialgeologie Bezug haben. Welche allgemeineren Folgerungen sich aus ihnen ziehen lassen, wollen wir nunmehr zu zeigen versuchen, indem wir an die Zusammenfassung von Einzelbeobachtungen allgemeinere Erörterungen knüpfen und zugleich darlegen, welche Fortschritte in unseren Kenntnissen seit 1882 gemacht worden sind, als wir von dem Gebiete eine erstmalige glazialgeologische Beschreibung gaben.

Das Kärtchen S. 350 über die Vergletscherung der bayerischen Hochalpen faßt unsere Beobachtungen über die obere Gletschergrenze und die Stromlinien des Eises in ein einheitliches Bild zusammen. Es erstreckt sich über die engeren Grenzen unseres Untersuchungsgebietes etwas hinaus, um den Anschluß an andere ähnliche Darstellungen zu erzielen, die für den Norden von R. v. Klebelsberg (17)[2], für den Osten durch H. v. Wolf (26) und für den Westen durch Jos. Müller[3] gegeben worden sind, so daß nunmehr eine zusammenfassende Karte der Vergletscherung des gesamten Alpengebietes zwischen Iller- und Achenseetal gegeben werden könnte. Das Kärtchen zeigt, daß der bayerische Hochalpenzug des Wetterstein- und Karwendelgebirges während der Eiszeit wie ein gewaltiger Damm wirkte, der die von den Zentralalpen kommenden Eismassen aufstaute. Durch das Tor von Mittenwald fanden sie einen Ausweg nach Norden. Zu diesem hin senkte sich ihre Oberfläche, im Tore selbst fielen sie um 200 m, und vor demselben breiteten sie sich fächerförmig aus. Die ihnen oberhalb des Tores zufließenden Eismassen des Wettersteingebirges und der Mieminger Kette waren durch sie im Gaistal hoch aufgestaut. Gleiches geschah mit den entsprechenden Gletschern des Karwendelgebirges; doch wo sich den letzteren im Bärenalpl eine Lücke bot, durch die sie direkt nach Norden abfließen konnten, da stürzten sie in

[1] Diese Sitzungsberichte S. 301 und 330.

[2] Die in Klammern stehenden Nummern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis S. 302.

[3] Die diluviale Vergletscherung und Übertiefung im Lech- und Illergebiet. Jahrb. Kgl. preuß. geolog. Landesanstalt Berlin XXXVIII, 1917. S. 1.

1700 Isohypsen der Eisoberfläche ········· Grenzen zentralalpiner Geschiebe ----> Abirrende Bahnen zentralalpiner Geschiebe
Gletscherschliffe Stauseen Vorstoß-Moränen Gschnitz-Endmoränen Daun-Endmoränen Alte Breccien
Firnkämme und Kare Nunataker
2 1 0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 Km.

Die Vergletscherung der bayerischen Hochalpen. 1 : 400 000.

gewaltigem Eisfalle mindestens 300 m tief herab. Ähnliches dürfte am Hochalpensattel geschehen sein. Flach fächerförmig breitete sich das Eis in der breiten Längstalweitung von Mittenwald–Garmisch aus und überflutete den Voralpenzug in der von R. v. Klebelsberg dargestellten Weise. Unser Kärtchen schließt sich an das seine in befriedigender Weise an.

Dagegen können wir unsere Isohypsen der Gletscheroberfläche nicht an die von H. v. Wolf für das Rißgebiet angegebenen (28) anschließen, wo die Bestimmung der oberen Grenze der Vereisung wegen des Mangels an leicht kenntlichen erratischen Materialien besonders schwierig ist. Daß seine Werte nicht zu seiner Annahme passen, ein zentralalpiner Eisstrang sei über die Vereinsalp gegangen, ist S. 308 auseinandergesetzt; sie sind dafür etwa 150 m zu hoch. H. v. Wolf ist zu ihnen augenscheinlich unter dem Eindrucke der Zahlen gekommen, die er für das Achenseetal erhalten hat. Hier traf er zentralalpine Erratika noch auf dem Schildenstein auf der Wasserscheide zwischen Achensee und Tegernsee in 1595 m Höhe. Die Eishöhe war hier also fast ebenso groß als wenig unterhalb Partenkirchen im Loisachtale. Dabei sind wir aber weiter nördlich. Daraus ist aber nicht zu schließen, daß zwischen beiden Örtlichkeiten das Eis allenthalben bis 1600 m gereicht habe. Vielmehr ergibt sich aus den von H. v. Wolf mitgeteilten Daten, daß der dem Achentale folgende Eisast beim Eintritte in das Isartal sich in ähnlicher Weise fächerförmig ausbreitete wie der aus dem Mittenwalder Tore herauskommende. In 1505 m Höhe strandete es noch kristallines Material auf der

Nordseite des Demeljoches (28, S. 260) und hinterließ solches nördlich davon auf der Hochalpe in 1400 m Höhe, nahezu auf dem höchsten Punkte des Höhenzuges, der sich zwischen den vom Achensee kommenden Walchenbach und das Isartal von Nordosten her schiebt (26, S. 178). Danach ist kein Zweifel, daß der gesamte Höhenzug vom Achentaler Eise überflutet war, das an der Walchenmündung bei Fall mindestens so hoch stand wie das durch das Mittenwalder Tor gekommene bei Vorder-Riß. Wir erhalten daher für das Längstal der Isar zwischen Wallgau und Fall kein kontinuierliches Gefälle. Es strömte in das Längstal sowohl von Westen wie von Osten Eis ein. Den Weg des von Westen her kommenden Eises haben wir bereits verfolgt. Es gehört dem Eisfächer von Mittenwald an. Daß nun das Achentaler Eis die entgegengesetzte Richtung im Isartale einschlug, lehrt die Verbreitung der kristallinen Geschiebe in der Gegend von Fall. Sie dringen hier, wie H. v. Wolf gezeigt hat, ziemlich tief in das Gebiet der Dürrach und Westerndürrach ein, wo sie bis 1000 m Höhe ansteigen. Ich selbst fand solche auf der Terrasse im Dürrachtale an der Mündung der Westerndürrach, H. v. Wolf auch auf der benachbarten Wiesalpe (1015 m). Achentaler und Mittenwalder Eis begegneten also einander im Längstale der Isar zwischen Vorder-Riß und Fall. Hier reichen die interglazialen Seetone und die anderen interglazialen Ablagerungen des Wilfertsgrabens bis weit ins Isartal hinein, wo sie sonst ziemlich radikal ausgeputzt sind (22, S. 192). Sie haben sich erhalten, weil hier die Eisbewegung in der Talrichtung gleich Null wurde und nur ein Überfließen des Eises aus dem Tale heraus in nördlicher Richtung möglich war. Gletscherschliffe unter den Liegendmoränen der interglazialen Ablagerungen verraten, daß ein solches Herausströmen auch während der vorletzten Eiszeit stattfand. Sie richten sich nach Nordosten. Gletscherschliffe der letzten Eiszeit kennen wir dort nicht.

Die Verhältnisse im Längstale der Isar liegen also genau so wie im Längstale der Jachenau, das, wie R. v. Klebelsberg zeigte (17, S. 259), vom Westen, Süden und Osten von Eis betreten wurde. Von Westen her kam solches vom Walchenseegletscher, nämlich dem nach Norden gerichteten Hauptstrange des Mittenwalder Eises, von Osten her vom Isartalgletscher, der vom Achentaler Eis gespeist wurde. Von Süden kam Eis aus dem Längstale der Isar, wo, wie sich ergeben hat, Mittenwalder und Achentaler Eis zusammentrafen.

Um den Anschluß unserer Karte an die von Jos. Müller entworfene des Lechgletschers zu erhalten, müssen wir zunächst aus den spärlichen vorliegenden Beobachtungen eine Vorstellung über die Verbreitung des über den Fernpaß gekommenen Eises zu gewinnen suchen. Die Eishöhe kann dort, wo sich am Fernpasse ein mächtiger Ast vom Inngletscher loslöste, gewiß nicht geringer als 2300 m gewesen sein, denn 9 km weiter südlich flutete er über den Tschirgant (2372 m). In der Tat fand Falbesoner[1] auf dem Alpleskopfe am Eingange des Passes noch in 2150 m zentralalpine Geschiebe. Da der Gipfel

[1] Der Fernpaß und seine Umgebung in bezug auf das Glazialphänomen. XI. Progr. d. Privatgymnasiums Brixen 1886. S. 20.

(2259 m) gerundet ist, ist er wahrscheinlich vom Eise überflossen gewesen. Ferner passierte ein Eisstrang das Marienberger Jöchl, wie ich bereits 1882 zeigen konnte (3, S. 58). Gerundete Formen lehren, daß er hier bis 2073 m reichte (10, S. 508). Leider haben die Abfälle des Grubigsteins gegen Bieberwier und der Upsspitz gegen Lermoos noch nicht gelockt, die Höhe der Erratika auf ihnen zu bestimmen. Aus ihren gerundeten Formen schließen wir mit J. Sölch (31, S. 73) auf eine Eishöhe von 1900 bis 2000 m im Becken von Lermoos. Ein prachtvoller Gletscherschliff verriet 1880 bei Bieberwier, daß die Eisbewegung hier nach Norden bis Nordnordosten gerichtet war, auf das Loisachtal zu (3, S. 464). Weiter nördlich war das weite Plateau auf den Törlen (1584 m) auf der rechten Seite des Loisachtales vom Eise überschritten gewesen. Es ist in seiner ganzen Erstreckung eine großartige verkarstete Rundhöckerlandschaft. Kristalline Geschiebe finden sich ziemlich selten in 1530 bis 1550 m Höhe. Es kann keine ganz dünne Eismasse gewesen sein, die hier überfloß. Die rundlichen Formen des Tormetz (1810 m) auf der anderen Talseite lassen mutmaßen, daß sie auch darüber reichte. Wir nehmen daher für die Eishöhe am Loisachknie bei Griesen rund 1800 m an. Auf 1700 m endlich veranschlagt sie R. v. Klebelsberg (17, S. 238) dort, wo sich weiter nördlich das Eis durch die Elmau ins Ampertal drängte und Inntalgesteine dahin frachtete.

Von diesem südnördlich gerichteten Hauptstrang des Eises lösten sich nach beiden Seiten Äste los. Schon im Fernpaßtale zweigte sich ein Arm ab, der über den Tegespaß ins Lechgebiet floß, wie Falbesoner zuerst festgestellt hat. Ein zweiter Arm ging vom Lermooser Becken durch das Hintertorental gleichfalls zum Lech. Hatte er ein ähnliches Oberflächengefälle wie der dem Loisachtal folgende, so hatte er, bevor er den Plansee erreichte, dieselbe Höhe wie jener bei Griesen. Es ist daher ausgeschlossen, daß ein Ableger von ihm, wie Joseph Müllers Karte darstellt, über das Planseetal und über das Neidernachtal zum Loisachtale zurückkehrte. Vielmehr ist sicher, daß sich von letzterem bei Griesen ein Ast durch das Neidernachtal zum Ostende des Plansees zog und von hier durch den Ammerwald zur Amper floß, deren Längstal er nach R. v. Klebelsberg mit 1500 m Oberflächenhöhe betrat. Die Hauptmasse des Fernpaßeises aber floß mit über 5 km Breite über die Hochfläche der Törlen in die Talweitung von Garmisch-Partenkirchen, wo sie mit dem linken Flügel des Mittenwalder Eisfächers zusammenstieß. Wir haben es also auch nördlich des Fernpasses mit einem gewaltigen Eisfächer zu tun, dessen hauptsächliches Ausstrahlungsgebiet das Becken von Lermoos war. Von hier sank die Eisoberfläche nach Nordwesten und Nordosten, ganz ebenso wie die Oberfläche des Eises nördlich Mittenwald und ähnlich wie die des Achentaler Eises in der Nähe des Isartales.

Nördlich der Mauern des Wetterstein- und Karwendelgebirges breiteten sich also drei große Eisfächer aus, die jeweils nördlich der Mitte der drei Gebirge miteinander in Berührung kamen. Hier war daher die Eishöhe an ihrem Nordabfalle am geringsten. Daran änderte sich nichts durch die Tatsache, daß aus beiden Gebirgen hier eigene Gletscher herauskamen, nämlich im Partnachtale und im Rißtale. Am Ende der Längstalstrecke der Riß hat

das Eis nicht über 1700 m gestanden. Viel höher aber auch kann nicht das dem Partnachtale entquellende Eis gereicht haben. Es hat sicher nicht die Höhe der Schachenalm erreicht und blieb in deren Nähe unter 1800 m. Damit steht im Einklang, daß sich auf der Nordseite des Reintales, wie das obere Partnachtal auch genannt wird, am Schönberge eine deutliche Schliffkehle erst in 1900 m, und weiter oberhalb am Blassenkopf erst in 2000 m Höhe findet. Das Reintal war also noch in seiner obersten Partie weniger hoch mit Eis erfüllt als das Geißtal (2200 m) zwischen Wettersteingebirge und Mieminger Kette. Erst auf der Höhe des Platt stand das Eis höher, es zog sich hier über rundgeschliffene Buckel von 2400—2500 m hinweg und lehnte sich in 2800 m Höhe an Schneefernerkopf und Zugspitz. Wenn es aber auch im Reintale weniger hoch reichte als im Geißtale, so stand es doch erheblich höher als die Stufenmündungen des kleinen und großen Hundstalls; nur die daran sich knüpfenden Kare, wie das obere Reintal und das Schüsselkar, ragten über den Talgletscher hervor. Ähnlich lagen die Dinge im Höllentale. Wenn sich die Beobachtung von A. SCHLAGINTWEIT (1, Taf. XIX) bestätigt, daß an der Partnach schon in der Mitterklamm erratisches Material vorkommt, so erscheint schon dicht am Fuße des Wettersteingebirges die Spur des Partnachgletschers verwischt.

Das Schicksal unserer drei Eisfächer war ein verschiedenes. Der des Achentaler Eises beschränkte sich auf das Isartal und gab nur einen kleinen Zweig zum Tegernsee ab. Der Mittenwalder Fächer gabelte sich. Der Hauptast folgte dem Walchensee-Kochelseetale nach Norden und dem Isartale nach Osten, der zweite floß nordwestlich ins Loisachtal, wo er sich mit dem über »die Fern« gekommenen Eise traf. Letzteres hat sich am öftesten gegabelt. Zwei Äste sandte es bis ins Lechtal. Sie brachten zentralalpine Geschiebe bis an die rechte Flanke von dessen Mündung. Zwei schmale Zweige schob es ins Ammertal. Vier große Tore führten die drei vom Inntale gekommenen Eisströme aus den Alpen heraus. Sie verbreiteten sich hier um so weiter im Vorlande, je größere Zuflüsse sie in sich vereinten. Das aus dem breiten und tiefen Loisachtale kommende Eis reichte im Ammerseetale am weitesten nach Norden. Etwas weniger weit erstreckte sich der Walchensee-Kochelseegletscher im Bereiche des Würmsees, noch weniger weit der Isargletscher und schließlich der sich auf dem Vorland im Wertachgebiete breit machende Lechgletscher. In kleinen Pforten erreichten im Ammertale und im Tegernseetale kleine Stränge zentralalpinen Eises gerade das Vorland. Nachstehende Tabelle stellt die Umbildung der drei großen Eisfächer dar:

Fernpaßstrang		Mittenwalder Strang		Achentaler Strang
Lechgl. r., Ammergl.,	Loisachtalgl. links	Loisachtalgl.,	Walchenseegl.	Isartalgl., Weißachtalgl.
Lechgl., Ammertalgl.	Loisachtalgl.		Kochelseegl.	Isartalgl., Tegernseegl.
Wertachvorlandgl.	Ammerseegl.		Würmseegl.	Eisfächer von Tölz

Das Bild über die Eisverbreitung in den Bayerischen Alpen, das sich nunmehr ergibt, entspricht im Grundriß dem von mir 1882 entworfenen. Nur erscheint die Vergletscherung viel mächtiger, das Bereich der Firnkämme

viel schmäler. Wir haben aber kein Inlandeis, wie damals angenommen, sondern bloß ein Eisstromnetz im Gebirge. Klarer als früher treten die Stränge zentralalpinen Eises hervor, die durch Lücken im nördlichen Gehänge des Inntales sich in die Kalkalpen ergossen, und es zeigt sich, daß sie noch mitten in den letzteren sich gut durch ihre Wölbung voneinander sonderten. Deutlich tritt ferner hervor, daß sie auch aus den Kalkalpen Zuflüsse erhielten. Aber diese sind nur so weit sicher nachweisbar, als sie sich in scharf umgrenzten Tälern bewegten. In der großen Längstalfurche zwischen Hochalpen- und Voralpenzug ist ihre Spur verwischt. Dasselbe gilt von jenem kalkalpinen Eise, das randlich das zentralalpine bei seiner Wanderung durch die Tore des Hochalpenzuges begleitete, wie wir im Mittenwalder Tore nachweisen konnten. Ähnlich war es am Fernpasse, an dessen rechter Seite zwar das zentralalpine Eis Erratika bis über die Mittenaualpe (1750 m) hinauf frachtete; aber an der linken Seite des Tegestales fehlen sie, wie Falbesoner ausdrücklich bemerkte, während sie auf der rechten auftreten. In welchem Mantel von kalkalpinem Eis der dem Achenseetale folgende Ast des Inngletschers stak, hat H. v. Wolf kürzlich gezeigt (26). Dort nun, wo die fächerförmige Ausbreitung der Eisstränge erfolgte, da breiteten sich die schmalen zentralalpinen Stränge mehr aus als ihre kalkalpinen Begleiter und überschütteten den größten Teil des Eisfächers mit kristallinen Geschieben. In welcher Weise dies im Bereiche des Mittenwalder Fächers geschah, haben wir einzeln dargetan. Dasselbe gilt vom Fächer des Fernpasses. Er frachtete zentralalpines Material nach Westsüdwest in der Richtung auf Heiterwang und nach Nordost auf die Törlen. Der Eisfächer des Achenseetales brachte kristalline Geschiebe sowohl nach Südwesten in das Dürrachtal wie auch nach Nordosten. Durch diese Ausbreitung zentralalpinen Eises wurden zentralalpine Geschiebe allenthalben bis an den Nordfuß des Hochalpenzuges verfrachtet, und das kalkalpine Eis scheinbar zum Verschwinden gebracht. Wir können seine Wege weder aus dem Partnachtale noch aus dem Rißtale heraus nach Norden verfolgen.

In welcher Weise die Verdrängung, denn nur um eine solche kann es sich handeln, erfolgte, konnten wir an der Flanke des Mittenwalder Eisfächers fesstellen. Die Grenze der häufigen zentralalpinen Geschiebe steigt nach Nordosten hin um beinahe 400 m an. Das sieht so aus, als hätte sich der zentralalpine Eisfächer geradezu unter seinen kalkalpinen Saum geschoben. Mehrfach ist bereits ausgesprochen worden (7, S. 272. 8, S. 180. 26, S. 217), daß ein solches Unterschieben geschah. Es erscheint durchaus denkbar. Sehr mächtige, sich deshalb rasch bewegende Eismassen zentralalpinen Ursprungs werden bei fächerförmiger Ausbreitung minder mächtige und daher langsamer fließende kalkalpine Eismassen nicht nur zur Seite drängen, sondern auch unterschieben können. Aber es ist auch in Erwägung zu ziehen, was beim Kommen und Gehen der Vergletscherung geschah. War zentralalpines Eis eher in den großen Tälern der Kalkalpen als deren eigene Gletscher, so mußten sich diese über jenes ergießen. Es kam keine Unterschiebung durch dasselbe zustande, sondern eine Überschiebung des zentralalpinen Eises durch das kalkalpine. In beiden Fällen haben wir zu gewärtigen, daß die Bahn des unter dem kalkalpinen Eise strömenden zentralalpinen Eises mit zahlreichen zentral-

alpinen Geschieben überstreut ist, die dann an den Grenzen jäh aufhören. Aber ein solches jähes Aufhören findet nicht statt. Vielmehr werden, ganz ebenso wie im Tore von Mittenwald, die zentralalpinen Geschiebe an den Flanken seltener und seltener und schließlich ganz selten. Es sieht so aus, als ob an den Rändern nur eine unbedeutende Bestreuung der kalkalpinen Gletscherbahnen mit zentralalpinem Materiale stattgefunden habe, und das erheischt eine andere Erklärung als durch Annahme von Unterschiebung des einen oder Überschiebung des anderen. Eine solche Erklärung bietet sich, wenn wir uns den Zerfall der Vergletscherung in seinen Einzelheiten vergegenwärtigen. Er vollzog sich in der Weise, daß die kalkalpinen Zuflüsse nicht mehr die in den großen Tälern liegenden zentralalpinen Eismassen erreichten, und diese konnten schließlich von unten her in die Täler hereindringen, die während der Höchstvergletscherung ihnen Zuflüsse gesandt hatten; hier frachteten sie zentralalpine Geschiebe aufwärts, die nur sparsam im Bereiche der frühereren kalkalpinen Gletscher ausgestreut wurden. Ähnliches mußte sich auch dort entwickeln, wo die kalkalpinen Zuflüsse der Talgletscher sich minderten, dann ging der in der Mitte gelegene zentralalpine Strang in die Breite.

Wir haben eine Reihe von Fällen kennengelernt, wo ein derartiges seitliches Abirren zentralalpinen Materiales in die Seitentäler hinein stattfand, die vorher dem Gletscher Zuflüsse zusandten. Dies gilt insbesondere für die bei Scharnitz mündenden Karwendeltäler, deren Mündungsbereich mit dem zentralalpinen Material überstreut ist, das sich im Gleierschtale bis zur Amtssäge verfolgen läßt. Das gilt vom Bereich des Gassellahnbach- und Seinsbachtales bei Mittenwald und insbesondere für das Rißgebiet. Hier bieten sich zwei Möglichkeiten, das Eindringen zentralalpinen Eises zu erklären: Entweder kam es, wie H. v. Wolf annimmt, über den Sattel der Vereinsalpe in das Fermersbachtal und aus diesem über den Sattel von Vordersbachau in das Rißtal selbst, oder es drang von unten her in dasselbe ein. Es hat sich gezeigt, daß die Ansicht von H. v. Wolf nicht bloß schwer mit den vorliegenden Beobachtungen in Einklang zu bringen ist, sondern auch zu einer Reihe recht schwer haltbarer Konsequenzen führt. Es muß nicht nur angenommen werden, daß alle Spuren des angenommenen Stranges zentralalpinen Eises auf dem Paßgebiet der Vereinsalpe völlig weggewischt worden sind, sondern es muß auch angenommen werden, daß die sich breitmachenden kalkalpinen Gletscher einen außergewöhnlich großen »mechanischen« Vorstoß von 5 km machten. Alle diese Schwierigkeiten werden beseitigt, wenn wir annehmen, daß die zentralalpinen Geschiebe aus dem Isartale von unten her in das Rißgebiet einwanderten. Wir erachten daher alle hier vorgefundenen zentralalpinen Geschiebe für abgeirrt und nehmen nicht an, daß sie über die Vereinsalpe gekommen sind, ebenso wie wir nicht glauben, daß die des Gleierschtales bei der Amtssäge über den Erlersattel dahin kamen, wo wir zentralalpine Geschiebe bis über 1900 m hinaus verfolgten. Denn zwischen hier und dem Gleierschtale fehlt im Christentale, wie auch Ampferer (10, S. 464) bemerkt hat, zentralalpines Material völlig. Auch die im Dürrachtale oberhalb Fall auftretenden zentralalpinen Geschiebe erachten wir für abgeirrt.

Solche abirrenden Geschiebe finden sich nur tief unten in den Tälern, und sie liegen stets in der Nähe von Stauseebildungen, die auf ein Zerreißen

des Eises hinweisen. Dies gilt auch für die im Gleierschtale bei der Amtssäge auftretenden: sie liegen in einer Bändertonablagerung. Die am Saume des großen Eisstromes gelegenen zentralalpinen Geschiebe stellen also keine Stromlinien dar, sondern sie zeigen lediglich an, bis wohin zentralalpines Eis bei dem Rückzug sich ausbreitete, als die kalkalpinen Zuflüsse aufhörten. Sie geben die Höhe an, die das zentralalpine Eis noch hatte, als es von den kalkalpinen Gletschern nicht mehr erreicht wurde. Es lehren uns die kalkalpinen Geschiebe im Wettersteinwald, daß bei einer Höhe von 1200 bis 1300 m der Talvergletscherung die seitlichen Zuflüsse aussetzten, und wenn sie an der rechten Flanke des Isartales im Norden höher ansteigen als im Süden, so bekundet dies, daß das Aufhören der kalkalpinen Zuflüsse sich im Norden früher fühlbar machte als im Süden, was naturgemäß erscheint.

Die Stromlinien des Maximums der Vergletscherung sind durch das Auseinanderfließen der unterernährten Talgletscher verwischt worden. Möglicherweise kann man ihre Spuren indes draußen im Alpenvorlande erkennen, wo während des Maximums der Vergletscherung eine stationäre Bewegung eingetreten sein muß. Vielleicht finden sich hier im Norden des Ammersees Gebiete, in denen kalkalpine Geschiebe ausschließlich vorherrschen; sie könnten dem kalkalpinen Eisstrange entsprechen, der das Wettersteingebirge umfloß, aus diesem durch den Partnachgletscher gespeist wurde, und der zwischen dem Fernpaß- und dem Mittenwalder zentralalpinen Eise im Loisachtale nach Norden strömte.

Die Tatsache, daß das in den Kalkalpen sich weit ausbreitende zentralalpine Eis sozusagen mit kalkalpinem verbrämt war, erschwert in hohem Maße die Festlegung der oberen Grenze des Eises. Dieselbe entbehrt in den Kalkalpen in der Regel der morphologischen Kennzeichen, die in den Zentralalpen so sicher zu ihrer Auffindung leiten. Schliffkehlen fehlen meistens. Das darf in einem Gebiete, das unter einer langsam sich bewegenden Eisüberschwemmung lag, nicht überraschen; denn diese war an ihren Ufern ebensowenig wirksam wie die Überschwemmung eines Flusses an ihren äußersten Grenzen. Zudem sind rundliche Formen dem niederen Gebirge vielfach eigentümlich und dürfen nicht ohne weiteres auf Eistätigkeit zurückgeführt werden. Nur an den immerhin seltenen Stellen, wo sich die aus den Zentralalpen gekommenen Eismassen an Erhebungen spalteten, die ihnen keine Zuflüsse entgegensandten, können wir durch die leicht erkennbaren zentralalpinen Geschiebe festere Anhaltspunkte für die obere Gletschergrenze erhalten. Angesichts der Seltenheit solcher Stellen kann nicht wundernehmen, daß unsere jetzigen Untersuchungen die obere Gletschergrenze um 200 bis 400 m höher festlegten als 1882. Unser Kärtchen sieht daher anders aus als das damals gezeichnete.

Auch in den Rückzug der Vergletscherung haben wir nunmehr einen besseren Einblick gewinnen können, als 1882 und 1902 möglich war. Er vollzog sich wie folgt: Es sank die Oberfläche des Eises ein, und dessen Ende zog sich wie im Inntale quantenweise (18, S. 104) zurück. Infolge des Einsinkens der Gletscheroberfläche löste sich der große Eisfächer von Mittenwald in zwei Einzelgletscher auf, die noch eine Zeitlang im Isar- und im Loisachtale nebeneinander bestehen blieben. Von den großen Talgletschern

lösten sich ihre aus den Kalkalpen kommenden Zuflüsse. Es rissen Lücken in der Vereisung auf, in denen sich glaziale Stauseen bildeten. In einige derselben schoben sich die kalkalpinen Gletscher hinein, die durch die große Vereisung hoch aufgestaut gewesen waren und nun den aufgespeicherten Energievorrat zu einem Vorstoß benutzten, der sich nicht auf klimatische Ursachen zurückführt. So kommt es denn, daß wir über einigen spätglazialen Stauseebildungen Moränen finden. Letztere gehören ausschließlich kalkalpinen Gletschern an, welche einen »mechanischen« Vorstoß machten.

Folgende während des Gletscherrückzuges vorhanden gewesene Stauseen haben wir kennengelernt:

Links der Loisach:	Der Ettaler Stausee	870 m
Zwischen Loisach und Isar:	Der Ellmau–Partnach-See	1005 »
	Der Kranzbachsee	1030 »
	Der Kreidenbachsee	1100 »
Rechts der Isar:	Der untere Rißtalsee	850 »
	Der Fermersbachsee	1110 »
	Die Seen des Seinsbaches	1250—1340 »
	Der Gassellahnbachsee	1110 »
	Der Gleierschsee bei der Amtssäge	1270 »
	Der Gießenbachsee	1240 »
Dazu gesellt sich noch ein See	auf der Paßhöhe von Seefeld	1180 »

Eine derartig ausgedehnte glaziale Stauseebildung beim Gletscherrückgange war bisher aus den nördlichen Kalkalpen nicht bekannt. Wenn von Stauseebildungen die Rede war, so wurden sie im allgemeinen in die Zeit des Herannahens der Vergletscherung verwiesen. In diese stellte ich auch 1882 die Entstehung zweier Seen in den Bayerischen Alpen, die im wesentlichen durch Schotter aufgedämmt werden, nämlich den Achensee und den Plansee. Ich nahm an, daß sie durch eine mächtige, der Vergletscherung vorausgehende fluvioglaziale Aufschotterung gestaut worden seien. Die »unteren Glazialschotter« habe ich seither auflösen können in interglaziale und frühglaziale, aber auch zeigen können, daß nicht jeder im Liegenden von Moränen auftretende fluvioglaziale Schotter beim Herannahen der Vergletscherung entstanden sein muß. Die Schotter auf dem Ettaler Berge (23, S. 225) erweisen sich als spätglazial, abgelagert an den Flanken des sich im Loisachtale zurückziehenden Gletschers. Gleiches wurde für die oberen Schotter des Achenseedammes gemutmaßt. Der Achensee kann als permanent gewordener glazialer Stausee angesprochen werden. Glaziale Stauseen können eben dort sich erhalten, wo die Moränen- oder Schotterablagerung an den Flanken eines sich zurückziehenden Gletschers so bedeutend ist, daß das durch sie aufgestaute Seitental über eine niedere Schwelle seiner Umrandung abfließen kann. Das gilt vom Achensee wie vom Plansee. Meine alten Beobachtungen (3, S. 162) lassen sich mit der Annahme von E. Fels[1] vereinigen, daß der den See ab-

[1] Der Plansee. Eine geographische Seenstudie. München 1913 S. 68. Der Ansicht von O. Ampferer (Glazialgeologische Beobachtungen in der Gegend von Reutte. Verhandl. k. k. geolog. Reichsanstalt 1907 S. 345), daß die Schotter vom Lech aus aufgeschüttet wurden, vermag

sperrende Damm beim Rückzuge der Vergletscherung aufgeworfen wurde. Das kann schwerlich von einem von Westen kommenden Aste des Lechgletschers geschehen sein, wie Levy (21, S. 94) meint, sondern kann nur durch die Zunge eines Gletscherastes bewirkt sein, der sich vom schwindenden Loisachgletscher im Tale der Neidernach aufwärts bis zum Plansee erstreckte; denn der Loisachgletscher war es, der sein Eis ins Lechtal überfließen ließ, und der Lechgletscher drang nicht zum Ammergebiete vor. In beinahe 1000 m Höhe endend, verlangte dieser Gletscherast im Loisachtal bei Griesen etwa dieselbe Eishöhe wie das Eis, das bei Partenkirchen am Kankerbach den kleinen See aufstaute. Aber während letzterer verschwand, als sich das ihn stauende Eis zurückzog, konnte sich der Plansee erhalten. Beide Stauseen, der verschwundene und der erhaltene, gehören wahrscheinlich derselben Phase des Eisrückganges an.

Die in engen Grenzen sich bewegende Höhenlage unserer spätglazialen Stauseen kann den Gedanken wecken, daß sie allesamt einem länger dauernden allgemeinen Halte, einem bestimmten Stadium im Rückzuge der Vergletscherung angehören. Das ist nicht der Fall; denn nur in Ausnahmefällen hat das stauende Eis mächtigere Moränen- oder Schotterablagerungen hinterlassen. In der Regel fehlen solche, und der ehemalige Stausee verrät sich mehr durch seine Sedimente als durch seinen Damm. Auch sind die Stauseen nicht gleich alt. Als unten im Rißtale ein Stausee mit 850 m Spiegelhöhe bestand, mußte der Stausee im tributären Fermersbachtale, auf dessen Delta die Brandelalpe steht, bereits abgelaufen sein. Entsprechendes gilt vom Kranzbach- und Kreidenbachsee. Im allgemeinen kann gesagt werden, daß von den Stauseen im gleichen Talgebiete der höhere der ältere ist, daß aber in verschiedenen Talgebieten gleich alte Stauseen in verschiedenen Höhen gelegen gewesen sein können, und zwar im höheren Talgebiete höher als im tieferen. Man kann sich sehr wohl vorstellen, daß es derselbe Gletscherstand war, der im Rißtale den See mit 850 m Spiegelhöhe aufdämmte, welcher auch den See im Kranzbachtale mit 1030 m Höhe staute. Die gleiche Höhe der Stauseen im Seinsbachtale und im Gießenbachtale berechtigt nicht, sie für gleich alt zu halten; beide erheischen lediglich gleiche Höhen des absperrenden Eises, in einem Falle also eine Höhenminderung der Vergletscherung um 500 m, im anderen um 900 m. Das kann nicht gleichzeitig der Fall gewesen sein. Der Gießenbacher Stausee ist der jüngere, wahrscheinlich der jüngste von allen.

Zwei deutlich ausgesprochenen Rückzugsstadien begegnen wir in unserem Gebiete. Wir verzeichnen nur die von uns beobachteten auf unserem Kärtchen. Das eine wird repräsentiert durch zum Teil ganz großartige Ufer- und Endmoränen kleiner Talgletscher, die in der Art von firnfeldlosen Gletschern von den Felswänden der nördlichen Karwendelkette ausgingen, das andere durch kleine Hängegletscher, die sich an deren Fuß lagerten. Das erstere verlangt eine Schneegrenze von 1800 m, rund 600 m unter der heutigen. Wir identifizieren es daher mit dem Gschnitzstadium. Das andere schließt

---

ich nicht beizupflichten; gekritzte Geschiebe kennzeichnen sie als fluvioglaziale Gebilde, ja, man könnte sie sogar als Schottermoränen bezeichnen. Ampferer scheint in seiner Auffassung schwankend geworden zu sein (29, S. 43). Nichts Eigenes berichtet Jos. Müller a. a. O. S. 88.

bereits Schneeflecken ein. Es kann mit dem Daunstadium parallelisiert werden. Eine mit dem Gschnitzstadium einsetzende starke Gehängeschuttbildung läßt sich bis in das Isartal hinein verfolgen und verzahnt sich hier mit dessen als postglazial beschriebenen Schotterterrasse. Daraus ergibt sich deren Zugehörigkeit zum Gschnitzstadium, sowie weiter, daß während desselben das Isartal mindestens von der Leutaschmündung an eisfrei gewesen ist. Die spätglazialen Stauseen waren deswegen und überdies, weil auf ihren Tonen gelegentlich Moränen des Gschnitzstadiums aufsitzen, älter als das letztere.

Wie regelmäßig die Entwicklung der Gschnitz- und Daunstadial-Gletscher auf der Nordseite des Karwendelgebirges gewesen ist, erhellt aus der folgenden Übersicht ihrer tiefsten Enden und geradlinigem Abstande vom Kamme:

	Gschnitz-stadium m	Geradliniger Abstand vom Kamme km	Daunstadium m	Mittlere Höhe der Umwallung m
Vordere Karwendelkette.				
Gassellahnbach:				
Dammkar	1100	2.5	—	2250
Mitterkar	1200	2.3	1630	2200
Seinsbach:				
Wörnerkar	1350—1370	2.6	1500	2200
Fermersbach:				
Hufachboden	1200	2.7	—	2250
Thomasalpl	—	—	1600	2400
Wechselboden	1300	—	1585	2500
Rontal	1200	3.3	—	—
Tortal	1200	2.0	—	—
Hintere Karwendelkette.				
Hochalpsattel	—	—	1750	2400
Johannestal	1200	3.3	—	2600
Lalidertal	1100	5.0	1500	2600
Engtal	1200	3.2	—	2600

Es liegen die Enden der Gletscher des Gschnitzstadiums durchweg in 1100 bis 1200 m Höhe; eine Ausnahme macht nur der Wörnerkargletscher, der höher endete, weil er sich nur bis auf einen Paß, nicht bis in Täler hinein erstreckte. Im weiteren Höhenintervall, nämlich zwischen 1500 und 1700 m Höhe, halten sich die Enden des Daunstadiums. Am tiefsten liegen sie dort, wo sie von den steilsten Wänden überragt werden (Wörnerkar und Lalidertal), am höchsten, wo sie die freieste Lage haben. Zur Bestimmung der Schneegrenzhöhen sind sie wenig geeignet.

Moränen des Gschnitz- und des Daunstadiums sind durch die ganzen Alpen verbreitet. H. v. Wolf hat sie im Bereiche des Achenseetales kürzlich in großer Zahl kennengelehrt (26, S. 288) und hier auch solche des Bühlstadiums gefunden, d. h. eines Stadiums, das eine Lage der Schneegrenze 900 m unter der heutigen voraussetzt. Moränen eines solchen Stadiums haben wir in unserem Gebiete nicht gefunden. Anzeichen eines ersten längeren Haltes vom Gletscher-

schwunde finden wir erst weiter nördlich. Innerhalb des großen Endmoränengürtels, welcher mit 3—4 Wällen den Ammersee und Würmsee umspannt, liegt bei Weilheim oberhalb des Ammersees eine Schotterfläche, die in Moränennähe aufgeschüttet worden ist und ein typisches Stadium des Eisrückganges darstellt. Ich habe dieses 1902 (7, S. 337) zum Bühlstadium gerechnet, währenddessen die Schneegrenze etwa zwischen jener des Maximums der Vergletscherung und des Gschnitzstadiums gelegen war. Das trifft für das Weilheimer Stadium zu. Es weist auf einen Rückgang von 36 km und ein Sinken der Eismächtigkeit um 400—500 m. Wir können uns einigermaßen die zugehörige Vergletscherung unseres Gebietes vorstellen, wenn wir uns die hocheiszeitliche um den genannten Betrag gesenkt denken. Wir erhalten dann in der Talweitung von Garmisch-Partenkirchen 1200—1300 m, so daß also ein Überfließen über die Vereinsalp bei Mittenwald in 1300—1400 m zum Fermersbache ausgeschlossen war; für die Abzweigung vom Inngletscher bei Seefeld ergibt sich während dieses Stadiums eine Höhe von 1700—1800 m. Diese Zahlen können natürlich nur in grober Annäherung als richtig gelten. Sie lassen indes erkennen, daß die Eisoberfläche damals in der Talweitung von Garmisch-Partenkirchen–Mittenwald unter der entsprechenden Schneegrenze gelegen war, die wir auf 1500 m veranschlagen. Es war das Abschmelzgebiet des Eises bereits bis an den Fuß des Wetterstein- und Karwendelgebirges gerückt.

Der Rückzug der Vergletscherung in unserem Gebiete ging in ähnlicher Weise in kleinen Quanten vonstatten wie der der skandinavischen Vergletscherung, wenn schon wir nicht wie in Schweden förmliche Jahresringe des Schwindens feststellen können. Er wurde hier wie da durch große Halte unterbrochen. Einen ersten finden wir im Norden innerhalb der Grenzen des maximalen Standes der letzten Vergletscherung auf dem baltischen Höhenrücken, einen zweiten im mittleren Schweden, in den Provinzen Ost- und Westgotland, und in der Salpausselkä Finnlands. Ein dritter Halt ist im Norden, wo bekanntlich schließlich nur ein Eiskuchen östlich der skandinavischen Wasserscheide übrig blieb, während das westlich gelegene Gebirge schon eisfrei war, nicht erkennbar. Aber die baltische und die gotische Randlage des Eises haben ein ähnliches Verhältnis zur maximalen, letztmaligen Eisausdehnung wie die Bühlmoränen von Weilheim und das Gschnitzstadium der Alpen. Die baltischen Moränen schließen das Gebiet der randlichen, glazialen Akkumulation ebenso binnenwärts ab wie die Bühlmoränen von Weilheim; die Gschnitzmoränen verlangen eine halb so tiefe Herabdrückung der eiszeitlichen Schneegrenze wie die äußersten Würmmoränen, und die gotischen Endmoränen liegen rund halbwegs Rand und Mitte der nordischen Vereisung. Wegen dieser Ähnlichkeiten parallelisieren wir die baltischen Endmoränen mit dem Bühlstadium, die gotischen Endmoränen mit dem Gschnitzstadium. Der Gedanke an eine solche Parallelisierung hat sich längst aufgedrängt, aber er war so lange undurchführbar, als es schien, daß auf die Würmvergletscherung zunächst ein weitgehender Gletscherrückgang der Achenschwankung und dann erst ein neuer Vorstoß des Bühlstadiums gefolgt sei. Anzeichen einer derartigen Schwankung fehlen im Norden; die baltischen Moränen gehören nicht zu einem neuen Gletschervorstoß. Seitdem sich nunmehr gezeigt hat, daß

alle die der Achenschwankung zugeschriebenen Schotter, sowohl die des Inntales (18, S. 109) wie auch der Gegend von Murnau, auf der Hochebene teils interglazial, teils frühglazial sind (23, S. 224), somit die Gründe für Annahme einer Achenschwankung in den nördlichen Kalkalpen entfallen, ist der Differenzpunkt in der Entwicklung der nordischen und alpinen Vereisung geschwunden. Aber mit der Achenschwankung ist nicht auch das Bühlstadium gefallen. Mag die Ansicht O. AMPFERERS[1] zutreffen, daß es im Inntale bei Kirchbichl nicht vorliegt — ich habe die Gegend nicht neuerlich untersucht —, so sind doch vielfach im Umkreise der Alpen Endmoränen vorhanden, die ziemlich weit vom Ende der Würmvergletscherung auftreten, wie jene von Weilheim, und eine entschiedene höhere Lage der Schneegrenze verlangen als die der Würm-Eiszeit, die aber von den Moränen des Gschnitzstadiums noch ziemlich weit entfernt sind (7, S. 1164). Wir bezeichnen sie nach wie vor als Bühlmoränen und parallelisieren sie mit den baltischen Moränen des Nordens. Mit ihrer Ablagerung ließ DE GEER seine gotiglaziale Zeit beginnen, während er deren Ende durch die mittelschwedischen, uns als gotisch bezeichneten Endmoränen bestimmte. Nach seiner Warfenzählung berechnet er[2] die Dauer des Eisrückganges von Schonen bis an die gotischen Endmoränen auf 3000 Jahre. Damit ist aber nicht seine gesamte gotiglaziale Zeit erfaßt. Es heißt noch die Dauer des Eisrückzuges vom baltischen Landrücken bis Schonen hinzufügen. Diese möchten wir auf mindestens 2000 Jahre schätzen. Danach würde sich die Dauer des Eisschwindens von den baltischen bis zu den gotischen Endmoränen oder, auf alpine Verhältnisse übertragen, vom Bühlstadium bis zum Gschnitzstadium auf 5000 Jahre belaufen. Das ist auch DE GEERS nunmehrige Ansicht. Für die Bildungsdauer der mittelschwedischen Endmoränen errechnet DE GEER eine Zeit von 700 Jahren. Ihr würde die Dauer des Gschnitzstadiums entsprechen. 2000 Jahre verstrichen seit dessen Beginn bis zum Zerfall des Inlandeises in zwei Teile, DE GEERS finiglaziale Zeit. Sie hat kein Seitenstück in der alpinen Geschichte. Auf weitere 8700 Jahre schätzt DE GEER[3] nach LIDÉNS[4] neuesten Messungen die Dauer seiner Postglazialzeit. Danach würde sich das Alter des Gschnitzstadiums zu rund 10000 Jahren ergeben,

---

[1] Glazialgeologische Beobachtungen im unteren Inntale. Zeitschr. f. Gletscherkunde I. 1907. S. 29 (126).

[2] A Geochronology of the last 12000 years. Compte rendu XI. Congrès géologique international. Stockholm 1910. S. 241—253. Deutsche Übersetzung: Geochronologie der letzten 12000 Jahre. Geolog. Rundschau II. 1912. S. 457.

[3] Om naturhistoriska Kartor öfver den baltiska dalen. Populär naturvetenskaplig revy. Stockholm 1914. S. 189. In einer kürzlich erschienenen Abhandlung (Förhistoriska tidsbestämmingar. Ymer 1925, S. 1) hat DE GEER den einen Fixpunkt seiner quartären Geochronologie verschoben. Er nimmt als Grenze zwischen der goti- und finiglazialen Zeit nunmehr den Moment, an welchem der südbaltische Stausee nördlich Billingen gegen die Nordsee abfloß. Dieser Moment kann geochronologisch sehr scharf erfaßt werden. Er liegt 1114 Jahre vor dem Zerfall der nordischen Vereisung, vor dem Ende der finiglazialen Zeit. Klimatisch ist er jedoch bedeutungslos. Wir bleiben daher bei DE GEERS älterer Abgrenzung der goti- und finiglazialen Zeit durch die gotischen Endmoränen, deren Ablagerung etwa 900 Jahre vor der Öffnung des Stausees bei Billingen begann. Dagegen nehmen wir DE GEERS neue Werte über die Dauer der jüngeren Stein-, der Bronze- und der Eizenzeit in unsere Tabelle auf; sie beruhen auf rein naturhistoscher Grundlage.

[4] Geokronologiska studier öfver det finiglaciala skedet i Ångermanland. Sveriges geologiska undersökning. Afhandlingar i 4°. S. Ca. no. 9. 1913.

und die gewaltige Moränenaufschüttung unter den Nordwänden der Karwendelkette wäre in den Jahren 8100—7400 v. Chr. erfolgt, also noch 3—4000 Jahre vor dem Einzug des neolithischen Menschen im mittleren Schweden. Andererseits würde das Yoldiameer Fennoskandias, dessen Ablagerungen sich namentlich innerhalb der gotischen Endmoränen erstrecken, in eine Zeit fallen, während welcher die alpine Vergletscherung sich auf die kurzen Talgletscher des Gschnitzstadiums beschränkt hatte, und der spätere Ancylussee hat vielleicht über das Daunstadium hinaus gedauert.

Geschah der Rückzug der alpinen Vergletscherung in ähnlichen Etappen wie der der nordischen Vereisung, so haben sich auch für die postglaziale Geschichte in den Alpen und im Norden in neuerer Zeit interessante Parallelen durch die Stratigraphie der Torflager ergeben. Es schaltet sich hier wie da in dieselben ein Grenzhorizont ein, der eine Unterbrechung im Wachstum des Torfes bezeichnet, und der nach neueren Untersuchungen etwa in die Bronzezeit fällt. James Geikie[1] hat seine Bedeutung in Schottland zuerst erkannt und ihn wegen der in ihm erhaltenen Holzreste als Upper Forestian bezeichnet, der das Upper und Lower Turbarian trennt. Unter dem letzteren hat Lewis einen zweiten Holzhorizont nachgewiesen, den J. Geikie Lower Forestian nennt. Diese vier Horizonte hat H. Schreiber[2] in den Mooren des Salzburgischen wiedererkannt. Er unterscheidet hier von unten nach oben: älteren Bruchtorf (Lower Forestian), älteren Moostorf (Lower Turbarian), jüngeren Bruchtorf (Upper Forestian) und jüngeren Moostorf (Upper Turbarian). J. Geikie[3] deutete die Torfhorizonte für Anzeichen eines kälteren, die Waldhorizonte für solche eines wärmeren Klimas. Schreiber ist ihm gefolgt, und er hat den unteren Bruchtorf mit dem Gschnitz-, den oberen Bruchtorf mit dem Daunstadium parallelisiert. J. Geikie hat sich dem angeschlossen[3], ebenso J. Moscheles[4]. Ferner hat Schreiber die von ihm unterschiedenen vier Horizonte der Reihe nach mit der borealen, atlantischen, subborealen und subatlantischen Zeit von Blytt und Sernander[5] parallelisiert, welche auch von H. Gams und R. Nordhagen[6] in den Torflagern und Kalktuffen des Alpengebietes wiedererkannt worden sind. Beide folgen Schreiber, indem sie das Gschnitzstadium in die atlantische, das Daunstadium in die subatlantische Zeit von Blytt verlegen. Wenn sie nun mit guten Gründen die Bronzezeit in die subatlantische Zeit versetzen, so würde jene älter als das Daunstadium sein.

Ich habe bereits 1902 angeführt (7, S. 382), daß das Daunstadium älter als die Bronzezeit ist und auch nicht in der jüngeren Steinzeit untergebracht werden kann, daher älter auch als diese ist. Diese Auffassung hat durch

[1] Late Quarternary Formations of Scotland. Zeitschr. f. Gletscherkunde. I. 1906. S. 21.

[2] Vergletscherung und Moorbildung in Salzburg. Österreichische Moorzeitschr. 1911/12. Staab 1912.

[3] The Antiquity of Man in Europe. Edinburgh 1914. S. 293.

[4] On the Late Quarternary History of Scandinavia. Man. XXIV. 1924. S. 75.

[5] R. Sernander, Die schwedischen Torfmoore als Zeugen postglazialer Klimaschwankungen. Die Veränderungen des Klimas seit dem Maximum der letzten Eiszeit. Stockholm 1911. (XI. Internationaler Geologenkongreß) S. 197.

[6] Postglaziale Klimaänderungen und Erdkrustenbewegungen in Mitteleuropa. Mitteil. geogr. Gesellsch. München XVI 2. 1923. (Landeskundliche Forschungen, herausgegeben von der geographischen Gesellschaft München, Heft 25.)

die jüngsten pollenanalytischen Untersuchungen von F. Firbas[1] eine kräftige Unterstützung gefunden. Nach ihm sind die alpinen Torfmoore insgesamt in einer wärmeren Epoche gebildet worden. Er unterscheidet Eichenmischwald-, Fichten- und Buchen-, Tannenzeit, die der borealen, atlantischen und subborealen Zeit von Blytt-Sernander ungefähr entsprechen. Gegen Ende der Torfbildungszeit geht in der subatlantischen Zeit die Baumgrenze etwas herab. Anhalte für irgendwelche glaziale Zustände ergeben sich während der ganzen Periode nicht. Der Wechsel zwischen den Zeiten der Torfbildung und der sich dazwischen schaltenden Waldhorizonte weist nach ihm nicht auf einen Wechsel kühlerer und wärmerer, sondern feuchterer und trocknerer Zeiten, was ja immer die Meinung skandinavischer Gelehrter gewesen ist. Die ganze Periode der Torfbildung ist ausgesprochen postglazial, und R. Firbas kann zeigen, daß sie auf das Daunstadium folgte; denn ein Torflager, das auf eine höhere Grenze des umgebenden Waldes als die gegenwärtige weist, findet sich am Moserboden, der, beinahe 2000 m hoch gelegen, während des Daunstadiums von Eis bedeckt gewesen sein muß.

Nun finden sich allerdings, wie durch Nathorst[2] längst gezeigt, auch an der Sohle alpiner Torflager Pflanzen von arkto-alpinem Charakter. Erst kürzlich ist an der Basis des großen Kolbermoores im Rosenheimer Becken eine allerdings dünne Lage mit Blättern von Betula nana durch Gams und Nordhagen (a. a. O. S. 83) wieder nachgewiesen worden. Aber sie liegt nicht unmittelbar auf den Moränen des Inngletschers auf, sondern wird von denselben durch die mächtige, 150 m überschreitende Ausfüllung des alten Rosenheimer Sees getrennt. Mag dieselbe auch vielleicht teilweise einem interglazialen See angehören, so ist doch sicher, daß zwischen Gletscherrückzug und Ablagerung der Schicht mit Betula nana das Erlöschen eines Alpensees von 478 m Spiegelhöhe fällt, der beinahe die Größe des heutigen Bodensees hatte, und wenn wir auch dessen Rauminhalt nicht kennen, so ist doch klar, daß er den Gletscherrückzug längere Zeit überdauert hat. Diese trennt die Einwanderung der Betula nana vom Maximum der letzten Eiszeit. Mit Betula nana fand Nathorst auch Blätter von Betula alba, Myrtillus uliginosa und Oxycoccus palustris; beinahe unmittelbar darüber kommen Reste von Waldbäumen vor, meist Kiefer, wenig Fichte und Birke. Wir können nicht von einer Tundraflora sprechen, die der Waldflora vorausging, sondern die Zwergbirke erschien sozusagen am Saume des Waldes und war kein Relikt der Eiszeit, sondern ein Einwanderer, was auch von zahlreichen Polstern der Dryas octopetala auf den Schotterfeldern der Kalkalpenflüsse und einigen Stellen der norwegischen Küste gilt[3]. Ebenso fällt in der Gegend von Salzburg der Beginn der Moorbildung spät nach dem Schwinden des Eises. Sie

[1] Pollenanalytische Untersuchungen einiger Moore der Ostalpen. Lotos Bd. 71. Prag 1923. S. 187.

[2] Om den arktiska vegetationens utbredning öfver Europa norr om Alperna under istiden Öfversigt af K. Vet.-Akad. Förh. 1873. No. 6 S. 11. Über den gegenwärtigen Standpunkt unserer Kenntnis von dem Vorkommen fossiler Glazialpflanzen. Ebenda. Bd. 17. III. Nr. 5. 1892.

[3] N. Wille und Jens Holmboe, Dryas octopetala bei Langesund. Eine glaziale Pseudorelikte. Nyt Magazin f. Naturvidensk. XLI. H. 1. Kristania 1903. S. 27.

erfolgte gleichfalls erst nach der Auffüllung eines alten Sees, der sich im Zungenbecken des alten Salzachgletschers dehnte; mit 24.5 m Tiefe sind die Schotter unter dem Leopoldskroner Moos noch nicht durchbohrt. Ist unter dem letzteren eine Lage mit glazialen Pflanzen nicht nachgewiesen, so haben wir hier wie im Kolbermoor laut Pollenanalyse anfänglich namentlich Kiefern, die bald von Fichten, die ihrerseits dann von Buchen verdrängt werden. Wieder ist die Torfbildung durch ein weites Zeitintervall vom Maximum der Eiszeit getrennt. Und so ist es vielfach sonst. Deutlich hebt sich die Epoche der Torfbildung von der Eiszeit ab.

Dieselbe Aufeinanderfolge von Bäumen, welche die postglazialen, subalpinen Moore verraten, gibt sich nun auch, nach den Untersuchungen von K. Rudolph und F. Firbas[1], in den Mooren des Erzgebirges sowie des Innern von Böhmen zu erkennen. Beim Beginn der Moorbildung herrschte die Kiefer, dann erst erscheint die Fichte, die wiederum bald gegen die Buche zurücktritt. Diese Aufeinanderfolge ist auf dem Kamme des Erzgebirges nicht anders als im Innern Böhmens. Es rückt der Wald ein mit der Kiefer, dann folgt die Fichte. Daß diese Einwanderung erst spät nach dem Maximum der letzten Vergletscherung erfolgte, lernten wir bei Salzburg und Rosenheim. Vorher fand auch in Südböhmen, das von eiszeitlicher Gletscherbedeckung gänzlich freigeblieben ist, keine Torfbildung statt. In keinem dortigen Torflager gibt es Reste einer glazialen oder gar interglazialen Flora. Nur sporadisch findet sich einmal ein Pollen von Betula nana. Da nun hier die Bodenverhältnisse sich nicht geändert haben, so kann man das Einsetzen der Moorbildung in der Postglazialzeit nur auf veränderte klimatische Verhältnisse zurückführen. Das eiszeitliche Klima war für die Moorbildung allem Anschein nach zu trocken. Diese setzt erst seit einem Feuchterwerden des Klimas ein.

Mit den Mooren kommt der Wald, anfänglich äußerst einförmig als Kiefernwald, dann erst in bunterer Mischung. Die Dinge liegen wesentlich anders, als ich 1902 zum Ausdruck brachte, indem ich die interglazialen Schieferkohlen von Hopfgarten im Brixentale und von Groß-Weil am Kochelsee (7, S. 320. 338) in die damals angenommene Achenschwankung verlegte. Der Wald hätte hier rasch dem sich zurückziehenden Gletscher folgen müssen, wenn er bereits während einer Schwankung beim Gletscherrückzuge in die Alpentäler einrückte. Die Notwendigkeit einer solchen Annahme ist entfallen, seitdem sich gezeigt hat, daß die der Achenschwankung zugewiesenen Ablagerungen durchweg in die Riß-Würm-Interglazialzeit gehören; das gilt insbesondere auch für die Schieferkohlen von Hopfgarten, die V. Zailer[2] näher beschrieben hat. Ist die Zeit der Moorbildung und der Waldeinzug in den nördlichen Kalkalpen im wesentlichen postglazial, so darf man aus den an der Sohle mancher Torflager auftretenden sogenannten Glazialpflanzen auch nicht auf ein streng glaziales Klima schließen. Wie in Schweden die Yoldia arctica erst etwa um die Zeit nach dem alpinen Gschnitzstadium auf dem

[1] Die Hochmoore des Erzgebirges, Beihefte zum Botanischen Centralblatt. XLI. Abt. II. H. 1/2. Dresden 1924.

[2] Die diluvialen Torf-(Kohlen)lager im Talkessel von Hopfgarten, Tirol. Zeitschr. für Moorkultur und Torfverwertung. 1910. S. 267.

Gebiete der schwindenden Vereisung auftritt, so stellt sich auf dem Alpenvorlande Betula nana erst sehr lange nach dem Rückzuge des Eises ein.

Innerhalb unseres engeren Untersuchungsgebietes haben wir keinen Anhalt dafür gefunden, daß dem sich zurückziehenden Eise sofort eine dichtere Vegetationsdecke folgt. In keiner Ablagerung des Eisrückzuges haben wir nur eine Spur organischer Reste gefunden, wie sehr wir auch danach suchten. Völlig frei von solchen sind die lakustro-glazialen Tone. Erst auf den Rückzugsmoränen finden sich Torflager in ziemlich ansehnlicher Ausdehnung beim Wildmoos auf dem Seefelder Passe, der zwischen dem Bühl- und Gschnitzstadium eisfrei wurde. Sie sind in bezug auf ihren Aufbau und ihre Zusammensetzung noch nicht untersucht. Ihre Bildung kann, wenn man nur nach den Lagerungsverhältnissen urteilt, in die zweite Hälfte der Spätglazialzeit und in die Postglazialzeit fallen. Ablagerungen, deren Entstehung durch ihr Auftreten zeitlich mehr eingeengt werden könnte, haben wir in unserem Gebiete nicht. Auf den Moränen des Gschnitz- oder gar des Daunstadiums haben wir keine Torflager.

Folgende Tabelle macht unseren Versuch, die alpinen und die nordischen Eiszeitbildungen zu vergleichen, ersichtlich (siehe S. 366).

Unsere Untersuchungen haben die Zahl der Stellen, an welchen zwei Moränen durch mächtige Zwischenschichten nicht glazialen Ursprungs getrennt werden, um 10 vermehrt. Solche Zwischenschichten deuteten wir 1882 unbedenklich als interglazial und schlossen aus ihnen auf einen völligen Rückgang der Vergletscherung zwischen zwei aufeinanderfolgenden Vereisungen. 1902 nahmen wir einen freieren Standpunkt ein. Wir schlossen aus der Mächtigkeit der Zwischenschichten ohne weiteres weder auf eine lange Dauer der für ihre Bildung nötigen Zeit noch auf einen völligen Eisrückzug während ihrer Ablagerung und suchten zwischen interstadialen und interglazialen Schichten zu unterscheiden. Wenn wir auch heute prinzipiell noch auf dem letzteren Standpunkte stehen, so haben unsere Untersuchungen im wesentlichen die Ergebnisse von 1882 bestätigt. Alle die Ablagerungen dieses Gebietes, die wir 1902 als interstadial angesehen haben, nämlich die zwischen Moränen gelagerten fluviatilen und lakustren Terrassenbildungen der Täler, haben sich als interglazial erwiesen (22, 23). Nicht bloß an wenigen Stellen, wie H. v. Wolf (28, S. 255) angibt, sondern an fünf Örtlichkeiten, bei Oberleutasch, am Weidachsee, bei Krünn, bei Wallgau und am Wilfertsgraben, fanden wir Moränen unter den Terrassen des Isartales und außerdem einmal, bei Garmisch, unter der des Loisachtales. An fünf weiteren Örtlichkeiten fanden wir alte Breccien zwischen Moränen eingeschaltet. Solche Breccien haben wir 1882 und 1902 als interglazial aufgefaßt, aber der volle Beweis, daß zur Zeit ihrer Entstehung ein völliger Eisrückzug erfolgt ist, ist bisher nur für die Höttinger Breccie geglückt (18). Die große Ähnlichkeit aller solcher alten Gehängeschuttbildungen hat indes von jeher dazu verleitet, sie als gleich alt aufzufassen. Wenn nun gute Gründe dafür sprechen, die Höttinger Breccie einer älteren Interglazialzeit zuzuweisen als die Terrassengebilde der großen Alpentäler, so könnte es scheinen, als ob die letzte und vorletzte Interglazialzeit sich in den nördlichen Alpen in recht verschiedener Weise durch ihre Ablagerungen geäußert

	Zeitabschnitte	Abweichung der Schneegrenze von der heutigen	Ablagerungen in Oberbayern	Zeitabschnitte und Zeitdauer nach De Geer 1914	Ablagerungen und Vorgänge im Norden	Ostsee	Prähistorische Epochen	Zeit nach De Geer 1925
	Würm-Glazial	— 1200 m	Endmoränengürtel des Alpenvorlandes	Daniglazial	Moränen in Brandenburg			
Spätglazial	Bühlstadium β	— 900 m	Bühlmoränen bei Weilheim		Baltische Endmoränen		Magdalénien	14000 v. Chr.
			Stauseen im Isar- und Loisachgebiete	Gotiglazial 5000 Jahre				
	Gschnitzstad. γ	— 600 m	Gschnitzmoränen im Karwendelgebirge		Gotische Endmoränen und Salpausselkä	Yoldia-Meer		nach 7800 v. Chr.
	Daunstadium δ	— 300 m	Daunmoränen am Fuße der Karwendelwände	Finiglazial 2000 Jahre				
					Zerfall der nordischen Vergletscherung	Ancylus-See Littorina-Meer		6800 v. Chr. 6600 v. Chr.
Postglazial	Subarktisch und Präboreal		Tone mit Betula nana, Torf im Kiefernwald					
	Boreal		Torf, Eichenmischwald				Jüngere	5100 v. Chr.
	Atlantisch		Torf, Fichtenwald	Postglazial 8700 Jahre			Steinzeit	1900 v. Chr.
	Subboreal	+ 200 m	Grenzschicht im Torf				Bronzezeit	1900-550 v. Chr.
	Subatlantisch	0 m	Torf, Buchen-Tannenwald			Mya-Meer	Eisenzeit	nach 550 v. Chr.

hätten: die letzte durch Verschüttung der Täler, die vorletzte durch Umschüttung der Hänge. Ausgeschlossen ist eine solche Verschiedenheit nicht. Sehen wir doch auch heute, wie manche Alpentäler, wie namentlich die südalpinen, aufgeschottert werden, während in anderen, wie im Vintschgau, die Gehängeschuttbildung unbedingt vorherrscht. Ein regenreicheres Klima während der Riß-Würm-Interglazialzeit, ein trockeneres während der Mindel-Riß-Interglazialzeit würde die Verschiedenheit ihrer Ablagerungen erklären können.

Unter solchen Umständen ist der Nachweis verschiedenaltriger Breccien in unserem Gebiete von erheblicher Tragweite. Wir konnten zeigen, daß die bei Mittenwald an den Abfall der Viererspitz gelagerte Breccie mit den interglazialen Seetonen des Isartales in ähnlicher Weise verknüpft ist wie die Breccie von Wallgau. Sie gehört daher in die Riß-Würm-Interglazialzeit, ist aber älter als die während der letzteren erfolgte Aufschotterung der Täler, und die mehrfach ausgesprochene Ansicht Ampferers (z. B. 29, S. 38), daß die Schotteraufladung in den Tälern der Schuttablagerung an den Gehängen entspricht, bestätigt sich nicht. Aber auch seine Annahme, daß die interglazialen Breccien mit den interglazialen Schottern und Tonen in ein und dieselbe Interglazialzeit gehören, trifft nicht zu, nicht bloß nicht für die Höttinger Breccie, sondern auch für die älteren, zwischen Moränen gelagerten Breccien unseres Gebietes. Diese treten unter solchen Lagerungsverhältnissen auf, daß seit ihrer Bildung große Veränderungen in der Gestaltung des Gebirges geschehen sein müssen. Die Längenfeld-Kreuzeckbreccie bei Garmisch ist ganz losgelöst worden von ihrem Nährgebiete. Die Hochlandbreccie hat stellenweise ihr Hintergehänge verloren, und gleiches ist mit der Hochalpbreccie im Karwendeltale geschehen. Die Dinge liegen hier ebenso wie mit der Breccie der Judenköpfe am Südabfalle der Hochplatte in der Mieminger Kette. Wiederholt hat Ampferer darauf hingewiesen (10, S. 512. 11, S. 747. 29, S. 37), daß zur Zeit vor deren Entstehung ein wesentlich anderes Relief geherrscht haben muß als heute. Nun schmiegen sich die Ablagerungen der letzten Interglazialzeit, sowohl die Schotter in den Tälern als auch die Breccien an den Hängen, durchaus den heutigen Reliefverhältnissen an, wir müssen also die in Rede stehenden Breccienvorkommnisse für wesentlich älter halten. Ihr interglazialer Charakter erhellt daraus, daß in einem Falle Hochlandbreccie zur Zeit ihrer Ablagerung die Bergkämme bis zu 2000 m herauf, bis in das Bereich des postglazialen Daunstadiums hinein, eisfrei gewesen sind, und daß in dem anderen Falle (Längenfeldbreccie) die vorangegangene Vergletscherung gleich der späteren Würmvergletscherung aus den Zentralalpen gekommen war. Nach Bildungszeit und Bildungsart erachten wir sie für Äquivalente der Höttinger Breccie und erachten sie gleich dieser für Repräsentanten der Mindel-Riß-Interglazialzeit.

Noch älter ist die Breccie, welche eine alte, den Wettersteinkamm querende Klamm beim Törl erfüllt. Sie tritt nicht mit Moränen in Beziehung. Wir bezeichnen sie daher als präglazial. Denkbar ist aber auch, daß sie einer ältesten Interglazialzeit angehört. Sind die in den Terrassen auftretenden interglazialen Profile durch die weithin verfolgbaren Materialien der Terrassen aufgereiht wie die Perlen an einer Schnur, so liegen die interglazialen Breccien isoliert.

Ihre Zusammengehörigkeit kann nur aus ihrer Beziehung zur Gehängegestaltung erschlossen werden, und es bleibt über die Einordnung der einzelnen Vorkommnisse manche Unsicherheit.

Eigenartig in den hochgelegenen Breccien ist die Vergesellschaftung von eckigem Hangschutt mit gerolltem Material, die in der Längenfeldbreccie, aber auch in der Hochlandbreccie ebenso wie in der Törlbreccie auftritt, das Auftreten von flacher Schichtung neben geneigter. Man hat es in allen Fällen nicht mit reinen Hangbildungen zu tun, sondern mit Übergangsgebilden zwischen solchen und Talsohlenbildungen, wie man sie heute namentlich in vermurten Tälern begegnet, und ebenso wie im Törl hat man es bei der Hochlandhütte und am Längenfelde mit Anzeichen hochgelegener Flußläufe gerade in Sattelgebieten zu tun, die ganz andere Reliefverhältnisse voraussetzen.

Folgende Tabelle gibt eine Übersicht der Ablagerungen in unserem Gebiete und im Inntale:

	Leutaschtal	Isartal	Loisachtal	Inntal
Würm-Eiszeit. .	Alle oberflächlich herrschenden Moränen.			
Riß-Würm-Interglazialzeit.	Schotterterrassen von Oberleutasch.	Schotterterrassen zwischen Seefeld und Tölz.	Terrassenschotter bei Garmisch.	Terrassenschotter zwischen Imst und Wörgl.
			Schieferkohlen von Großweil.	
	Deltaschotter und Breccien bei den Öfen.	Deltaschotter und Seetone zwischen Mittenwald und Fall.	Deltaschotter von Großweil.	Deltaschotter bei Rangger-Reißen, Weiherburg und Vomp. Seetone zwischen Imst und Gnadenwald.
	Arnspitzbreccie. . .	Viererspitzbreccie.	Nagelfluhbreccie der Wanne bei Eschenlohe.	Höttinger Schutt. Davaldbreccie.
Riß-Eiszeit. . . .	Liegendmoränen d. Schotter bei Oberleutasch, Weidach, der Arnspitzbreccie.	Tillit unter der Viererspitzbreccie. Tillit unter Seetonen bei Krünn. Liegendmoräne bei Wallgau am Wilfertsgraben.	Liegendmoräne der Schotter von Garmisch.	Sockelmoräne der Inntalterrasse.
Mindel-Riß-Interglazialzeit.		Hochalpbreccie. Hochlandbreccie.	Schachenbreccie. Längenfeldbreccie.	Judenköpflbreccie. Höttinger Breccie.
Mindel-Eiszeit .		Liegendmoränen unter der Hochalpbreccie, bei der Hochlandhütte.	Liegendmoränen am Längenfeld.	Liegendmoränen d. Höttinger Breccie.
Präglazialzeit . .			Breccie und Nagelfluh im Törl.	

Lange Zeit hat die Vorstellung geherrscht, die Alpen seien in der Tertiärperiode entstanden und seien seither unbeweglich gewesen. Die 1882 veröffentlichten Untersuchungen ergaben keinen Anhalt für die Beweglichkeit der Bühne, auf der sich das Glazialphänomen abgespielt hat; die 1902—1908 veröffentlichten förderten Beweise für die Schichtstörungen glazialer Ablagerungen, unsere jetzt zum Abschluß gelangten führen zu dem Ergebnisse, daß die oberbayerischen Kalkalpen noch in voller Bewegung begriffen sind.

Zwei Arten von Bewegungen lassen sich feststellen: Schwingungen, bei welchen sich der Sinn der Bewegung nach kurzer Zeit in das Gegenteil ändert, und monotone Bewegungen, die sich, soweit sich überblicken läßt, in einer bestimmten Richtung halten. Die Untersuchungen über die Schotterterrassen führten zum Nachweise der Schwingungen (22. 23. 25): Erst bog sich das Land ein, so daß es ertrank und mit Geröll verschüttet wurde, dann hob es sich wieder, ohne indes in seine frühere Lage zurückzukehren. Verbogen wurden und verbogen blieben die Spiegel der interglazialen Seen. Der Nachweis dafür ist nicht bloß im Inntale, sondern auch im Isartale mit einem erheblich größeren Grade von Sicherheit erbracht, als F. LEYDEN (27, S. 206) glaubt. Sein Einwand, daß der Zusammenhang eines interglazialen Sees zwischen Mittenwald und Tölz eine ganz willkürliche Annahme sei, trifft nicht das Wesen der Sache; denn die Verbiegungen eines alten Isartales ergeben sich, ob man ihn bis Tölz fortgesetzt denkt oder nicht. Auf eine Erstreckung von mehr als 32 km kennen wir im Isartal zwischen Mittenwald und Fall lakustre Ablagerungen, die nur einmal, in der schmalen Längstalstrecke zwischen Wallgau und Vorder-Riß eine Unterbrechung von 8 km aufweisen. An drei Stellen wird ihre interglaziale Lagerung erwiesen. Ihre Oberkante senkt sich von 950 m auf 900 m und schließlich auf 800 m. Hieraus ergibt sich eine Deformierung des alten Sees. Zu genau dem gleichen Ergebnis kommen wir, wenn wir uns den alten See bis Tölz fortgesetzt denken, wo abermals interglazial gelagerte Seetone auftreten, die nur bis 700 m reichen. Es klafft da nicht der geringste Widerspruch auf. Allerdings ist die Lücke zwischen den Seetonen von Fall und jenen von Tölz (21 km) erheblich größer als die zwischen Wallgau und Vorder-Riß. Das Tal ist dicht unterhalb Fall durch die Enge des Sülvensteines zusammengeschnürt, die LEYDEN (20, S. 42) für postglazial entstanden hält. Aber gerade durch diese Enge hindurch konnte ich die Seetone verfolgen. Der Riegel ist seit langem durchbrochen. Auch H. v. WOLF glaubt, daß bereits das Eis die Enge passiert hat (28, S. 274). Selbstverständlich können nicht alle unter Moränen auftretenden lakustren Ablagerungen als solche des interglazialen Sees gelten, wenn sie auch in Höhen auftreten, die der seinen entsprechen, wie manche Stauseeablagerungen, auf deren eine schon früher (22, S. 201) hingewiesen ist. Andererseits hat LEYDEN gewiß recht, wenn er warnt, alle Seeablagerungen, auch wenn sie nicht von jüngeren Moränen überlagert werden, einem einheitlichen, interglazialen Talsee zuzuordnen. Nicht überall haben indes die interglazialen Tone Moränenbedeckung, und wo solche fehlt, darf man nicht gleich auf postglaziale Seebildungen schließen. Unterhalb Mittenwald sah man früher in einem schönen Aufschlusse Seetone ohne Moränenbedeckung. Man hätte hier meinen können, daß ein postglazialer

Seeton vorläge, wenn genaues Abgehen nicht gezeigt hätte, daß sich die Tone in den interglazial gelagerten Tonen des Nachbargehänges fortsetzen; das ist seither durch Erweiterung des Aufschlusses offenbar geworden. Wenn man an der Isar einige Kilometer unterhalb Vorder-Riß typische lakustre Sande auf Moränen sieht, so wird man doch nicht behaupten, daß ganz gleich aussehende Seeablagerungen bei Vorder-Riß postglazial seien, weil Moränen auf ihnen fehlen. Und wer die großen Deltabildungen beim Sandofen am Wilfertsgraben gesehen hat, der wird die 4 km weit entfernten, an entsprechender Stelle auftretenden Seetone von Fall doch nicht deswegen für postglazial halten, weil sie von postglazialen Schottern überlagert werden, mit denen sie nirgends in Zwischenlagerung treten. Leyden selbst hat 1920 alle diese Vorkommnisse für interglazial erachtet und von einem zusammenhängenden, stattlichen interglazialen See im Isartale gesprochen (21, S. 42), dessen stauende Barre er allerdings irrigerweise in der Sülvensteinenge gesucht hat.

Ich gehe auf diesen Punkt so ausführlich ein, weil mir wichtig erscheint, daß das, was aus den Beobachtungen sich direkt ergibt, in seiner Tragweite nicht durch allgemein gehaltene, nicht näher begründete Zweifel beeinträchtigt wird. W i r h a b e n i m B e r e i c h e d e r a l t e n V e r g l e t s c h e r u n g e n i n d e n A l p e n e i n e n g a n z e i g e n e n T y p u s v o n K r u s t e n b e w e g u n g e n, d e r i n e i n e m r a s c h e n E i n s i n k e n e i n e s G e b i e t e s u n d u n m i t t e l b a r d a r a u f f o l g e n d e r H e b u n g b e s t e h t, nämlich Schwingungen. Daneben gibt es aber auch monotone Bewegungen. Solche haben wir aus den alten Breccien unseres Gebietes erschließen können. Sie verraten uns eine fortschreitende Hebung des Wetterstein- und Karwendelgebirges, und morphologische Gründe führen zur Annahme einer fortschreitenden Senkung der Talweitung von Garmisch-Partenkirchen, die an einem großen, offenbar noch lebenden Bruche am Eibsee endet. Der Sinn dieser Bewegungen ist im engen Sinne des Wortes ein orogenetischer. Sie schaffen Berge. E s d a n k e n d i e g e n a n n t e n G e b i r g e u n d d i e d e m e i n e n v o r g e l a g e r t e T a l w e i t u n g i h r e H ö h e n l a g e m o n o t o n e n H e b u n g e n, w e l c h e d u r c h g e r a u m e Z e i t i n e i n u n d d e m s e l b e n S i n n e g e w i r k t h a b e n.

Welche Beziehungen zwischen diesen monotonen Krustenbewegungen und der Tektonik des Gebirges spielen, wird sich erst herausstellen, wenn ihre weitere Verbreitung festgestellt sein wird. Für denjenigen, dem das Wetterstein- und Karwendelgebirge wie Aufsattelungen des Wettersteinkalkes im Bereiche des Hauptdolomites erscheinen und der wegen der tiefen Lage des Neokoms am Eibsee dessen Gebiet als Einmuldung deutet, ist allerdings die Sache sehr einfach. Er erblickt Hebungen am Orte der Aufsattelungen und Senkungen im Bereiche von Einsenkungen. Aber die Lehre vom Deckenbau der deutschen Alpen läßt so einfache tektonische Auffassungen nicht mehr zu. Die schwingenden Krustenbewegungen könnte man geneigt sein, mit einer Wellenbewegung des ganzen Gebirges in Beziehung zu bringen. Aber wir haben in den Alpen weder Beweise für stehende noch für fortschreitende Wellenbewegungen. Dagegen kennen wir in anderen alten Gletschergebieten erzwungene Schwingungen (25, S. 621), dadurch hervorgerufen, daß die Last der Vergletscherung ein Land eindrückte, worauf es sich nach deren Schwin-

den wieder hebt. Beschränkt auf das Gebiet einer alten mächtigen Vergletscherung sind die im Inntale und im Isartale nachgewiesenen Krustenbewegungen, die wir uns allerdings nicht so eng an die Talgebiete geknüpft denken, wie es LEYDEN tut (27, S. 208). Wenn diese Schwingungen im Loisachtale nicht nachweisbar sind, so hängt dies möglicherweise damit zusammen, daß hier die monotone sinkende Bewegung den Wiederanstieg nach dem Schwinden des Eises wettmachte. Die Kombination isostatischer Bewegungen mit orogenetischen kann in der Tat zu einer völligen Verwischung des Typus der einen oder anderen führen. Man denke sich eine so schwere Eislast auf die bewegliche Bühne eines in orogenetischer Bewegung begriffenen Gebirges gelegt. Dann werden die Teile, die eine aufsteigende Tendenz haben, in derselben gehemmt, während die Teile mit sinkender Tendenz in letzterer bestärkt werden. Umgekehrt verhält es sich dann bei Wegnahme der Eislast. So lassen sich die mannigfachen Unstimmigkeiten, welche das Bewegungsbild der Alpen mit bloßen erzwungenen isostatischen Bewegungen zeigt, durch deren Kombination mit ununterbrochen vonstatten gehenden orogenetischen Bewegungen erklären (23, S. 251. 25, S. 622).

Erschienen uns beim Beginne unserer Untersuchungen die Alpen als einheitliche, bewegungslose Scholle, welche eine solide Unterlage für die kommenden und gehenden Vergletscherungen bot, so erscheinen sie uns heute als ein in starker Bewegung begriffener Teil der Erdkruste, und wir meinen neben den orogenetischen Eigenbewegungen auch solche zu erkennen, welche durch das Kommen und Gehen des Eises verursacht worden sind. Zu den großen Veränderungen, welche die aus dem Gebirge herausströmenden Gletscher in dessen Relief erzeugt haben, gesellen sich während des Eiszeitalters auch solche durch Krustenbewegungen, ja selbst durch vulkanische Explosionen, und durch das gleichzeitige, bis in die jüngste geologische Vergangenheit andauernde Zusammenwirken exogener und endogener Kräfte ist das heutige Antlitz des Gebirges geformt worden.

Ausgegeben am 25. Juni.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei

1925 XVIII

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

NOV 9 1925

BERLIN 1925

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang einer aufzunehmenden Mitteilung soll in der Regel in den Sitzungsberichten bei Mitgliedern 32, bei Nichtmitgliedern 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte, in den Abhandlungen 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Abhandlungen nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 200 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1925

XVIII. Gesamtsitzung. 28. Mai.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

1. Hr. Eduard Meyer sprach über die Volksstämme des ältesten Kleinasiens, das erste Auftreten der Indogermanen in der Geschichte und die Probleme ihrer Ausbreitung. (Ersch. später.)

Ob die Annahme begründet ist, daß die zahlreichen ganz verschiedenartigen Sprachen Kleinasiens dennoch untereinander verwandt sind, erscheint sehr fraglich. Vielmehr scheint auch hier der ursprüngliche Zustand vorzuliegen, daß innerhalb einer somatisch und kulturell gleichartigen Bevölkerung sich zahlreiche Sprachen von ganz verschiedenem Typus mit eng beschränktem Gebiet ausgebildet haben; die Ausbreitung großer Sprachstämme wie der Indogermanen, Semiten, Türken usw. ist überall erst das Ergebnis einer geschichtlichen Entwicklung.

In Kleinasien treten uns Indogermanen zuerst in den sog. Chetitern und den Luviern entgegen, deren Sprache aufs stärkste mit einheimischen Elementen gemischt ist und die somatisch ganz in diese aufgegangen sind. Dann kommt im achtzehnten Jahrhundert eine neue große Welle, und zwar von arischen (indisch-iranischen) Stämmen, die in Vorderasien überall die Herrschaft gewinnen und (wie auch die Chetiter) das Pferd und den Streitwagen nebst den Rennspielen eingeführt haben. Wahrscheinlich sind sie nicht über den Kaukasus, sondern von Osten her vorgedrungen. Das führt auf das Problem der Urheimat der Indogermanen; hier werden die Gründe, die gegen eine Heimat im Ostseegebiet sprechen, dargelegt und dabei auch auf den von allen anderen indogermanischen Sprachen stark abweichenden Charakter des Germanischen hingewiesen.

2. Hr. Zimmermann legte eine Arbeit über den Begriff der Knickgrenze vor.

Es werden die herkömmlichen Definitionen der Knickgrenze besprochen und die Bedingungen für ihre Brauchbarkeit untersucht. Die Lücken, die sie gegenüber der neueren Entwicklung der Theorie offen lassen, werden durch eine umfassendere Festsetzung des Begriffes beseitigt.

3. Vorgelegt wurden: von den Acta Borussica die 2. Hälfte des XI. Bandes der Abteilung »Die Behördenorganisation und die allgemeine Staatsverwaltung im 18. Jahrhundert« (Berlin 1925), »Politische Correspondenz Friedrichs des Großen«, 39. Band (Berlin 1925) und »Leonhardi Euleri opera omnia« Series I, Opera mathematica, vol. 14 (Lipsiae et Berolini 1925).

4. Vorgelegt wurde ferner das Buch des Inhabers der silbernen Leibniz-Medaille, Hrn. Prof. Dr. Edmund O. von Lippmann in Halle: »Geschichte der Rübe (Beta) als Kulturpflanze von den ältesten Zeiten an bis zum Erscheinen von Achards Hauptwerk (1809)« (Berlin 1925).

Der Begriff der Knickgrenze.

Von H. Zimmermann.

Schon vor längerer Zeit habe ich Erörterungen über den Begriff eines seit Jahren so vielfach untersuchten und neuerdings in umfangreichen Werken behandelten Vorganges gewissermaßen entschuldigen und besonders rechtfertigen zu müssen geglaubt[1]. Wenn ich jetzt nochmals auf denselben Gegenstand zurückkomme, so scheint das in erhöhtem Maße nötig zu sein. Es wird sich aber zeigen, daß die Fortschritte, die die Theorie inzwischen gemacht hat, zu einer erneuten Prüfung des Grundbegriffes drängen. So läßt z. B. schon der auf Seite 262ff. des Jahrganges 1923 dieser Berichte erbrachte Beweis, daß auch Stäbe mit nicht gerader Achse die Eulersche Knickgrenze erreichen können, darauf schließen, daß die meisten früheren, an die Bedingung vollkommener Geradheit geknüpften Begriffsfestsetzungen zu eng gefaßt sein müssen. Doch nicht nur dies: auch nach dem früheren Bestande der Theorie bildeten die Schwankungen und Unklarheiten im Begriffe der Knickgrenze mindestens einen Schönheitsfehler, darüber hinaus aber in einzelnen Fällen den Anlaß zu Streitigkeiten. Nachstehend soll versucht werden, eine festere Grundlage zu finden.

I. Die Knickgrenze nach Euler und nach der genaueren Gleichung der Biegelinie.

Bekanntlich wird bei Ableitung der Eulerformel eine Biegelinie von sehr schwacher Krümmung vorausgesetzt und eine in diesem Falle zulässige, aber nur annähernd richtige Gleichung für das Moment der inneren Kräfte — nämlich $M = -EJd^2y : dx^2$ — benutzt. Das damit gefundene Ergebnis, daß, wenn die Verhältnisse so sind, daß überhaupt eine Ausbiegung des geraden achsrecht belasteten Stabes eintreten kann, diese Biegung unbestimmt wird, hat die Forscher nicht befriedigt und auf die Vermutung geführt, daß das sonderbare Ergebnis nur eine Folge der ungenauen Rechnung sei. Schon Lagrange hat daher die Aufgabe mit Benutzung des strengen Ausdruckes für den Krümmungshalbmesser der Biegelinie gelöst, und nach ihm haben viele andere denselben Weg eingeschlagen — alle mit dem gleichen Schluß, daß die Unbestimmtheit der Ausbiegung hierdurch beseitigt wird. Für die Anwendung hat man aber dabei nichts gewonnen; denn es zeigte sich (nach Grashofs Ausdrucksweise), daß da »die Verhältnisse meistens von solcher Art sind, daß die Last nur wenig größer als die Eulersche Knicklast zu sein

[1] S. Zentralblatt d. Bauverwaltung 1922 S. 34: »Die Knickfestigkeit vollwandiger Stäbe in neuer einheitlicher Darstellung«.

braucht, um eine unzulässige, nämlich solche Größe der Ausbiegung zu bewirken, die eine übermäßige Anstrengung oder gar die Zerknickung des Stabes zur Folge haben würde«. Es möge dies durch ein paar einfache Beispiele erläutert werden.

Wenn ein Stab von 1 m Länge durch Druckkräfte belastet wird, die um 1 mm von seiner Achse abweichen und um 2 v. H. unter der EULERschen Knicklast liegen, so biegt er sich in der Mitte um 63 mm durch. Wenn dieselben Kräfte achsrecht wirken, ist die Durchbiegung nach der EULERschen Berechnungsweise Null, nach der strengen Rechnung imaginär. Überschreiten sie dann aber die Knicklast um 2 v. H., so steigt die rechnungsmäßige Durchbiegung auf 124 mm; sie ist also jetzt (bei dem genau geraden und achsrecht belasteten Stabe) fast doppelt so groß als vorher bei der stark einseitigen Belastung. Selbst bei einer Überschreitung der EULERschen Knicklast um nur 0.1 v. H. ergibt die strenge Berechnung immer noch eine Durchbiegung von 28 mm. Eine Kraft von einem Tausendstel der Knicklast ist aber bei den üblichen Einrichtungen kaum zu messen. So erklärt sich die den Versuchstechnikern geläufige Erfahrung, daß die Zeiger nicht mehr zum Stillstand kommen, wenn die EULERsche Knicklast nahezu erreicht ist, geschweige denn wenn sie — ob auch noch so wenig — überschritten wird.

Ist man hiernach (wie GRASHOF schon 1866 in der ersten Auflage seiner Festigkeitslehre hervorgehoben hat) durch praktische Rücksichten genötigt, die Knickgrenze nach der EULERformel zu bestimmen, so ist man anderseits auch theoretisch dazu berechtigt. Denn dieselbe Grenze ist auch nach der strengen Formel scharf bestimmt, während für höhere Belastungen wegen der stetigen Veränderung der Durchbiegungen kein irgendwie ausgezeichneter zu einer Grenzfestlegung geeigneter Wert mehr angebbar ist. Das läßt sich in folgender Weise veranschaulichen.

Es sei K die Knickkraft nach EULER, S die vorhandene Stabkraft, δ_E die Durchbiegung nach EULER, δ_G die genauer berechnete Durchbiegung. Dann ist

	nach EULER:	genau:
bei $S < K$:	$\delta_E = 0$;	δ_G imaginär;
» $S = K$:	δ_E unbestimmt;	$\delta_G = 0$.

Wenn S von Null an wächst, geht also die Durchbiegung in dem Augenblick von Null in einen unbestimmten Wert über, in dem S den Wert K erreicht bei der Berechnungsweise nach EULER; dagegen von einem imaginären Werte in den Wert Null bei der strengen Berechnung. Beide Verfahren haben an dieser selben Stelle eine Unstetigkeit. Es sprechen also auch theoretische Gründe dafür, gerade sie als Knickgrenze zu bezeichnen. Tut man das, so gelangt man zu völlig gleichen Ergebnissen, ob man nach dem einen oder dem anderen Verfahren rechnet. Die beginnende Möglichkeit einer Durchbiegung bei genau achsrechter Belastung ist dann das Kennzeichen der Knickgrenze für den vollkommen geraden, überall gleichbeschaffenen Stab. Über die Lagerungsweise ist dabei noch nichts vorausgesetzt.

Stimmt man diesem Vorgehen zu — und es ist nicht ersichtlich, was man dagegen einwenden könnte —, so werden alle von manchen Schriftstellern

aus dem nur näherungsweise gültigen Rechnungsverfahren Eulers hergeleiteten Bedenken hinfällig. Und betrachtet man die Frage noch einmal von der rein mathematischen Seite, so erscheint es selbstverständlich, daß der Unterschied zwischen der genauen und der Näherungsformel für den Krümmungshalbmesser sich erst dann geltend machen kann, wenn überhaupt eine Krümmung eintritt, also nach Erreichen der Knickgrenze.

II. Knickgrenze und Tragkraft.

Wenn man die Spannungen berechnet, die ein gerader Stab unter dem Einfluß außerachsig wirkender Druckkräfte erleidet, so zeigt sich, daß sie unendlich groß werden würden, wenn die Stabkraft den Wert erreichen könnte, der den Stab bei achsrechtem Angriff an die Knickgrenze bringt. Ähnliches tritt bei einem gekrümmten Stabe ein, auf dessen Enden Druckkräfte in der Richtung der Stabsehne wirken. Da nun unendlich große Spannungen nicht möglich sind, und da die betreffenden Rechnungen sogar schon dann ungültig werden, wenn die Spannungen auch nur die Elastizitätsgrenze überschreiten, so ist der Schluß berechtigt, daß solche Anordnungen keine Knickgrenze haben. Und der Satz, »daß die Exzentrizität auf die Höhe der Knickgrenze keinen Einfluß ausübt«, erscheint geeignet, Mißverständnisse herbeizuführen, da er offenbar nur in der etwas abgeänderten Form richtig ist: »Die Exzentrizität des Kraftangriffes ist ohne Einfluß auf die Höhe der Knickgrenze, die der Stab haben würde, wenn keine Exzentrizität vorhanden wäre«[2]. Wir haben hier ein Beispiel dafür, zu welchen Irrungen es führen kann, wenn die mechanische Seite einer Aufgabe hinter der mathematischen Form zurückgesetzt wird. Die Entwicklungen in den unten genannten Quellen lehren, daß man auch durch willkürliche mathematische Annahmen hindurch zu Ergebnissen gelangen kann, die richtig sind, wenn die fraglichen Annahmen ausgeschlossen werden.

Prüft man näher, worauf die nicht einwandfreien Ansichten beruhen, so bemerkt man eine Lücke in der bisherigen Festsetzung des Begriffes der Knickgrenze. Sie genügt, wie unter I gezeigt, zwar für den vollkommen geraden, überall gleichbeschaffenen und achsrecht belasteten Stab; offenbar aber nicht mehr für Anordnungen, die ihre Form schon bei geringer Belastung ändern. Nun tritt bei der unter I besprochenen Grenze außer dem Beginn der Durchbiegung noch ein weiteres Merkmal auf: die Unbestimmtheit ihrer Größe; dies allerdings nur bei dem Berechnungsverfahren nach Euler. Läßt man das gelten — was ja als unbedingt zulässig erwiesen ist —, so gewinnt man ein weiteres Kennzeichen für die Knickgrenze, nämlich das Unbestimmtwerden der Durchbiegung, und das bleibt anwendbar, auch wenn Formänderungen schon eintreten, bevor die Knickgrenze erreicht ist. Nicht gleichgültig ist es aber, wie groß diese Verformungen sind. Das wird bei der beanstandeten Festsetzung der Knickgrenze übersehen, die ja sogar un-

[2] Siehe Rudolf Mayer »Die Knickfestigkeit« (1921) § 2, § 3, § 5. Auf die Bedenken, die gegen die dem oben angeführten Satze zugrunde liegenden Anschauungen zu erheben sind, hat Elwitz in seiner Lehre von der Knickfestigkeit (S. 34) schon 1918 hingewiesen.

endlich große Formänderungen und Spannungen in Betracht zieht. Die Festlegung der Knickgrenze ist nicht nur eine Frage der Form, sondern auch eine solche der Tragkraft. Vorgänge der Formänderung, die jenseits der möglichen Tragkraft liegen, haben keine praktische, ja nicht einmal eine theoretische Bedeutung. Dieser Erkenntnis gemäß habe ich in der im Eingange erwähnten Untersuchung über die Knickfestigkeit nur annähernd gerader Stäbe den das Unbestimmtwerden der Durchbiegung ausdrückenden Gleichungen stets den Nachweis beigefügt, daß es bei nur sehr kleinen Formänderungen eintritt. Das ist ein ganz wesentlicher Punkt, dessen Nichtbeachtung die Brauchbarkeit der Ergebnisse in Frage gestellt hätte. In dieser Doppelbedingung liegt natürlich kein Widerspruch. Denn auch das Verhalten solcher nicht gerader Stäbe zeigt an der Knickgrenze eine Unstetigkeit: sie biegen sich um ein geringes Maß durch bis die Grenze erreicht ist, und dann erst wird die Biegung unbestimmt; ähnlich wie beim vollkommen geraden Stabe, nur ist bei diesem die Durchbiegung unter der Knickgrenze nicht sehr klein, sondern Null.

III. Das Bestimmtwerden der Formänderungen an der Knickgrenze.

Wir betrachten einen an der Knickgrenze befindlichen Stab von einfachster Anordnung, nämlich mit vollkommen gerader Achse und frei drehbar gelagerten Enden: den Eulerfall. Es wird also achsrechte Belastung vorausgesetzt. Der Stab bleibt zwar gerade, kann aber auch ohne irgendeinen Kraftaufwand in eine gekrümmte Form gebracht werden, da ja die Durchbiegung an der Knickgrenze unbestimmt wird. Daraus folgt, daß man ihm (in gewissen, durch die Stabspannung bedingten Grenzen) eine willkürlich bestimmte Durchbiegung geben kann, ohne an dem Gleichgewichtszustande etwas zu ändern; d. h. er bleibt bei dieser Formbestimmung an der Knickgrenze. Derselbe Stab werde an den Enden in beliebigem Grade elastisch eingespannt. Dann gelangt er erst bei einer höheren Belastung an die Knickgrenze: sie ist aber auch jetzt dadurch gekennzeichnet, daß die Formänderung unbestimmt wird, und man kann daher auch eine solche Anordnung in eine bestimmte Form bringen, ohne die Knickgrenze zu beeinflussen. Wesentlich für den ganzen Vorgang ist, daß dabei auf das an der Knickgrenze befindliche Gebilde keinerlei Kraftwirkung ausgeübt wird und ausgeübt zu werden braucht. Hieraus folgt eine neue Art der Festsetzung des Begriffes der Knickgrenze, die man in den Satz fassen kann: Ein Stab oder ein Stabzug befindet sich unter dem Einfluß von Druckkräften an der Knickgrenze, wenn er einer Formänderung keinen Widerstand entgegensetzt.

Man könnte nun dieser Art der Begriffserklärung zwar zustimmen, sie aber dennoch als einen Umweg und als entbehrlich ansehen. Es wird sich gleich zeigen, daß dem nicht so ist, sondern daß im Gegenteil die gebräuchlichen Erklärungen mit einem Mangel behaftet sind, der die vorstehende Erweiterung geradezu als notwendig erscheinen läßt.

Die ganze bis in die neueste Zeit geübte Handhabung der Knicktheorie beruht auf einer weitgehenden Außerachtlassung der in der Wirklichkeit des

Bauwesens vorliegenden Verhältnisse. Die Theorie ist entstanden aus dem Wunsche, die Tragfähigkeit von Säulen zu berechnen, wie schon der Titel des grundlegenden Werkes von Lagrange »Sur la figure des colonnes« (1770) erkennen läßt. Wie es sich hier stets um einzelne Stäbe handelt, so auch bei allen bekannt gewordenen Knickversuchen von Hodgkinson bis Karman und weiter. Im neuzeitlichen Eisenbau kommen aber solche aus jedem Zusammenhang losgelöste Einzelteile kaum vor. Trotzdem ist es heute noch feststehender Brauch, die Teile so zu berechnen, als ob ihre Knickfestigkeit von ihrer Verbindung mit den übrigen nicht abhinge. Bei dieser Annahme ist die Erklärung der Knickgrenze als der Zustand, in dem die Formänderungen des Teiles unbestimmt werden (ohne eine gewisse endliche Größe zu überschreiten), richtig und ausreichend. Sie genügt auch noch, wenn der Teil mit anderen ebenfalls auf Knicken beanspruchten oder unbelasteten Teilen biegefest verbunden ist. Sie genügt nicht mehr, wenn der auf Druck beanspruchte Teil mit anderen verbunden wird, auf die Lasten in solcher Weise wirken, daß sie bestimmte Formänderungen erzeugen, also zum Beispiel mit Trägern. Denn es sind dann selbstverständlich auch die Formänderungen der angeschlossenen Druckglieder bestimmt, und diese könnten die Knickgrenze nicht erreichen, wenn das Unbestimmtwerden ihrer Formänderungen eine notwendige Bedingung dafür wäre. Durch die einleitende Betrachtung ist aber nachgewiesen, daß man den an der Knickgrenze befindlichen Teilen eine Verformung von beliebiger Größe vorschreiben kann, ohne den Knickzustand zu ändern. Die herkömmliche Erklärung der Knickgrenze führt mithin in solchen Fällen auf einen Widerspruch. Um ihn zu beseitigen, muß man entweder für die verschiedenen Fälle verschiedene Festsetzungen über den Sinn der Knickgrenze treffen oder die zuletzt gegebene Begriffserklärung annehmen. Diese gilt für alle Fälle.

Die hier angestellte Betrachtung füllt jedenfalls eine Lücke in der Theorie aus. Sie ist aber auch für die Anwendung nicht unwichtig. Verbindungen von Druckstäben mit Trägern sind nicht etwa seltene Ausnahmen, sondern kommen sehr häufig vor. So z. B. als Stützen unter Deckenträgern oder als Druckpfosten in Brücken mit Querträgern, vorausgesetzt, daß die zweierlei Teile biegefest aneinander angeschlossen sind. Die Stützen und Pfosten befinden sich nach der letzten Begriffserklärung an der Knickgrenze, wenn die Träger so belastet werden, daß die ersteren ihrer Verbiegung keinen Widerstand mehr entgegensetzen. Die Träger biegen sich dann so durch, als ob sie gelenkig mit den Druckstäben verbunden wären. Dadurch ist auch die Endneigung dieser Stäbe sowie ihr Biegungspfeil bestimmt, somit auch ihre Spannung. Liegt diese nicht über dem zulässigen Wert, so ist die ganze Anordnung sicher. Das Fehlen gelenkiger Anschlüsse hat hiernach gar keinen Einfluß auf die Knickgrenze, sondern nur auf die Spannung an dieser Grenze. Daß das alles ohne jede Rechnung nur durch bloße Überlegung ermittelt werden kann, ist ohne Zweifel ein Vorzug der neuen Grenzbestimmung. Was man sonst noch braucht, läßt sich leicht berechnen, wie ich in der kürzlich erschienenen Schrift »Knickfestigkeit der Stabverbindungen« gezeigt habe (Verlag von Wilhelm Ernst u. Sohn, Berlin).

Vor einem Mißverständnis muß aber noch gewarnt werden: die Belastung der Träger beeinflußt die Knickgrenze der Stützen nicht; eine Querbelastung der Druckglieder selber würde dagegen die Erreichung der Grenze ausschließen. Und nicht nur dies: auch die Querbelastung von nur zur Aussteifung dienenden, also von Achsenkräften freien Teilen einer Stabverbindung verhindert es, daß die der Verbindung ohne eine solche Querbelastung zukommende Knickgrenze erreicht wird. Um das ganz klarzumachen, denken wir uns als Beispiel einen aus zwei belasteten Ständern und einer oberen Quersteife ohne Achslast bestehenden Halbrahmen. Er hat eine bestimmte Knickgrenze, die er aber nicht erreichen kann, wenn man die Steife als Querträger benutzt und belastet. Dagegen hindert die Querbelastung der Steife die Ständer an der Erreichung ihrer Knickgrenze nicht. Der Beweis ist leicht zu führen.

IV. Die Knickbedingung für den neuen Grenzbegriff.

Die Knickbedingungen sind bisher aus den Gleichungen für die Formänderungen einseitig belasteter (gerader oder nicht gerader) Stäbe immer nur nach der Vorschrift abgeleitet worden, daß die Formänderungen unbestimmt werden sollen. Das paßt natürlich nicht mehr zum neuen Begriff der Knickgrenze. Es ist daher noch zu zeigen, wie die Knickbedingung für diesen gefunden wird. Wir wählen dazu das Beispiel eines geraden, an beiden Enden elastisch eingespannten Stabes. Die Grundformeln finden sich im Jahrgang 1921 der Sitzungsberichte auf S. 778 und in vereinfachter Gestalt in dem in Anmerkung 1 genannten Aufsatze des Zentralblattes der Bauverwaltung oder dem unter III erwähnten Buche über die Knickfestigkeit der Stabverbindungen [S. 19, Gl. (42)]. Wenn auf die Enden eines solchen wagerecht liegend gedachten mit S achsrecht belasteten Stabes von der Länge a die gleichen Momente M einwirken, so werden die Enden um die Winkel ν' und ν'' verdreht, wo

$$\text{links} \qquad \nu' = \frac{[1 + (t - s)\, m'' : aS]\,(t + s)\, M : aS}{(1 + tm' : aS)\,(1 + tm'' : aS) - s^2 m' m'' : (aS)^2};$$

$$\text{rechts} \qquad -\nu'' = \frac{[1 + (t - s)\, m' : aS]\,(t + s)\, M : aS}{(1 + tm' : aS)\,(1 + tm'' : aS) - s^2 m' m'' : (aS)^2}.$$

Hierin sind m' und m'' die Spannziffern für das linke und das rechte Ende des Stabes; s und t Hilfsgrößen, die von a, S und dem Trägheitsmoment J des Stabquerschnittes abhängen.

Wir berechnen hieraus das Moment M, das erforderlich ist, um etwa das linke Ende des Stabes um einen Winkel ν' zu verdrehen. Es ergibt sich

$$\frac{M}{aS} = \frac{(1 + tm' : aS)\,(1 + tm'' : aS) - s^2 m' m'' : (aS)^2}{[1 + (t - s)\, m'' : aS]\,(t + s)}\, \nu'.$$

Das Moment, das eine solche Verdrehung herbeiführen kann, wird Null bei jedem beliebigen Wert von ν', wenn

$$(1 + tm' : aS)\,(1 + tm'' : aS) - s^2 m' m'' : (aS)^2 = 0$$

ist. Und dies ist die schon bekannte Knickbedingung für den an beiden Enden elastisch mit m' und m'' eingespannten Stab.

Man ersieht hieraus, daß sich die Bedingung, unter der der Stab einer Formänderung keinen Widerstand entgegensetzt, in einfachster Weise ermitteln läßt, und daß man auf dieselbe Gleichung geführt wird, die man erhält, wenn man das Unbestimmtwerden der Formänderung als Kennzeichen der Knickgrenze annimmt.

Neben der größeren Allgemeinheit besitzt die neue Art der Erklärung (»Definition«) des Begriffes der Knickgrenze noch einen anderen Vorzug, wie gerade diese Rechnung eindringlich lehrt. Von jeher haben manche Schriftsteller Anstoß daran genommen, daß ein vollkommen gerader, überall gleichbeschaffener und genau achsrecht auf Druck belasteter Stab sich verbiegen können soll. Man hielt eine solche Behauptung für einen inneren Widerspruch und sah sich veranlaßt, immer aufs neue nach einer besseren, nach der »richtigen« Knickformel zu suchen, deren aus diesem Grunde eine Menge aufgetaucht und wieder verschwunden sind. Nun ließen sich diese Bedenken zwar auf mancherlei Weise widerlegen. Ein Beispiel dafür findet sich u. a. in dem in Anmerkung 1 genannten Aufsatz. Und als völlig haltlos wurden sie (wie auf S. 280 u. ff. der Sitzungsberichte für 1923 näher ausgeführt ist) erwiesen, als sich zeigte, daß auch nicht gerade und nicht achsrecht belastete Stäbe die Eulersche Knickgrenze erreichen können. Dennoch erscheint es als ein Gewinn an Verständlichkeit, wenn auch noch die Bedingung des Unbestimmtwerdens der Formänderungen als Hilfsmittel zur Bestimmung der Knickgrenze ausgeschaltet werden kann. Das leistet die neue Begriffsfestsetzung[3].

---

[3] Daß auch ernste Forscher das Bedürfnis nach einer besseren Feststellung des Begriffes der Knickgrenze empfunden haben, zeigt das Vorgehen von Prandtl (1899) und Sommerfeld (1905), die die Annährung an die Knickgrenze durch die Zunahme der Schwingungsdauer eines am oberen Ende eines lotrecht eingespannten Stabes angebrachten Gewichtes bestimmten. Vgl. Mayer, a. a. O. S. 125.

Über die Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie im 19. Jahrhundert.

Von LUDWIG BIEBERBACH.

(Vorgetragen am 2. April 1925 [s. oben S. 217].)

Die eigentliche Geschichte der nichteuklidischen Geometrie im 19. Jahrhundert beginnt mit den Jahren 1856 bis 1867. Die Entwicklung des Parallelenproblems in den vorausgegangenen 50 und mehr Jahren hat die mathematische Öffentlichkeit nicht miterlebt. Nun steht sie vor einer völlig neuen Situation: Das Parallelenproblem ist, wenn nicht gelöst, so doch so formuliert, daß es mathematischen Wert hat. Dies ist vornehmlich das Werk von LOBATSCHEFSKIJ, von BOLYAI und von GAUSS, deren Gedanken in dem vorhin genannten Dezennium bekannt zu werden beginnen. 1855 ist das Todesjahr von GAUSS. 1856 erscheint die Schrift »GAUSS zum Gedächtnis« von SARTORIUS VON WALTERSHAUSEN. Hier wird zum erstenmal der GAUSSschen Überlegungen zur nichteuklidischen Geometrie gedacht. Näheres erfährt man aus dem Briefwechsel GAUSS-SCHUMACHER, dessen 2. Band 1860, dessen 5. Band 1865 erscheint. Hier findet man auch Hinweise auf LOBATSCHEFSKIJ. Endlich erscheint 1867 die 2. Auflage des 2. Bandes von BALTZER, »Elemente der Mathematik«, ein Werk, in dem man zum erstenmal den Einfluß der Entdecker der nichteuklidischen Geometrie merkt.

Die Situation ist eine völlig andere wie 50 Jahre vorher. Der 11. Euklidische Grundsatz, den man gewöhnlich dahin ausspricht, daß es in einer Ebene durch einen Punkt außerhalb einer Geraden zu dieser nur eine Parallele gibt, wird bei Euklid so formuliert, daß er eine, freilich negative, Definition der Parallelen in sich schließt: »Zwei gerade Linien, die von einer dritten so geschnitten werden, daß die beiden inneren an einerlei Seite liegenden Winkel zusammen kleiner als 2 Rechte sind, treffen genügend verlängert auf eben der Seite zusammen.«

Daß dieser Grundsatz nicht ebenso evident und einleuchtend ist, wie die anderen von Euklid ihm gleichgestellten oder neben ihm stillschweigend verwendeten, leuchtete schon seit grauen Zeiten ein.

Aber niemand wußte da etwas anderes zu machen, als ihn eben zu beweisen. Und was die einen bewiesen, das zerpflückten die anderen und suchten den Grundsatz heraus, der stillschweigend verwendet wurde, weil er evident erschien und der sich bei näherer Betrachtung nun doch nicht

als evident genug erweist. An diesem Spiel hatte die mathematische Öffentlichkeit[1], das Interesse verloren, trotzdem nach heutigem Urteil die Lambertschen Untersuchungen von 1766 einen viel versprechenden Keim in sich schlossen. So blieben auch die 1800 und 1833 erschienenen Arbeiten von Legendre und die 1840 deutsch erschienene Schrift von Lobatscheffskij unbeachtet.

Da erschien 1856 das Werkchen von Sartorius von Waltershausen »Gauss zum Gedächtnis«. Dort liest man auf Seite 81: »Die Geometrie betrachtete Gauss nur als ein konsequentes Gebäude, nachdem die Parallelentheorie als Axiom an der Spitze zugegeben sei; er sei indes zur Überzeugung gelangt, daß dieser Satz nicht bewiesen werden könne, doch wisse man aus der Erfahrung, z. B. aus den Winkeln des Dreiecks Brocken, Hohenhagen, Inselsberg, daß er näherungsweise richtig sei. Wolle man dagegen das genannte Axiom nicht zugeben, so folge daraus eine andere ganz selbständige Geometrie, die er gelegentlich einmal verfolgt und mit dem Namen antieuklidische Geometrie bezeichnet habe.«

Diese Andeutungen gewinnen an Klarheit in den Jahren 1860 und 1865, da Band 2 und Band 5 des Briefwechsels Gauss-Schumacher erscheinen. Man erhält dort den näheren Beleg für die ebengenannten Auffassungen. Der erste dieser Bände enthält einen Brief von Gauss aus dem Jahre 1831, in dem dieser an einen Versuch Schumachers, das Parallelenaxiom zu beweisen, anknüpft. Er schreibt dort[2]: »Das Unendliche ist nur eine façon de parler, indem man eigentlich von Grenzen spricht, denen gewisse Verhältnisse so nahe kommen, als man will, während anderen ohne Einschränkung zu wachsen verstattet ist. In diesem Sinne enthält die nichteuklidische Geometrie durchaus nichts Widersprechendes, wenngleich die wenigen, die sie kennenlernen, viele Ergebnisse derselben anfangs für paradox halten müssen, was aber für widersprechend zu halten nur eine Selbsttäuschung sein würde, hervorgebracht von der früheren Gewöhnung, die Euklidische Geometrie für streng wahr zu halten.«

Er fügt dem noch eine Reihe von Sätzen aus der nichteuklidischen Geometrie zu, auf deren Wiedergabe ich augenblicklich verzichten kann. Der 5. Band enthält einen Brief von Gauss aus dem Jahre 1846, in dem es so heißt[3]: »Ich habe kürzlich Veranlassung gehabt, das Werkchen von Lobatschefskij (Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Berlin 1840 bei G. Fincke. 4 Bogen stark) wieder durchzusehen. Es enthält die Grundzüge derjenigen Geometrie, die stattfinden müßte und strenge konsequent stattfinden könnte, wenn die Euklidische nicht die wahre ist; ein gewisser Schweikart nannte eine solche Geometrie Astralgeometrie, Lobatschefskij

[1] Als Ausdruck der öffentlichen Meinung mag z. B. ein Aufsatz von Crelle aus dem Jahre 1853 in Bd. 45 des Crelleschen Journals angeführt werden, wo es auf S. 17 und 18 heißt: »es sei und werde für immer unmöglich bleiben, die Begründung der Elemente der Geometrie, eben wie auch derjenigen der Analysis, zur Vollkommenheit zu bringen.« »Alle Vervollkommnung, die möglich ist, besteht ... darin: Erklärungen und Grundsätze aufzustellen, die am meisten geeignet sein dürften, unmittelbar bestimmte Vorstellungen und Erkenntnisse zu erzeugen oder zu erregen.«

[2] Vgl. Gauss, Werke Bd. VIII. S. 216.

[3] Vgl. Gauss, Werke Bd. VIII, S. 238.

imaginäre Geometrie. Sie wissen, daß ich schon seit 54 Jahren (seit 1792) dieselbe Überzeugung habe (mit einer gewissen späteren Erweiterung, deren ich hier nicht erwähnen will); materiell für mich Neues habe ich also im Lobatschefskijschen Werke nicht gefunden, aber die Entwicklung ist auf anderem Wege gemacht, als ich selbst eingeschlagen habe, und zwar von Lobatschefskij auf eine meisterhafte Art in echt geometrischem Geiste.«

Endlich erscheint 1867 das Werk von Baltzer, das an 3 Stellen (Seite III, 13—17, 146) für die nichteuklidische Geometrie eintritt. Baltzer schreibt dort auf Seite III: »Erst durch die Veröffentlichung von Gauss' Briefen an Schumacher ist die ungelöst beigelegte Frage wieder auf die Tagesordnung gebracht worden. Aus diesen Briefen erfährt man, daß Gauss frühzeitig den Sitz der Schwierigkeit erkannt hat, daß auf den bisherigen Wegen das alte Kreuz der Geometrie nicht überwunden werden kann, daß man etwas zu beweisen gesucht hat, was sich nicht beweisen läßt, sondern durch die Erfahrung entschieden wird, und daß Lobatschefskij den richtigen Weg mit Erfolg eingeschlagen hat. Zugleich ist durch Gerling die auf dasselbe Ziel gerichtete und nicht minder gelungene Arbeit Bolyais der Vergessenheit entrissen worden.

Um eine Parallele positiv zu definieren, hat man bei einem Winkel unter den von einem Punkt eines Schenkels auf der Ebene des Schenkels ausgehenden Schenkeln diejenigen, welche den anderen Schenkel des Winkels nicht schneiden, zu unterscheiden von denjenigen, welche den anderen Schenkel schneiden: Der die Grenze zwischen den schneidenden und den nichtschneidenden bildende Schenkel heißt parallel mit dem anderen Schenkel. Man kann nun beweisen, daß bei Parallelen die Summe der inneren Winkel 180° nicht übersteigt, und daß auch bei einem geradlinigen Dreieck die Summe der Winkel 180° nicht übersteigt[1]; und wenn es unter den geradlinigen Dreiecken ein Individuum gibt, bei dem die Summe der Winkel 180° beträgt, so schließt man, daß bei jedem geradlinigen Dreieck und bei je 2 Parallelen die Summe der inneren Winkel 180° beträgt[1]. Ob es ein solches Individuum gibt, kann durch Konsequenzen der allgemeinen Raumbegriffe nicht entschieden werden: an dieser Stelle der Geometrie bleibt nichts anderes übrig, als der Erfahrung das Wort zu erteilen. Im Kreise unserer Erfahrung gilt tatsächlich die gemeine Geometrie, wie sie von den Griechen ausgebildet worden ist; an sich könnte auch eine andere Species der abtrakten Geometrie gelten, die von Gauss, Lobatschefskij, Bolyai für alle Fälle entworfen worden ist.«

Für Lobatschefskij, Bolyai und Gauss dürfen die Grundsätze also nicht willkürlich sein, sondern sie müssen aus Anschauung oder Erfahrung stammen, und also evident sein, oder der Prüfung an der Erfahrung standhalten. Das Hinzunehmen der experimentellen Erfahrung bahnt eine Läuterung der naiven Auffassung der Evidenz an, ohne doch eine volle Klärung des Evidenzbegriffes zu bringen. In den neuen Anfangsgründen Lobatschefskijs von 1835 heißt es[2]: »Man hat .... daran gedacht, bei der Theorie der Parallellinien als

[1] Dies sind die Legendreschen Sätze, wie auch Baltzer in seinem Buche später erwähnt.
[2] Vgl. F. Engel, N. J. Lobatschefskij I, S. 76.

Grundlage zu benutzen, daß in den Dreiecken die Winkel von den Verhältnissen der Seite abhängen müssen. Zunächst erscheint eine solche Annahme ebenso einfach wie notwendig; aber wenn wir zu erforschen suchen, welche Begriffe wir davon haben, woher sie ihren Ursprung nimmt, so sind wir gezwungen, sie als ebenso willkürlich zu bezeichnen wie alle anderen, auf die man bis jetzt verfallen ist.

In der Natur erkennen wir eigentlich nur die Bewegung, ohne die Sinneseindrücke nicht möglich sind. Folglich sind alle übrigen Begriffe, z. B. die geometrischen, künstlich von unserem Verstande erzeugt, da sie den Eigenschaften der Bewegung entnommen sind; und deshalb ist der Raum an sich, für sich allein, nicht für uns vorhanden.«

»Der Unterschied bei den Gleichungen (der Euklidischen und der Lobatschefskijschen Geometrie) entspringt aus der Hinzufügung einer neuen Konstanten, die nunmehr die Beobachtungen liefern müssen, die wir aber hieraus ohne merkliche Abweichung so beschaffen finden, daß die bei praktischen Messungen von allen angenommene Geometrie mehr als genügend ist, selbst wenn sie an und für sich nicht streng richtig sein sollte. Das bedeutet entweder, daß dieses System sich zufällig in der Natur vorfindet oder daß alle in dieser für uns zugänglichen Abstände noch unendlich klein sind.«

Die astronomischen Beobachtungen lehren aber für alle uns zugänglichen Dreiecke eine allenfalls sehr kleine Abweichung der Winkelsumme eines Dreiecks vom Euklidischen Wert von 2 Rechten. So mag es, wie Lobatschefskij in den Anfangsgründen der Geometrie von 1830[1] sagt, wahrscheinlich sein, »daß die Euklidischen Sätze ganz allein wahr sind, obwohl sie für immer unbewiesen bleiben werden«.

Der Wandel in der Auffassung, den diese Gedanken Lobatschefskijs bedeuten, wird deutlich auch, wenn wir die analogen Äußerungen bei Johann Bolyai heranziehen und sie mit den Anschauungen seines Vaters Wolfgang vergleichen. Dieser machte seinen Sohn darauf aufmerksam, daß alle seine eigenen Versuche, das Euklidische Axiom durch ein anderes zu ersetzen, ihn nicht recht befriedigt hätten, denn keines habe den erforderlichen Grad geometrischer Evidenz besessen. So hält er es für unmöglich, das 11. Axiom zu beweisen[2]. In einem Brief an Gauss von 1831 schreibt Wolfgang, sein Sohn Johann habe »die Unmöglichkeit bewiesen, a priori zu bestimmen, ob das Axiom 11 wahr sei oder nicht«. D. h. also, die letzte Entscheidung über wahr oder falsch steht bei der Erfahrung.

Die logische Freiheit von Widersprüchen ist somit für sich allein ebensowenig ein Wahrheitskriterium wie die anschauliche Evidenz der Grundsätze. Der Anschauung und Erfahrung werden die Grundsätze und Grundvorstellungen entnommen. Es sind die Vorstellungen von Entfernung, Bewegung und Messen, die so an die Spitze treten und die z. B. die Ebene durch Schnitte von Kugeln usw. einführen lassen. Dazu kommt dann als Erträgnis

---

[1] l. c. S. 24.
[2] Math. Ann. 49, S. 155.

eines Bedürfnisses nach größerer Strenge eine positive Definition der Parallelen als, wie wir heute sagen, Dedekindscher Schnitt zwischen den Geraden durch einen Punkt, die eine andere treffen, und den Geraden, die sie nicht treffen, womit die stillschweigende Annahme verbunden ist, daß es Geraden beider Art gibt, eine Annahme, die nur Gauss allein als solche erkannte (vgl. die Seite 5 oben eingeklammerte Stelle seines Briefes von 1846). Diese Definition läßt noch den Parallelwinkel unbestimmt. Über diese Unbestimmtheit hat die Erfahrung zu entscheiden. Die neue Definition der Parallelen erlaubt dann die Entwicklung einer abstrakten Geometrie, die durch Aufstellung der Trigonometrie auf den gleichen Stand gebracht wird wie die Euklidische, und die logisch ebenso einwandfrei ist wie diese. Zwischendurch wird dabei erkannt, daß die sphärische Geometrie vom Parallelenaxiom unabhängig ist und daß auf den sogenannten Grenzkugeln, d. h. den Grenzlagen von Kugeln bei unendlich wachsenden Radien, die Euklidische Geometrie gilt.

Bolyai nimmt die gleiche philosophische Grundeinstellung ein wie Lobatschefskij. Die Inkonsequenzen derselben leuchten besonders deutlich ein aus einer Stelle, in der deutschen Ausgabe des Appendix, die Johann Bolyai selbst 1832 besorgt hat[1]. »Man hat nunmehr eine absolut wahre (d. i. von aller Voraussetzung freie) ebene Trigonometrie, worin jedoch die Größe i und ob sie vorhanden sei, durchaus unbestimmt bleibt, jedoch bis auf diese einzige Unbekannte alles bestimmt ist.« Für Johann Bolyai sind die übrigen Grundsätze der Geometrie einem Zweifel nicht unterworfen. Das sind Evidenzen, die keiner wirklichen Prüfung an der Erfahrung bedürfen. Man sieht eine Mischung eines Apriori mit Empirismus ohne konsequente Einhaltung eines dieser Standpunkte. Zum mindesten haben die Entdecker der nichteuklidischen Geometrie bezüglich des Parallelenaxioms den Kantischen Standpunkt verlassen, den dieser in der Kritik der reinen Vernunft[2] so ausdrückt: »So werden auch alle geometrischen Grundsätze, z. B., daß in einem Triangel 2 Seiten zusammen größer seien als die dritte, niemals aus allgemeinen Begriffen von Linie und Triangel, sondern aus der Anschauung, und zwar a priori mit apodiktischer Gewißheit abgeleitet.« Bezüglich der anderen geometrischen Grundsätze halten die Entdecker der nichteuklidischen Geometrie prinzipiell und im wesentlichen am Kantischen Standpunkt fest; abgesehen von gelegentlichen Ausnahmen bei Gauss und Lobatschefskij, die wir noch berühren werden.

Die gegenseitige Abgrenzung dessen, was etwa Lambert in seiner Theorie der Parallellinien Seite 147 freilich in anderem Sinn als Wahrheit und Gedenkbarkeit unterscheidet, mag ihr übriges getan haben. Die nichteuklidische Geometrie erweist sich als gedenkbar. Das ist ein Hauptergebnis der Untersuchung. So schreibt auch Gauss im Jahre 1817 an Olbers[3]: »Ich komme immer mehr zu der Überzeugung, daß die Notwendigkeit unserer Geometrie nicht bewiesen werden kann, wenigstens nicht vom menschlichen Verstande,

[1] Vgl. z. B. Stäckel: W. und J. Bolyai, Geometrische Untersuchungen II, S. 202.
[2] 1. Aufl. S. 25.
[3] Gauss, Werke Bd. VIII, S. 177.

noch für den menschlichen Verstand. Vielleicht kommen wir in einem anderen Leben zu anderen Einsichten in das Wesen des Raums, die uns jetzt unerreichbar sind. Bis dahin müßte man die Geometrie nicht mit der Arithmetik, die rein a priori steht, sondern etwa mit der Mechanik in gleichen Rang setzen.« Am 9. April 1830 schreibt Gauss an Bessel: »Nach meiner innigsten Überzeugung hat die Raumlehre in unserem Wissen a priori eine ganz andere Stellung wie die reine Größenlehre; es geht unserer Kenntnis von jener durchaus diejenige vollständige Überzeugung von ihrer Notwendigkeit (also auch von ihrer absoluten Wahrheit) ab, die der letzten eigen ist; wir müssen in Demut zugeben, daß, wenn die Zahl bloß unseres Geistes Produkt ist, der Raum auch außer unserem Geiste eine Realität hat, der wir a priori ihre Gesetze nicht vollständig vorschreiben können.«

Es handelt sich bei diesem Gegensatz gegen Kant, der sich noch weiter ausspinnen ließe, schließlich nur darum, daß gewisse Eigenschaften des Raumes dem a priori entzogen und dem erfahrungsmäßigen zugewiesen werden. Strittig bleibt freilich, welche Raumeigenschaften schließlich für das a priori noch übrig sind, sowie vielleicht auch, was unter dem a priori zu verstehen sei. Bolyai und Lobatschefskij sind geneigt, anzunehmen, daß eben ihr geometrisches System nur Apriori-Elemente enthält, daß man aber über die Natur des uns umgebenden Raumes nicht urteilen kann, da über die Parallelenfrage, also letzten Endes darüber, welche Geometrie die wahre ist, erst die Erfahrung die Entscheidung fällen kann. Zwar ist also Raum eine Form unserer Anschauung, aber eine Form, die noch einen gewissen Spielraum für die Angleichung an die Erfahrung läßt.

Legen wir uns nun noch die Frage vor, woher die Entdecker der nichteuklidischen Geometrie die Überzeugung nahmen, das Parallelenproblem gelöst zu haben. Es ist im wesentlichen die persönliche Überzeugung, daß ihre geometrischen Systeme ebenso sicher in sich ruhten wie das Euklidische, daß sie mit anderen Worten ebensoviel Recht darauf hätten, für widerspruchsfrei zu gelten wie das Euklidische. Eine gewisse Steigerung des Gefühls der Sicherheit mochte darin liegen, daß sie alles auf eine Frage an die Erfahrung reduziert zu haben glaubten. Eine gewisse Sicherheit mag auch der Umstand gegeben haben, daß die trigonometrischen Formeln sich so einfach aus denen der sphärischen Geometrie gewinnen ließen. Ganz abgesehen davon, daß diese Überlegungen nur die Ebene erfassen würden, kann man darin nicht einmal für diese einen vollgültigen Beweis für die Widerspruchsfreiheit sehen. Jedenfalls konnten dies Bolyai und Lobatschefskij nicht tun. Denn dann hätten sie ja schon in der sphärischen Geometrie einen Beweis für die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms sehen müssen. Und es ist ja auch bekannt, daß Johann Bolyai noch 1856 einmal glaubte, einen Widerspruch in seinen Deduktionen gefunden zu haben[2].

So war die Situation, als die Untersuchungan von Riemann, Helmholtz und Beltrami um 1867 bekannt wurden. Riemann und Helmholtz stehen

---

[1] Gauss, Werke Bd. VIII, S. 201.

[2] Vgl. Stäckel, l. c. I S. 122/123.

durchaus auf dem empiristischen Standpunkt der Entdecker der nichteuklidischen Geometrie. Sie beschränken sich aber nicht darauf, lediglich die Parallelenfrage der Erfahrung zur Entscheidung zu überlassen, sondern sie fordern das gleiche auch für die übrigen Grundsätze. Sie fassen den Raum als mehrdimensionale Mannigfaltigkeit auf, die verschiedener Maßbestimmungen fähig ist. So werden die möglichen Schemata viel zahlreicher und die der Erfahrung übrigbleibende Entscheidung bekommt mehr Einfluß und mehr Tragweite.

Die weitere Entwicklung hat nun zwei verschiedene Wege eingeschlagen. Der eine verfolgt die Meinung weiter, wonach die Geometrie als Theorie des physikalisch-astronomischen Raumes aufzufassen ist. Dieser mündet in der modernen Relativitätstheorie. Hier steht also die Erfahrung als Wahrheitskriterium im Vordergrund. Der anderen Richtung ist die Gedenkbarkeit die Hauptsache, und diese Gedenkbarkeit gestaltet sich dieser zur modernen Axiomatik führenden Richtung allmählich zum Wahrheitskriterium um. Ich werde nur diese 2. Richtung weiterverfolgen. Auch für sie sind die Gedanken von Riemann und Helmholtz von Bedeutung. So enthalten gleich die ersten Sätze des Riemannschen Vortrages »Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen« eine herbe Kritik. Er sagt, die wesentlichen Grundbestimmungen der Geometrie würden in Form von Axiomen gegeben, und fügt hinzu: »Das Verhältnis dieser Voraussetzungen bleibt im dunkeln; man sieht weder ein, ob und inwieweit ihre Verbindung notwendig, noch a priori, ob sie möglich ist.« Ähnlich äußert sich Helmholtz. Er sagt[1], man könne sich leicht überzeugen, »daß . . . . . die Reihe der gewöhnlich in der elementaren Geometrie hingestellten Axiome ungenügend ist; daß in der Tat stillschweigend noch eine Reihe von einigen weiteren Tatsachen vorausgesetzt wird. Man hat zwar in neueren Lehrbüchern die Axiome des Euklides noch zu ergänzen versucht, es fehlte aber ein Prinzip, mittels dessen man erkennen konnte, ob die Ergänzung vollständig sei. Da wir nämlich nur solche Raumverhältnisse uns anschaulich vorstellen können, welche im wirklichen Raume möglicherweise darstellbar sind, so verführt uns diese Anschaulichkeit leicht dazu, etwas als selbstverständlich vorauszusetzen, was in Wahrheit eine besondere und nicht selbstverständliche Eigentümlichkeit der uns vorliegenden Außenwelt ist.«

Man erkennt die naturwissenschaftliche Grundeinstellung, aber auch die Anregung, die der Euklidischen oder auch der Lobatschefskijschen Geometrie zugrunde liegenden Axiome vollständig aufzuzählen, ein Standpunkt, der von der Überzeugung Bolyais und Lobatschefskijs, eine absolut wahre Geometrie entdeckt zu haben, merklich abweicht.

In der Auffassung, daß die Euklidischen Axiome ergänzungsbedürftig seien, berührt sich übrigens Helmholtz mit Gauss, der verschiedentlich und in konkreter Form solche Desiderata genannt hat. Dahin gehört das, was wir heute die Anordnungsaxiome nennen. So schreibt Gauss am 6. März 1832 an Bolyai[2]: »Bei einer vollständigen Durchführung müssen solche Worte, wie

[1] Bd. 2 der wissenschaftlichen Abhandlungen S. 611.

[2] Gauss, Werke Bd. VIII, S. 222.

'zwischen', auch erst auf klare Begriffe gebracht werden, was sehr gut angeht, was ich aber nirgends geleistet finde.« Eine ähnliche Stellung nimmt Gauss auch gegenüber den Verknüpfungsaxiomen ein. Er schreibt 1829 an Bessel[1]: »Seltsam ist es aber, daß außer der bekannten Lücke in Euklids Geometrie, die man bisher umsonst auszufüllen gesucht hat und nie ausfüllen wird, es noch einen anderen Mangel in derselben gibt, den meines Wissens niemand bisher gerügt hat, und dem abzuhelfen keineswegs leicht, obwohl möglich, ist. Dies ist die Definition des Planum als einer Fläche, in der die, irgend zwei Punkte verbindende, gerade Linie ganz liegt. Diese Definition enthält mehr, als zur Bestimmung der Fläche nötig ist, und involviert tacite ein Theorem, welches erst bewiesen werden muß.«

Helmholtz' Untersuchungen sind in diesem Zusammenhang als ein Versuch einer schärferen Fassung des Begriffs der Bewegung und damit der Kongruenz aufzufassen[2].

Riemann faßt wie Helmholtz den Raum als Spezialfall des allgemeinen Begriffs einer mehrdimensionalen Mannigfaltigkeit auf, der noch in mannigfacher Weise Maßbestimmungen aufgeprägt werden können. Er knüpft damit bewußt und ausgesprochen an die flächentheoretischen Untersuchungen von Gauss an und ist von den philosophischen Auffassungen Herbarts beeinflußt. Riemann sowohl wie Helmholtz geben Beispiele anderer Mannigfaltigkeiten und Maßbestimmung, wie die Mannigfaltigkeit der Farben oder die der Töne, oder es wird auf den Raum der Distanzschätzung nach Augenmaß im Gegensatz zum Raum der physikalisch-astronomischen Messung oder auch im Gegensatz zum Raum der naiven Vorstellung hingewiesen.

So wird ein neuer Zugang zu der Lobatschefskijschen Geometrie gewonnen, die aber jetzt als eine unter vielen anderen Geometrien zu begreifen ist. Schon der damit vorgenommene Schritt einer begrifflichen Erfassung auch mehr als dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten, der Gedanke, den Raum hier als Spezialfall einzuordnen, bedeutet wieder eine weitere Abkehr von der Kantschen Auffassung des Raumes als einer a priori gegebenen Form der Anschauung. Das gilt wenigstens für die Fassung, die Kant seiner Theorie in der Kritik der reinen Vernunft gegeben hat. In den Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte (1747) zieht er sehr wohl die Denkbarkeit verschiedener Raumformen in Betracht und nennt »eine Wissenschaft von allen diesen . . . . . Raumesarten . . . . . die höchste Geometrie, die ein endlicher Verstand unternehmen könnte«.

Daß die stärkere Betonung der Bewegung als geometrischer Grundbegriff einen stärkeren Einfluß des empirischen Momentes in der Geometrie bedeutet, hatte auch bereits Schopenhauer hervorgehoben. (Die Welt als Wille und Vorstellung Bd. 2, Kap. 13.) Und dies bedeutet eine Erschütterung der Meinung von der absoluten Sicherheit mathematischer Urteile. Davon, die Sicherheit

---

[1] Gauss, Werke Bd. VIII, S. 200.

[2] Seine Ansätze hat Lie später durchgeführt. Sie sind der Ausgangspunkt für eine axiomatische Festlegung der Bewegungsgruppe und für einen Teil der tiefgründigen, auf das Raumproblem bezüglichen Forschungen Weyls. Es ist nicht meine Absicht, diese Untersuchungen aus den Grundlagen der Geometrie zu verfolgen.

im Prinzip des Widerspruchs allein zu sehen, ist man weiter als je entfernt. In ihm sieht man mit Kant nicht mehr als ein notwendiges Kriterium der Wahrheit[1]. Man entfernt sich von Kant nur insofern, als man die Erfahrung die Stelle der reinen Anschauung in weitem Maße einnehmen läßt. Bezeichnend scheint mir dafür zu sein, daß z. B. Ueberweg 1851 ohne Kenntnis von Bolyai und Lobatschefskij eine Umdeutung der Kantschen Anschauung in Erfahrung vornimmt. Er sagt: »Daß zwischen 2 Punkten nur eine gerade Linie möglich sei, daß jede 2 Linien in einer Ebene, deren eine auf einer dritten senkrecht steht, die andere schief, einander notwendig schneiden müssen u. v. a., darauf führt die Erfahrung hin, aber lehrt es nicht; und es für unmittelbar gewiß zu erklären, wäre eine Selbsttäuschung, welche der Urheber der Aprioritätstheorie selbst sich nicht zuschulden kommen ließ.« »Der Grund der Gewißheit ist bei den geometrischen Axiomen derselbe wie bei den physikalischen Hypothesen, nämlich die fortlaufende approximative Bestätigung durch die Erfahrung[2].«

Besondere Hervorhebung verdient die bei Helmholtz besonders stark betonte Unterscheidung zwischen objektiver und subjektiver Gültigkeit, entsprechend der Unterscheidung zwischen Wahrheit und Gedenkbarkeit. Er nimmt[3] für die nichteuklidische Geometrie keine objektive Gültigkeit in Anspruch. Prinzipiell bedeutet auch diese Auffassung die Abkehr von der Meinung, die in der Geometrie die Wissenschaft vom Raum sieht. Gerade der Widerstreit zwischen reiner Anschauung und Erfahrung, der Helmholtzsche Hinweis auf den physiologischen Raum, die Heranziehung des physikalisch-astronomischen Raumes bei Lobatschefskij, die Inkonsequenz, die sich bei ihm und bei Bolyai in der erkenntnistheoretischen Bewertung der Axiome zeigt, all dies läßt die Frage entstehen, welches denn nun der Raum sei, dessen Wissenschaft die Euklidische Geometrie sein soll[4]. Da muß es als willkommener Ausweg empfunden werden, die Geometrie zur Lehre von den Mannigfaltigkeiten mit eingeprägter Maßbestimmung zu vervielfältigen. Im ganzen bedeutet dies aber wieder eine Anbahnung der Emanzipation der Geometrie von Anschauung und Erfahrung. Der mathematische Grübelgeist tut nämlich sein übriges, um die Beschränkung auf solche Mannigfaltigkeiten zu verwerfen, die sich etwa unmittelbar in Anschauung oder Erfahrung deuten lassen.

Zum vollen Verständnis der neuen Richtung der Geometrie gelangen wir erst, wenn wir uns analoge Bestrebungen in anderen geometrischen und nichtgeometrischen Gebieten der Mathematik vergegenwärtigen. Ich denke dabei an den Ausbau der neueren Geometrie, an Begriffsbildungen wie uneigentliche Gerade, an Staudts Imaginärtheorie, Kummers Theorie der idealen Zahlen, Gauss' Theorie der komplexen Zahlen, in der ich eigentlich den ersten Schritt

[1] Vgl. z. B. Kritik der reinen Vernunft I. Aufl., S. 151.

[2] Die Prinzipien der Geometrie wissenschaftlich dargestellt im Archiv f. Philologie u. Pädagogik Bd. 47 (1851).

[3] l. c. S. 240.

[4] Neuerdings hat O. Becker im Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung, Bd. 6 (1923), wieder einen Versuch gemacht, auf anderem Wege als durch Aufzählung der Axiome der Euklidischen Geometrie den Raum unserer Anschauung zu erfassen, auf den sich diese Geometrie beziehen soll. Die mathematischen Ausführungen, auf die er sich dabei stützt, sind mir freilich unverständlich.

in die neuen Begriffsbildungen sehe und an dem zum mindesten die deutschen Mathematiker orientiert erscheinen, deren Namen maßgebend mit den obengenannten Disziplinen verknüpft sind. Als erstes Beispiel betrachte ich die Entwicklung der projektiven Geometrie. Hier denke ich vor allem an die straffe Form, die in den Händen Staudts die Einführung uneigentlicher und imaginärer Elemente bekommen hat. Uneigentliche Elemente finden sich schon bei Desargues 1639; ihre Einführung wird bei Poncelet (1822) zusammen mit der Verwendung imaginärer Elemente eine der Grundauffassungen der Theorie. Hier aber erinnert die Darstellung stark an Gepflogenheiten der heutigen Physik, die auch nicht immer von vornherein die neuen Hypothesen in ihrer Stellung zu den älteren voll klärt, ehe sie neben diesen von jenen Gebrauch macht. So drängt Poncelets große Anregung auf begriffliche Schärfung hin. Bei Staudt finden wir sie 1847 in der Geometrie der Lage für die uneigentlichen Elemente skizziert und 1856 im ersten Heft der Beiträge zur Geometrie der Lage für die imaginären Elemente geleistet. Von Staudt erkennt, daß die Einführung dieser neuen Elemente nur gerechtfertigt ist, wenn man sich darüber im klaren ist, inwieweit sie gemäß ihrer Definition in ihrer Verknüpfung untereinander und mit den eigentlichen Elementen den für diese schon geltenden Gesetzen und Regeln genügen. Er beschäftigt sich eingehend mit der Erklärung dieser Verknüpfungen und dem Nachweis des Bestehens der üblichen Sätze für die neuen Erklärungen.

Es scheint mir eine dankbare Aufgabe für die Geschichte der Mathematik zu sein, im einzelnen zu verfolgen, in welchen Etappen und unter welchen Einflüssen die Entwicklung von Poncelet zu Staudt vor sich ging[1]. Man kann dabei in erster Linie an den Einfluß von Gauss denken, zumal ja Staudt ein Schüler von Gauss ist; denn die Verwandtschaft der Staudtschen Begriffsbildung mit der Auffassung von Gauss in der Theorie der komplexen Zahlen ist offensichtlich. Begriffsbildungen wie die eben erwähnten lassen es unmöglich erscheinen, das Wahrheitskriterium von dem Kriterium der Denkbarkeit zu trennen. Hier scheint nun freilich ein prinzipieller Unterschied gegen Gauss zu liegen, denn dieser betont ausdrücklich die Anschaulichkeit seiner Theorie und schließt 1831 einen Überblick über dieselbe mit den Worten: »Hier ist also die Nachweisbarkeit einer anschaulichen Bedeutung von $\sqrt{-1}$ vollkommen gerechtfertigt, und mehr bedarf es nicht, um diese Größe in das Gebiet der Gegenstände der Arithmetik zuzulassen[2].« Später freilich (1849)[3] betont er ausdrücklich, daß es sich nur um eine Veranschaulichung handele zwecks leichterer Ausdrucksweise, daß aber »der eigentliche Inhalt der ganzen Argumentation einem höheren, vom Räumlichen unabhängigen Gebiete der allgemeinen abstrakten Größenlehre angehöre«, ein Gebiet, »in welchem man sich auch nicht bewegen kann ohne eine von räumlichen Bildern entlehnte Sprache«.

Die Geometrie selbst bietet weitere solche Beispiele in den Übertragungsprinzipien wie der Dualität, die mehr und mehr Verwendung finden, und

[1] E. Kötter hat Jahresber. 5 Material dazu zusammengetragen. — Literatur zu Staudt: a) M. Noether, Jahresber. 32, b) Juel, Kongr. Helsingfors 1922.

[2] Gauss, Werke II, S. 177.

[3] Gauss, Werke III, S. 79.

dem allgemeinen Verwandtschaftsbegriff, den Möbius herausarbeitet. Der 1854[1] bei Cayley zuerst auftretende allgemeine Gruppenbegriff ist ein weiteres Beispiel einer Einführung von Gegenständen in die Mathematik, die in ihrer abstrakten Allgemeinheit ein außermathematisches Wahrheitskriterium nicht mehr gestatten.

Der Übergang zur konsequenten Vertretung dieses Prinzips erfüllt die nächsten 50 Jahre und soll uns nun an Hand der weiteren Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie etwas näher beschäftigen.

Ich habe mich bei der Schilderung der geistigen Atmosphäre, in der diese Entwicklung beginnt, auf Hervorhebung einiger weniger Beispiele beschränkt und so z. B. von der Grassmannschen Ausdehnungslehre, von Hamiltons Theorie der komplexen Zahlen nicht gesprochen, weil diese Dinge auf die allgemeine Entwicklung bis zum Ende der sechziger Jahre noch wenig Einfluß hatten. Im Jahre 1867 erscheint freilich Hankels Theorie der komplexen Zahlen, der dank Möbius' Einsicht von Grassmann stark beeinflußt erscheint, der sich aber (vgl. S. 73) der Bedeutung Hamiltons noch nicht voll erschließt. Er verpflanzt den in England verbreiteten abstrakten Kalkül der Operationen auf deutschen Boden und trägt so zur Schaffung des allgemeinen gedanklichen Hintergrundes der weiter von uns zu betrachtenden Entwicklung an seinem Teile erheblich bei. Bezeichnenderweise ist in seiner eigenen projektiven Geometrie von 1875 nichts von Auffassungen zu merken, die er für die Arithmetik (S. 10) so formuliert: »Die Bedingung zur Aufstellung einer allgemeinen Arithmetik ist daher eine von aller Anschauung losgelöste, rein intellektuelle Mathematik, eine reine Formenlehre, in welcher nicht Quanta oder ihre Bilder, die Zahlen, verknüpft werden, sondern intellektuelle Objekte, Gedankendinge, denen aktuelle Objekte oder Relationen solcher entsprechen können, aber nicht müssen.« Der Weg, den die Geometrie nun weiter bis zur Vollendung der Axiomatik zurücklegt, ist im Grunde nur die Übertragung dieses arithmetischen Programms auf die Geometrie. Mit der Axiomatik wird auch in dieser der Kalkül das beherrschende Element.

Ich beginne die Schilderung der weiteren Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie mit einer kurzen Betrachtung der Beltramischen Arbeit[2]. Hier geht Beltrami von dem Bestreben aus, für die Lobatschefskijsche Geometrie eine Veranschaulichung in der Euklidischen zu finden. Der Gausssche Gedanke, daß anschauliche oder gegenständliche Bedeutung mathematisches Bürgerrecht verleiht, hat hier Beltrami auf die Entdeckung eines Umstandes geführt, der vielleicht auch Gauss schon bekannt war, nämlich, daß die Maßbestimmung, welche im Euklidischen Raum auf Flächen konstanter negativer Krümmung induziert wird, mit der Lobatschefskijschen Maßbestimmung der Ebene identisch ist. Hier kommt zum erstenmal der folgenschwere Gedanke der Isomorphie verschiedener geometrischer Gebiete zur Geltung, freilich in einem Falle, wo er, wie wir heute wissen, sich nicht restlos durchführen läßt, weil es keine Fläche im dreidimensionalen Euklidischen Raume gibt, auf der sich die Geometrie der vollständigen Lobatschefskijschen Ebene realisieren ließe.

[1] Collected mathematical papers II, S. 123.
[2] Giornale di matematiche Bd. 6 (1868).

Der Gedanke einer Isomorphie verschiedener Gebiete besteht aber wie in der Gruppentheorie darin, die Gegenstände und die Operationen der beiden Gebiete einander so zuzuordnen, daß auch jeder Satz des einen Gebietes einem Satz des anderen Gebietes entspricht. Voll ausgebildet ist freilich dieser Gedanke bei Beltrami nicht, denn sonst wäre es unerklärlich, daß er nicht den Übergang von der sphärischen zur elliptischen Geometrie gefunden hätte, die vielleicht Gauss schon bekannt war. Dieser verlangt ja, wie Klein 1871 entdeckt hat, nur den Übergang von den Kugelpunkten zu den Kugeldurchmessern. Als 1859 Cayley die projektive Maßbestimmung begründete, war ihm der Isomorphiegedanke in der Geometrie gleichfalls fremd. Voll ausgebildet erscheint dieser erst bei Klein von 1871 an. Dieser ist freilich in seiner innersten Auffassung am Gegenständlich-Anschaulichen orientiert, und dies bedingt, daß in seinen Arbeiten die Bedeutung für die Entwicklungsrichtung, die ich hier zu schildern habe, nicht so deutlich herausgestellt ist, als sie es tatsächlich ist. Bei Beginn seiner Arbeiten zur nichteuklidischen Geometrie hatte Klein den Gedanken der Isomorphie kaum in weiterem Umfang erfaßt als Beltrami. Es handelt sich ihm nämlich nicht nur wie diesem darum, Bilder der nichteuklidischen Geometrie zu geben, sondern er will das innere Wesen dieser Geometrien selbst aufdecken. Gerade diese Unterscheidung lehrt, daß Klein den Standpunkt der Isomorphie hier nicht konsequent vertritt. Denn von diesem Standpunkt aus ist diese Unterscheidung gegenstandslos. In seinen gesammelten Abhandlungen schickt Klein seinen Arbeiten über nichteuklidische Geometrie eine Einleitung voraus, in der er auch jetzt wieder diese Unterscheidung stark betont. Auf den ersten Blick könnte man freilich Kleins Anspruch auf Ergründung des wahren Wesens der nichteuklidischen Geometrie als eine Auswirkung des Isomorphiegedankens ansehen. Aber dem ist nicht so, denn die Ergründung des wahren Wesens bedeutet eben, daß die nichteuklidische Geometrie wie die Euklidische als Spezialfälle der Lehre von der projektiven Maßbestimmung untergeordnet werden können, wenn man das absolute Gebilde noch über die abstrakte Festlegung der Gruppe hinaus in besonderer Weise wählt.

Der in der Gruppentheorie lebendige Gedanke der Isomorphie wird von Klein in seinem Erlanger Programm für diejenigen Geometrien durchgeführt, welche durch Transformationsgruppen charakterisiert werden können[1]. Das Erlanger Programm zeigt ja, daß aus der Isomorphie der Gruppen für viele Geometrien die Isomorphie der Geometrien selbst folgt. Es sind die Geometrien, die sich als Invariantentheorien jener Gruppen auffassen lassen. So sehr auch Klein den Standpunkt der Isomorphie betont, was das innere logische Gefüge der Geometrien anlangt, so ist er doch zu stark am Anschaulichen orientiert, um in dem logischen Aufbau das einzige sehen zu können, was eine geometrische Disziplin kennzeichnet. Dies entspricht ja auch durchaus dem allgemeinen Gang der historischen Entwicklung, die uns schon hat erkennen lassen und noch weiter erkennen lassen wird, wie die abstrakt logische Auf-

[1] In die Gruppentheorie wird der Begriff »Isomorphie« von C. Jordan in seinem »traité des substitutions 1870« eingeführt. Klein verwendet selbst das Wort »isomorph« nicht.

fassung auf dem Weg über das Erfahrungsmäßige aus dem Gegenständlich-Anschaulichen sich entwickelt.

Klein hat ein Hauptergebnis seiner Arbeiten nie selbst hervorgehoben; das ist der in denselben enthaltene Nachweis, daß die nichteuklidischen Geometrien widerspruchsfrei sind unter der Voraussetzung, daß die Euklidische Geometrie widerspruchsfrei ist. Dies ist um so merkwürdiger, als Klein gerade durch Betonung dieses Umstandes seine Gegner hätte bekämpfen können, die es ihm zum Vorwurf machten, er habe bei seinem Aufbau der nichteuklidischen Geometrie die Euklidische Geometrie benutzt. Klein hat dieser Auffassung stets widersprochen, und er hat, wie wir heute wissen, gegenüber seinen Gegnern recht behalten. Aber tatsächlich hat erst die moderne Entwicklung der Axiomatik eine restlose Klärung gebracht. Denn erst diese hat die Axiome mit der erforderlichen Deutlichkeit und Vollständigkeit herauszuarbeiten vermocht und es erst ermöglicht, durch Angaben ihrer Axiome die einzelnen geometrischen Gebiete präzise zu definieren. Ich sehe den großen Erfolg der Kleinschen Theorie gegenüber dieser Situation darin, daß sie den Nachweis der Widerspruchsfreiheit der nichteuklidischen Geometrie auf den der Euklidischen zurückzuführen vermochte, ohne eine ins Einzelne gehende Aufzählung der Axiome zu benutzen. Dies ist der gruppentheoretischen Definition der Geometrien zu verdanken. Kleins Leistung in dieser Richtung gewinnt noch an Gewicht, wenn man bedenkt, daß er schon (1871) vermutete, daß Beltramis Ansatz, ein Modell der nichteuklidischen Geometrie in der Euklidischen zu finden, sich nicht werde durchführen lassen, eine Vermutung, für die Hilbert den Weg zum Beweis gefunden hat. (Vgl. Klein: Ges. Abh. I, 249.)

Das Gegenständlich-Anschauliche steht bei Klein ebenso stark im Vordergrunde wie bei Gauss. Auch im Hinblick auf das abstrakt Logische liegen die Dinge bei Klein ähnlich wie bei Gauss. Klein ist der erste, der es unternommen hat, prinzipiell geometrische Theorien hinsichtlich ihres logischen Gefüges zu vergleichen, der es unternommen hat, diesen Gedanken, der bei Lobatschefskij anklingen mag, der in den verschiedensten Übertragungsprinzipien schlummert, als lebendigen geometrischen Gedanken klar herauszustellen. Formuliert man die Sache so, so wird auch die Verwandtschaft dieser Gedankenbildung zu Gauss' Theorie der komplexen Zahlen, zu Staudts Imaginärtheorie, zu Kummers Theorie der idealen Zahlen handgreiflich. Im anschaulichen Gewand treten diese Gedanken auf, bis nach Abstreifung dieses Gewandes am Ende des Jahrhunderts die gemeinsamen Grundideen in der Axiomatik in voller Reinheit vor uns stehen.

Die Fruchtbarkeit der Kleinschen projektiven Auffassung der nichteuklidischen Geometrie bewährt sich auch darin, daß sie ihn instand setzte, eine Andeutung Riemanns über den Unterschied zwischen Unendlichkeit und Unbegrenztheit zur Geltung zu bringen. Er wurde so zum Entdecker der von ihm so genannten elliptischen Geometrie, in der alle Geraden endliche Länge besitzen.

Der Isomorphiegedanke ist letzten Endes auch die Wurzel der Arbeiten, in denen Clifford und Klein die Beziehungen topologischer und metrischer Eigenschaften erforschen. Denn gerade die projektive Auffassung der elliptischen Geometrie hat Clifford auf die Entdeckung der Cliffordschen Flächen

mit Euklidischer Maßbestimmung geführt, und dies war für Klein der Anlaß zu der allgemeinen Problemstellung.

Durch sein Bestreben, systematisch die nichteuklidische Geometrie in die projektive einzubauen, wurde Klein genötigt, den Aufbau der projektiven Geometrie selbst noch über Staudt hinaus weiterzuführen. Es handelt sich dabei insbesondere um eine vom Parallelenaxiom unabhängige Einführung der uneigentlichen Elemente. Hatte doch Staudt zum Parallelenproblem keine Stellung genommen, sondern die Einführung der uneigentlichen Elemente auf das Euklidische Axiom gestützt. Es handelt sich weiter um eine vom Parallelenaxiom unabhängige Einführung der Koordinaten, also eine Frage aus dem Gebiete der Axiomatik der projektiven Geometrie.

Diese Ansätze Kleins hat Pasch in seinen Vorlesungen über neuere Geometrie von 1882 völlig durchgeführt. Insbesondere erscheint bei ihm zuerst die Einführung der uneigentlichen Elemente unabhängig von Parallelenaxiom in völlig befriedigender Gestalt. Hören wir ihn selbst (S. 40): »Wir könnten auf dem Standpunkt, den wir jetzt einnehmen, das Wort ‚Punkt' gänzlich entbehren und statt dessen bloß von Strahlenbündeln (beliebigen und eigentlichen) sprechen. Wir könnten dann eine Reihe von Beziehungen, zu denen wir allmählich gelangt sind, in eine viel geringere Anzahl von Sätzen zusammenfassen. Aber wenn die Darstellung bei einer solchen Änderung an Kürze gewinnt, so würde sie zugleich an Anschaulichkeit verlieren, da das Wort ‚Strahlenbündel' weit kompliziertere Vorstellungen veranlaßt, als zur Auffassung der geometrischen Entwicklungen nötig und förderlich ist.

Dieser Nachteil wird vermieden, wenn man, statt den Gebrauch des Wortes ‚Punkt' aufzugeben, ihn vielmehr in derselben Weise ausdehnt, wie es an dem Worte ‚Strahlenbündel' gezeigt worden ist. Wir treffen in der Tat die Bestimmung, daß das Wort ‚Punkt' nicht mehr in der bisherigen Bedeutung angewendet werden soll, daß vielmehr mit der Aussage ‚Das Strahlenbündel S gehört zur Geraden g' fortan gleichbedeutend sein soll die Aussage ‚Der Punkt S liegt in der Geraden g', und daß, wo das Strahlenbündel S als ein eigentliches bezeichnet wird, auch der Punkt S ein eigentlicher Punkt genannt werden soll. Der Ausdruck ‚eigentlicher Punkt' wird also von nun an genau dasjenige bedeuten, was bisher unter Punkt schlechthin verstanden wurde; dadurch eben wird das mit keiner näheren Bestimmung versehene Wort ‚Punkt' zu allgemeiner Anwendung verfügbar.«

Wir lernen hier ein neues Beispiel zu der Art der Begriffsbildung kennen, die uns schon mehrfach begegnete. Man hat sie passend mit der Art verglichen, wie man in der Logik den Eigenschaftsbegriff durch Betrachtung der Klasse von Gegenständen einführt, die diese Eigenschaft besitzen sollen. Es ist also hier die naive Vorstellung der Begriffsbildung durch Abstraktion zu exakter Durchbildung gelangt. Es ist das eine Erscheinung, die die Mathematik der vorausgehenden Jahrhunderte nicht aufweist[1]. Und es erscheint

[1] Der Gedanke, Klassen mathematischer Objekte selbst zum Gegenstand der Betrachtung zu machen, ist charakteristisch für die Mathematik des neunzehnten Jahrhunderts. Die Gruppenvorstellung und der Begriff einer Klasse von quadratischen Formen, die man bei Lagrange und bei Gauss findet, bedeuten wohl den Ausgang dieser Entwicklung.

so gesehen nun auch nicht verwunderlich, daß diese Art der Begriffsbildung zunächst immer noch verquickt mit anschaulich-gegenständlichen Vorstellungen auftritt. Auch Pasch gehört dieser Richtung an. Er ist ausgesprochener Empirist, und doch ist er durch sein Werk der wichtigste Vorläufer der Hilbertschen Axiomatik geworden. Dies mag auf den ersten Blick paradox aussehen. Nähere Betrachtung macht es aber verständlich. Denn die Prüfung der Euklidischen Geometrie an der Erfahrung macht es, wie wir oben schon andeuteten, erforderlich, daß man sich über die Grundsätze, aus denen sich alle Sätze mit logischen Mitteln ergeben, vollkommen klar sei und daß man sie auf eine kleine Anzahl reduziere. Dabei stellt man sich auf den Standpunkt, daß die logischen Folgerungen aus erfahrungsmäßig bewährten Prämissen sich gleichfalls in der Erfahrung bestätigen, ein Standpunkt, der ebenso berechtigt oder unberechtigt ist wie auch sonst in der Naturwissenschaft. So verdankt man Pasch ein detailliertes Axiomensystem. Die Grundbegriffe werden nicht definiert. »Keine Erklärung ist imstande, dasjenige Mittel zu ersetzen, welches allein das Verständnis jener einfachen, auf andere nicht zurückführbaren Begriffe erschließt, nämlich den Hinweis auf geeignete Naturobjekte.« »Die Grundsätze sollen das von der Mathematik zu verarbeitende empirische Material vollständig umfassen, so daß man nach ihrer Aufstellung auf die Sinneswahrnehmungen nicht mehr zurückzugehen braucht[1].« Pasch führt so den empiristischen Standpunkt weiter durch, auf dem wir Lobatschefskij und Helmholtz sahen, nur daß seine Axiome dem Anschaulich-Gegebenen näherstehen als die von Helmholtz. Sie vermeiden es z. B., den Raum von vornherein als Zahlenmannigfaltigkeit anzunehmen. Das ergibt sich erst als späte Folgerung aus den Axiomen.

Wichtiger als eine nähere Darlegung oder Erörterung des Paschschen Empirismus ist es für uns zu sehen, daß Pasch eine große Zahl von Axiomen zusammenträgt, an denen seine Vorgänger achtlos vorübergingen. So z. B. das heute nach Pasch benannte Axiom der Anordnung der Ebene, das man freilich aus Artikel 23 der geometrischen Untersuchungen von Lobatschefskij zur Theorie der Parallellinien aus dem Jahre 1840 ohne Mühe entnehmen kann, wenn man sich erst einmal auf die Suche nach Axiomen macht.

Die Auffindung neuer Axiome wurde wesentlich erleichtert durch die Einstellung, die das mathematische Denken durch Dedekind genommen hat, der 1872 das Wesen der Stetigkeit in einem neuen bis dahin noch nicht formulierten Axiom fand. Dies ist eine etwas andere Entdeckung als die Lobatschefskijs, denn bei diesem handelt es sich darum, die Überzeugung zu gewinnen, daß ein Euklidisches Axiom wirklich ein solches sei, in dem neuen Sinne, daß es von gewissen anderen Axiomen unabhängig ist. Ja es handelt sich letzten Endes bei ihm auch um den Begriff »Axiom« selbst[2]. Bei Dedekind handelt es sich um die Analyse eines Satzgebietes, die zur Formulierung eines Axioms führt. Darin aber ähnelt die Dedekindsche Entdeckung der Lobatschefskijschen, daß schließlich für den Charakter des Satzes

---

[1] Neuere Geometrie S. 16/17.

[2] Man könnte die ganze Darstellung bis in die neuste Zeit an der Entwicklung des Axiombegriffes orientieren.

als Axiom nur die plausible Überzeugung des Entdeckers sprach, daß ein Beweis dafür, daß es sich um ein Axiom handele, nicht gegeben wurde. Ähnlich wie bei Dedekind ist es bei Pasch. Auch bei ihm handelt es sich um die Analyse eines Satzgebietes. Er trägt die Axiome zusammen, deren er für den Aufbau benötigt, ohne sich um die Frage der Unabhängigkeit, Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit der Axiome mit logischen Mitteln zu bemühen. Das sind Fragen, über die der wissenschaftliche Takt entscheidet, und die so der Gaussschen Forderung, nichts Beweisbares unbewiesen zu lassen, noch nicht unterworfen werden.

Die Frage nach der Unabhängigkeit der Axiome tritt nicht auf, denn die Axiome werden ja aus der Erfahrung abstrahiert und werden sich so kraft ihrer Herkunft schon vertragen. Widerspruchsfrei mögen sie sein, denn sie finden sich ja in der Erfahrung vor. Vollständig mögen sie sein, denn sie sollen das empirische Material vollständig umfassen. Neues empirisches Material mag ruhig neue Axiome bringen. Dieser Standpunkt ist unbefriedigend als Ausdruck eines konsequenten Empirismus, er ist unbefriedigend als Grundlage einer mathematischen Theorie, die in sich tragfähig sein muß, um der Wirklichkeit mit Autorität gegenübertreten zu können, unbefriedigend auch deshalb, weil die Grundlage der Theorie damit dauernd im Fluß bleibt. Pasch hebt die nichteuklidische Geometrie in seinem Werk auf den gleichen Stand der Sicherheit, den auch Arithmetik und Analysis in den Händen von Dedekind, Cantor und Weierstrass bekommen hatten. Die logischen Probleme der Axiomatik bleiben auch hier unerörtert. Ihr Auftreten bei Hilbert bedeutet ein weiteres Fortschreiten in der von Gauss vorbildlich geforderten Richtung, nichts Beweisbares ohne Beweis hinzunehmen. Aber auch diese Bestrebungen sind organisch aus dem Werk der drei genannten Mathematiker herausgewachsen.

Denn auch für diese ist die Widerspruchsfreiheit das einzige Wahrheitskriterium. Das indirekte Beweisverfahren findet z. B. steigend stärkere Betonung und Verwendung. In welcher Weise die prinzipiellen Auffassungen dieser Mathematiker auf die Geometrie abfärben mußten, wird besonders deutlich durch eine Stelle aus Dedekinds Schrift von 1887: »Was sind und was sollen die Zahlen?« Er schreibt dort[1]: »Ich habe verschiedene Gründe angeführt, weshalb ich die Einmischung der meßbaren Größen gänzlich verwerfe und namentlich ..... hinsichtlich deren Existenz bemerke, daß für einen großen Teil der Wissenschaft vom Raume die Stetigkeit seiner Gebilde gar nicht einmal eine notwendige Voraussetzung ist, ganz abgesehen davon, daß sie in den Werken über Geometrie zwar wohl dem Namen nach beiläufig erwähnt, aber niemals deutlich erklärt, also auch nicht für Beweise zugänglich gemacht wird. Um dies noch näher zu erläutern, bemerke ich beispielsweise folgendes: Wählt man 3 nicht in einer Geraden liegende Punkte A, B, C nach Belieben, nur mit der Beschränkung, daß die Verhältnisse ihrer Entfernungen AB, AC, BC algebraische Zahlen sind, und sieht man im Raume nur diejenigen Punkte M als vorhanden an, für welche die Verhält-

[1] Auf S. XII des Vorwortes.

nisse von AM, BM, CM zu AB ebenfalls algebraische Zahlen sind, so ist der aus diesen Punkten M bestehende Raum, wie leicht zu sehen, überall unstetig; aber trotz der Unstetigkeit, Lückenhaftigkeit dieses Raumes sind in ihm, soviel ich sehe, alle Konstruktionen, welche in Euklids Elementen auftreten, genau ebenso ausführbar wie in dem vollkommen stetigen Raume; die Unstetigkeit dieses Raumes würde daher in Euklids Wissenschaft gar nicht bemerkt, gar nicht empfunden werden.« Diese Sätze bergen das Schema für den Nachweis der Unabhängigkeit des Stetigkeitsaxioms von den übrigen Axiomen der Geometrie. Was Dedekind andeutet, ist die Methode, die Hilbert in seinen Grundlagen der Geometrie 1899 konsequent auf alle Axiome anwendet. So liegt die Hilbertsche Axiomatik in der durch die drei genannten Mathematiker vorgebildeten Richtung. Eine Definition der Grundbegriffe wird nicht gegeben. Es sind reine Gedankendinge, die in gewissen Relationen stehen, deren Gesetze durch die Axiome der Geometrie zum Ausdruck kommen. Zugleich ist dies die denkbar konsequenteste Durchführung des Gedankens der Isomorphie, denn nun enthalten die Axiome nur noch das, was allen isomorphen Geometrien gemeinsam ist. Von allen Besonderheiten ist nun abstrahiert. Damit werden Unabhängigkeit, Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit zu mathematischen Problemen. Die Unabhängigkeit wird nach der eben skizzierten Dedekindschen Methode bewiesen. Die Widerspruchsfreiheit wird gezeigt durch Zurückführung auf die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik. Die Vollständigkeit wird erkannt durch Aufstellung eines Beispiels einer Geometrie, in der alle Axiome erfüllt sind, und die man nicht erweitern kann, ohne ein Axiom zu verletzen. So wird das Axiomensystem direkt die Definition des durch dasselbe bestimmten mathematischen Gebietes. Dieses besteht aus der Gesamtheit der Sätze, die man aus dem gegebenen Axiomensystem logisch erschließen kann. Auch die Frage nach der Stellung des Parallelenaxioms findet so ihre endgültige präzise Lösung, durch Rückkehr zu der alten Auffassung, die in dieser Frage stets ein logisch-mathematisches Problem sehen wollte. So scheint mit der Jahrhundertwende die mathematische Richtung am Ziel, welche die Widerspruchsfreiheit zum einzigen Wahrheitskriterium machen will. Das Ziel, das Gauss durch sein Beispiel an die Spitze des Jahrhunderts stellte, scheint erreicht; nichts Beweisbares scheint mehr ohne Beweis hingenommen.

Aber wie steht es mit der Widerspruchsfreiheit der Arithmetik? Der Kroneckersche Intuitionismus möchte das Rechnen mit den ganzen Zahlen als unmittelbar gegeben hinnehmen. Die Dedekind-Cantor-Weierstrasssche Mathematik lehrt dann, wie sich auf dieser Grundlage widerspruchsfrei die ganze Arithmetik aufbauen läßt. Für diese Auffassung ist also doch letzten Endes die Widerspruchsfreiheit der Geometrie in der anschaulich gegebenen Reihe der natürlichen ganzen Zahlen begründet. Hilberts neuste axiomatische Bestrebungen suchen hier das Fundament noch etwas tiefer zu legen und die Rolle der Anschauung noch weiter zurückzudrängen. Sie möchten nur die naive Anschauung endlicher Gesamtheiten übriglassen.

Aber Hilberts noch nicht voll durchgeführtes Programm begegnet prinzipiellem Widerspruch von seiten des Brouwerschen Intuitionismus. Dieser

hält es mit Kant und sieht somit in der Widerspruchsfreiheit ein zwar notwendiges, aber lange nicht hinreichendes Kriterium der Wahrheit. Diese Richtung verweigert jedem Begriff das mathematische Bürgerrecht, der nicht durch konstruktive Methoden explizite vorgewiesen werden kann. Der bloße Umstand, daß die Einführung eines Begriffes zu keinen Widersprüchen führt, verleiht nach dieser Auffassung demselben noch kein mathematisches Bürgerrecht, ebensowenig wie man, um mit Brouwer zu reden, einen Verbrecher schon dann für ehrlich halten wird, wenn man ihm mit juristischen Methoden sein Verbrechen nicht nachweisen kann.

Zur Jahrhundertwende schienen Wahrheit und Gedenkbarkeit in eins zu verschmelzen, als Ende einer langen Entwicklung. Anfang derselben war ein unentwirrtes Gemisch von Anschauung, Erfahrung und Gedenkbarkeit als Wahrheitskriterium. Das Bestreben, die Erfahrung allein zum Kriterium zu machen, scheitert an seiner Unzulänglichkeit gegenüber der Bedeutung des Denkens in der Mathematik. Das Denken gewann die Oberhand und drängte allmählich Anschauung und Erfahrung aus der Geometrie heraus. Dies erforderte aber eine stärkere Betonung der Logik, insbesondere eine ausgiebige Verwendung des Tertium non datur auch für unendliche Mengen. Hier setzte zuerst der Angriff der Intuitionisten ein, um dann rasch in seinen Ansprüchen sich zu steigern. So hat die alte Frage des Pilatus »Was ist Wahrheit?«, die uns fast ein Jahrhundert begleitete, auch heute noch keine endgültige Antwort gefunden. Aber darin sind sich wohl alle genannten Richtungen untereinander und mit Kant einig, daß außer der Logik noch etwas anderes an der Grundlegung der Mathematik beteiligt sei. Aber darüber, was dieses andere ist, sind die Meinungen geteilt.

Ausgegeben am 2. Juli.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1925 XIX—XXIV

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

MIT TAFEL II

NOV 1925

BERLIN 1925

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang einer aufzunehmenden Mitteilung soll in der Regel in den Sitzungsberichten bei Mitgliedern 32, bei Nichtmitgliedern 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte, in den Abhandlungen 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Abhandlungen nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 200 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1925

XIX. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 11. Juni.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

1. Hr. Fick las Über Muskelfaserlänge beim Armmuskel und Muskelschrumpfungen. (Ersch. später.)

Er besprach die Muskelfaserlänge beim Armmuskel (m. Brachialis) und seiner Abart (Speichenansatz), sowie bei zwei Krüppelbeinen mit Muskelschrumpfung. Ferner sprach er über die Muskelschrumpfungen nach Lähmungen. Er stellte für die dabei in Betracht gezogenen Muskelgruppen den Begriff auf: »Ziel- oder Geistgruppe« für die Armverlängerer + Beinverkürzer und »Ausführungs- oder Kraftgruppe« für die Armverkürzer + Beinverlängerer. Die »Zielgruppe« sei mehr von der Hirnrinde abhängig als die »Ausführungsgruppe«.

2. Hr. Nernst legte eine Arbeit von W. Noddack und Ida Tacke vor »Zwei neue Elemente der Mangangruppe« (der röntgenspektroskopische Teil gemeinsam mit O. Berg).

Es gelang, die Existenz dieser beiden Elemente mit den Ordnungszahlen 43 bzw. 75 in Platinerzen und im Columbit zum Teil durch chemische Reaktionen, hauptsächlich aber durch ihre charakteristischen Röntgenlinien trotz ihres äußerst geringen Vorkommens sicher nachzuweisen. Die Autoren schlagen für die beiden neuen Elemente die Namen »Masurium« (Ms) und »Rhenium« (Re) vor.

3. Vorgelegt wurde J. C. Poggendorffs biographisch-literarisches Handwörterbuch für Mathemathik, Astronomie, Physik, Chemie und verwandte Wissenschaftsgebiete, Bd. V: 1904—1924, I. Abt. A—K (Leipzig und Berlin 1925).

Zwei neue Elemente der Mangangruppe.

Chemischer Teil.

Von Walter Noddack und Ida Tacke.

Röntgenspektroskopischer Teil.

Von Otto Berg und Ida Tacke.

(Vorgelegt von Hrn. Nernst.)

Hierzu Taf. II.

Chemischer Teil.

Das periodische System der chemischen Elemente hat noch fünf Lücken, die durch fünf noch unbekannte Elemente auszufüllen sind. Diese fehlenden Elemente haben die Ordnungszahlen 43, 61, 75, 85 und 87.

Das Element 43 steht unter dem Mangan zwischen dem Molybdän und dem Ruthenium.

Das Element 61 gehört in die Gruppe der seltenen Erden und steht zwischen dem Neodym und dem Samarium.

Das Element 75 ist das nächsthöhere Homologe des Elementes 43 und steht zwischen dem Wolfram und dem Osmium.

Das Element 85 steht unter dem Jod und zwischen dem Polonium und dem Niton.

Das Element 87 ist das höchste Homologe der Alkalimetallgruppe und steht zwischen dem Niton und dem Radium.

Da die Elemente 85 und 87 zwischen radioaktiven Elementen stehen, ist mehrfach die Ansicht ausgesprochen worden, daß es sich bei ihnen um instabile Elemente handeln könnte oder daß sie vielleicht gar nicht existieren.

Das Element 61 scheint die seltenste der Erden zu sein, nach der gegenwärtig vielfach gesucht wird.

Die Elemente 43 und 75 stehen inmitten bekannter, stabiler Metalle, so daß uns kein Grund vorzuliegen schien, an ihrer Existenz zu zweifeln[1].

Wir hielten es daher für eine lohnende Aufgabe, diese beiden letzteren Elemente aufzusuchen. Hierzu war es erforderlich, eine Prognose ihrer geologischen und chemischen Eigenschaften zu stellen.

[1] Vgl. dagegen Loring, Chem. News 225, 309 u. 386, 1922. — Prandl u. Grimm, Ztschr. f. anorg. u. allg. Chem. 136, 283, 1924.

1. Vermutungen über das mineralische Vorkommen und die Häufigkeit der Ekamangane.

Da die beiden Elemente bisher unentdeckt geblieben sind, kann man bei der heutigen relativ guten Kenntnis der Zusammensetzung der Erdrinde annehmen, daß sie nirgends in größerer Menge anzutreffen sind. Um eine Abschätzung über ihre Häufigkeit zu gewinnen, legen wir die bekannte Tatsache zugrunde, daß die Elemente mit ungerader Ordnungszahl im allgemeinen 10- bis 20mal seltener sind als die im periodischen System darauf folgenden mit gerader Ordnungszahl. Auf das Element 43 folgt Ruthenium mit einer Häufigkeit von etwa $2 \cdot 10^{-12}$, woraus sich für 43 eine Häufigkeit von etwa 10^{-13} ergeben würde, für das Element 75 würde aus der Häufigkeit des folgenden Osmiums von $2 \cdot 10^{-11}$ ein Anteil von etwa 10^{-12} am Aufbau der Erdrinde zu schätzen sein.

Diese Seltenheit macht es unwahrscheinlich, daß man im Laufe einer Arbeit spezifische Mineralien der gesuchten Elemente, wenn es deren gibt, in die Hand bekommt. Man kann diese Elemente mit Aussicht auf Erfolg nur an Stellen suchen, an denen sehr viele verwandte Grundstoffe vergesellschaftet vorkommen. Eine Zusammenstellung der Fundstellen der Metalle vom Scandium bis zum Uran zeigt, daß man das vergesellschaftete Vorkommen in zwei große Gruppen einteilen kann:

a) das gediegene Vorkommen,

b) das oxydische Vorkommen.

Ein spezifischer Vertreter des gediegenen Vorkommens ist das Platinerz, das hauptsächlich aus Pt und Fe besteht und wenige Prozente von Cr, Mn, Co, Ni — Ru, Rh, Pd, Os, Ir — Cu Ag, Au (s. Tab. 1) enthält.

Tabelle 1.

Das vergesellschaftete Vorkommen der Elemente.

I	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As
II	Y	Zr	Nb	Mo	43	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn	Sb
III	La	Hf	Ta	W	75	Os	Ir	Pt	Au	Hg	Tl	Pb	Bi
IV		Th		U									

Platinerz

Columbite

Charakteristische Sammelpunkte des oxydischen Vorkommens sind die Erdenmineralien, z. B. Columbit, Gadolinit, Tantalit. So besteht z. B. der Columbit hauptsächlich aus Fe und Nb, enthält daneben Ti, V, Cr, Mn, Zn, As, Y, Zr, Sn, Ta, W, Pb und U und Spuren von Sc, Ga, Ge, Mo, Cd, In, Sb, La (und die folgenden Erden), Hf, Bi, Th.

Die Umrandungen von Tab. 1 zeigen, daß in den beiden genannten Zentren Platinerz und Columbit nahezu alle Metalle von Scandium bis Uran (unberücksichtigt blieben hier die Alkali- und Erdalkalimetalle) enthalten sind. Da sich die beiden Zentren an der Stelle Cr, Mn, Fe überschneiden, bleibt es ohne Kenntnis der chemischen Eigenschaften der unbekannten Elemente 43 und 75 ungewiß, ob sie beim gediegenen oder beim oxydischen Vorkommen zu suchen sind.

2. Voraussage einiger chemischer und physikalischer Eigenschaften der Ekamangane.

Zum Aufsuchen der beiden unbekannten Elemente versuchten wir, eine Anzahl analytisch wichtiger Eigenschaften aus denen der Nachbarelemente abzuleiten.

Chemische Eigenschaften der Ekamangane. Entprechend ihrer Stellung in der siebenten Gruppe des periodischen Systems müssen die Elemente 43 und 75 ähnlich dem Mn zahlreiche Oxydationsstufen bilden. In der zwei- und dreiwertigen wird dabei ihr Metallcharakter vorherrschen, während in den höheren Oxydationsstufen mehr die Halogennatur zur Geltung kommt. Da die Stabilität der höheren Oxyde in den Vertikalreihen des periodischen Systems mit dem Atomgewicht wächst, dürfte dieses halogenartige Verhalten ausgesprochener sein als beim Mn und den Ekamanganen ihr hauptsächliches analytisches Gepräge geben.

Oxyde. Entsprechend den niedrigen Oxyden der Nachbarelemente müßten die Oxyde der Ekamangane vom Charakter XO, X_2O_3 und XO_2 dunkle, in Säuren unlösliche Stoffe sein. Dagegen könnte XO_3 entsprechend dem CrO_3 und dem MoO_3 heller gefärbt und als Anhydrid der Säure H_2XO_4 in Wasser löslich sein. Am interessantesten aber müßten die höchsten Oxyde vom Charakter des Mn_2O_7 sein. Durch Interpolation zwischen den flüchtigen Oxyden MoO_3 (Smp. 790°) und RuO_4 (Smp. 21°) findet man für 43 den Smp. von X_2O_7 bei 350—400°, der Siedepunkt dürfte dicht darüber liegen. Ähnlich ergeben sich für 75 ein Smp. von 400—500° und ein ähnlicher Sublimationspunkt. Da CrO_3 dunkelrot, Mn_2O_7 violett, MoO_3 in der Hitze gelb und RuO_4 orange gefärbt ist, sollte X_2O_7 für 43 hell (rosa oder gelb) gefärbt sein, für 75 als Mitte zwischen WO_3 (gelb) und OsO_4 (farblos) würde eine hellgelbe oder weiße Farbe folgen. Der Molekularstruktur von X_2O_7 nach sollten die Kristalle der höchsten Oxyde der Ekamangane monokline oder trikline Nadeln sein.

Salze. Da alle Nachbarelemente Salze vom Charakter $\overset{I}{Me}_2XO_4$ bilden, sollten auch 43 und 75 derartige Salze bilden, außerdem könnten sich analog dem nahestehenden Cr beim Ansäuern Salze von der Art $\overset{I}{Me}_2O\,(XO_3)\,n$ bilden. Dem $KMnO_4$ sollten Salze vom Typus $\overset{I}{Me}XO_4$ entsprechen. Die Säuren H_2XO_4 sollten mit den Schwermetallen schwer lösliche Salze bilden, dagegen wäre es möglich, daß die Säuren HXO_4 analog $HMnO_4$ mit den meisten Metallen wasserlösliche Salze bilden. Am schwersten löslich dürften noch die Quecksilber- und Bleisalze sein.

Halogenverbindungen. Die meisten Nachbarelemente der Ekamangane bilden leicht flüchtige Halogenverbindungen, besonders von ihren höchsten Wertigkeitsstufen. Man sollte daher auch bei den Elementen 43 und 75 leicht schmelzende und sublimierende Halogenverbindungen, besonders Fluoride und Chloride, erwarten.

Sulfide. Im periodischen System macht sich zwischen der ersten Horizontalreihe und der zweiten und dritten eine eigenartige Verschiebung bemerkbar. Ti hat manche Ähnlichkeit mit Nb und Ta, V mit Mo und W, Mn mit Ru und Os. Man geht daher vielleicht nicht fehl, wenn man die Eka-

mangane in mancher Beziehung dem Cr zuordnet. Nun ist Cr ein Element, das in wäßriger Lösung im allgemeinen kein Sulfid bildet (nur in konzentrierten Chromosalzlösungen entsteht intermediär besonders bei erhöhtem Druck CrS), trotzdem es zwischen den sulfidbildenden Metallen V und Mn steht. Man kann daraus schließen, daß sich in der zweiten und dritten Horizontalreihe diese Unterbrechung der Sulfidbildung bei Eka- und Dwimangan wiederholt, daß diese Elemente also nur schwierig oder gar nicht Sulfide in verdünnter Lösung bilden.

Physikalische Eigenschaften. Da das Element 43 zwischen dem Mo mit dem Atomgewicht 96.0 und dem Ru mit dem Atomgewicht 101.7 steht, dürfte sein Atomgewicht zwischen 98.0 und 99.5 liegen. Entsprechend interpoliert man das Atomgewicht des zwischen W (184.0) und Os (190.9) liegenden Elementes 75 zu 187—188.

Die Dichten der gesuchten Elemente ergeben sich aus denen von Mo (10.2) und Ru (12.6) für das Element 43 zu etwa 11.5 und für das Element 75 aus W (19.1) und Os (22.48) zu etwa 21.

Die Schmelzpunkte sollten etwa bei 2300° abs. für 43 und bei etwa 3300° abs. für 75 liegen.

3. Untersuchung von Platinerzen.

Nach dem unter 1 und 2 Gesagten schien uns die Untersuchung verschiedener Platinerze am meisten Aussicht auf Erfolg zu bieten. Nimmt man zunächst einmal an, daß die Ekamangane nahezu ausschließlich im Platinerz vorkommen, so würde aus der Häufigkeit des Platins in der Erdrinde von 10^{-9} unter Berücksichtigung der oben geschätzten Häufigkeit der Ekamangane ein Gehalt dieses Erzes von 10^{-3} bis 10^{-4} an Ekamanganen folgen. Sollten sich diese auch in anderen Mineralien finden, so würde dies ihre Konzentration im Platinerz entsprechend herabsetzen.

An Ausgangsmaterialien standen uns zur Verfügung: 80 g russisches Platinerz, 50 g Osmiridium aus Münzgold, etwa 100 g Platinrückstände und später 2 g Sperrylith ($PtAs_2$). Entsprechend den erwarteten Eigenschaften der Elemente 43 und 75 kombinierten wir zwei Anreicherungsmethoden: Wir versuchten einerseits, die gesuchten Elemente in Form löslicher Salze von den Hauptbestandteilen des Erzes zu trennen, andererseits sie in Form ihrer höchsten flüchtigen Oxyde zu isolieren.

Das Erz wurde mit Königswasser behandelt, die Lösung zur Trockne gedampft und die zurückbleibende Salzmasse im Wasserstoffstrom reduziert. Der unaufgeschlossene Teil des Erzes wurde im Chlorstrom geglüht, die Chloride in Wasser gelöst und mit Zn reduziert. Sämtliche reduzierten Substanzen wurden zusammen abwechselnd im Wasserstoff- und Sauerstoffstrom stark geglüht. Dabei destillierte eine große Menge OsO_4 über, vermischt mit etwas RuO_4. An der Wand des Quarzrohres zeigte sich ein starker schwarzer Anflug von RuO_2, ein merkliches weißes Sublimat von As_2O_3 und ein sehr geringer weißer Anflug, der aus mikroskopisch kleinen Nadeln bestand und der besonders unsern Verdacht erregte. Beim Überleiten von H_2S färbten sich diese

Nadeln dunkel, anscheinend unter Bildung eines Sulfids. Beim Erhitzen schmolz dieses Sulfid zu kleinen Kugeln zusammen. Beim Glühen im Sauerstoffstrom verschwand der dunkle Belag, und an den kalten Stellen des Rohres setzten sich wiederum kleine weiße Kristalle ab. Es lag hier also wahrscheinlich ein flüchtiges Oxyd vor (etwa 1 mg). Die Kristalle wurden in Wasser gelöst, die Lösung reagierte sauer und ließ sich weder durch H_2S noch durch $(NH_4)_2S$ fällen. An leicht flüchtigen Oxyden sind bekannt: CrO_3, MoO_3, RuO_4, OsO_4, As_2O_3, As_2O_5, Sb_2O_5, Bi_2O_5 und TeO_2. Mit Ausnahme des Cr bilden die genannten Elemente sämtlich charakteristische Sulfide in wäßriger Lösung, die wir von unserem Sublimat nicht herstellen konnten. CrO_3 war wegen seiner Farbe und wegen seiner leichten Zersetzlichkeit ausgeschlossen. Wir nahmen daher an, daß es sich um ein Oxyd der Ekamangane, wahrscheinlich um das Oxyd X_2O_7 des Elements 75 handelte. Beim Einengen wurde die H_2S-haltige Lösung gelb und hinterließ beim Eintrocknen keinen merklichen Rückstand.

Wir schlossen das schon behandelte Erz mit Ätzkali und Salpeter auf und fällten aus der Lösung der Schmelze mit H_2S die in Lösung gegangenen Platinmetalle. Aus den Sulfiden versuchten wir das Sublimat wiederzuerhalten, aber ohne Erfolg. Dagegen ließ es sich beim Glühen des Osmiridiums im Sauerstoffstrom in sehr geringer Menge erkennen. Bei dem Versuch, seine Lösung durch Schwermetallsalze zu fällen, verloren wir es aber[1].

Mit den Platinrückständen wurden ebenfalls Sublimationsversuche gemacht, ohne daß sich das eben beschriebene Sublimat gewinnen ließ.

4. Untersuchung von Mineralien der Erdsäuren.

Da unser Platinerz anscheinend erschöpft war und wir neue Mengen nicht beschaffen konnten, wandten wir uns dem oxydischen Vorkommen der Elemente zu, und zwar speziell dem Columbit, bei dem allerdings eine relative Konzentration an Ekamanganen von nur 10^{-6} (vgl. die Gehaltschätzung beim Pt-Erz) erwartet werden konnte. Neben der chemischen Analyse wurde von jetzt an das Röntgenspektrogramm als einfaches Reagens benutzt.

Ca. 1 kg Columbit wurde mit NaOH und $NaNO_3$ aufgeschlossen, um neben dem Fe die Hauptmenge des Nb und Ta als unlösliches Na-Niobat und -Tantalat im Rückstande zu halten. Die filtrierte Lösung wurde in bekannter Weise alkalisch und sauer mehrfach mit H_2S behandelt, dann unter Zusatz von konz. HCl eingeengt bis auf ein Volumen von etwa 50 ccm. Aus der neutralisierten Lösung suchten wir mit Mercuronitrat noch einen Niederschlag zu fällen. Alle erhaltenen Niederschläge wurden zusammengebracht und reduziert. Da sie bei 1 kg Ausgangssubstanz etwa 1 g betrugen, konnte ihr Gehalt an Ekamanganen bei idealer Ausbeute theoretisch 1 ‰ betragen. In der Tat ließ sich auf dem Röntgenspektrogramm in den meisten Fällen die Anwesenheit des Elements 43, seltener die des Elements 75 erkennen.

Die reduzierten Niederschläge wurden von neuem aufgeschlossen und wieder gefällt. Es gelang hierbei, das Niob und Tantal relativ weitgehend

---

[1] Wir möchten an dieser Stelle den HH. Dr. Günther und Stransky unseren Dank aussprechen für eine Anzahl von Röntgenspektogrammen, die sie zu jener Zeit für uns aufnahmen.

zu entfernen, während As, Mo, W, Zn, Sn zusammen aus der Lösung des Aufschlusses durch H_2S gefällt wurden. Die Lösung wurde nach der Sulfidfällung wie oben nochmals mit Mercuronitrat behandelt. Die Konzentration der beiden neuen Elemente stieg in den Niederschlägen beim Element 43 auf 0.5°/₀, bei dem Element 75 auf 5°/₀. Mit dieser letzten Menge, die etwa 20 mg betrug, wurden noch einige Sublimationsversuche gemacht. Im Sauerstoffstrom entstand ein sehr geringes weißes Sublimat, das wegen seiner geringen Menge nicht direkt auf die Antikathode gebracht werden konnte. Es wurde mit Niobsäure vermischt, reduziert und ergab ebenfalls die Linien der neuen Elemente. Eine weitere Anreicherung verbot bisher die kleine Menge der zum Schluß erhaltenen Substanz.

Ein erneuter Aufschluß der anfangs ungelösten Masse des Columbits lieferte bei weiterer Verarbeitung keine Spuren der neuen Elemente mehr, so daß diese also beim ersten Aufschluß völlig in Lösung gegangen waren.

Bei der Untersuchung einiger anderer Mineralien in der geschilderten Weise ergaben sich sehr geringe Mengen vom Element 43 im Sperrylith, Gadolinit, Fergusonit, Zirkon, Spuren vom Element 75 im Tantalit und Wolframit.

5. Resultate der Untersuchung.

Aus unseren Untersuchungen geht hervor, daß die beiden Homologen des Mangans auf der Erde existieren. Sie finden sich wahrscheinlich in Platinerzen, da sich aus diesen ein flüchtiges Oxyd gewinnen ließ, das wir mit keinem bekannten Oxyde identifizieren konnten. Für diese Ansicht spricht auch der röntgenspektroskopische Nachweis des Elements 43 im Sperrylith. Im Columbit sind beide Ekamangane in einer Konzentration von etwa 10^{-6} bis 10^{-7} enthalten. Ihre Eigenschaften müssen im wesentlichen den vorausberechneten entsprechen, da sie in der geschilderten Weise nach einer Anreicherung um den Faktor 1000 auftauchten. Die Identität der gefundenen Stoffe mit den gesuchten Elementen mit den Ordnungszahlen 43 und 75 wurde durch das Röntgenspektrogramm bewiesen. Eine genauere Erforschung der chemischen und physikalischen Eigenschaften der neuen Elemente werden wir vornehmen, sobald wir in der Lage sind, erheblich größere Mengen Ausgangsmaterial aufzuarbeiten.

Röntgenspektroskopischer Teil.

Die chemisch-analytische Methodik hat in den letzten Jahren durch die Röntgenspektroskopie eine wichtige Bereicherung erfahren, besonders für solche Untersuchungen, bei denen es sich um sehr kleine Substanzmengen handelt oder um Elemente, die auf chemischem Wege nur mühevoll zu trennen sind. Aus diesem Grunde wurde seit längerer Zeit im Physikalischen Laboratorium des Wernerwerks M der Siemens und Halske A.-G. an der Durchbildung röntgenspektroskopischer Methoden gearbeitet und auf Anregung des Hrn. K. W. HAUSSER[1], der bestimmte Vermutungen über das Vorkommen der Elemente 43

[1] Wir danken Hrn. Dr. HAUSSER, auf dessen Anregung unser Zusammenarbeiten zustande kam, für sein reges Interesse.

und 75 hatte, röntgenspektroskopisch nach diesen Elementen gesucht, zuerst unabhängig von den im Gange befindlichen Arbeiten von Noddack und Tacke. Seit einiger Zeit wurde das Problem gemeinsam bearbeitet.

Für den Nachweis der Ekamangane kam von den spektroskopischen Methoden in erster Linie die Emissionsmethode in Betracht. Die Schwierigkeiten und Fehlerquellen der Methode, die hier nicht im einzelnen besprochen werden, bestehen hauptsächlich in der Gefahr der Veränderung der Untersuchungssubstanz auf der Antikathode durch das Elektronenbombardement, während die von diesem Fehler freie Absorptionsmethode bedeutend unempfindlicher ist. Wir haben alle Substanzen vor der Untersuchung im Wasserstoffstrom reduziert, um bei der hohen Temperatur im Brennfleck der Antikathode die Gefahr des Zerstäubens oder Fortsublimierens, die bei den höchsten Oxydationsstufen am größten ist, nach Möglichkeit zu vermeiden.

Unsere Apparatur bestand im wesentlichen aus einem Metallröntgenrohr mit Aluminiumfenster, Glühkathode und wassergekühlter Antikathode (meist Kupfer), Braggschem Spektrographen mit Steinsalzdrehkristall. Die Beschreibung der Einzelheiten soll einer ausführlichen Mitteilung vorbehalten bleiben. Der Spektrograph gestattet den Nachweis der Elemente von der Ordnungszahl 22 (Titan) an aufwärts. Um die Einzelaufnahmen zu beschleunigen und die Untersuchungssubstanz möglichst zu schonen, wurden auf dem Spektrographen zwei Steinsalzkristalle unter verschiedenen Winkelstellungen angeordnet, so daß zwei Bezirke des Spektrums gleichzeitig aufgenommen werden konnten. Die Auswertung der Spektrogramme in Wellenlängen geschah relativ zu den Wellenlängen bekannter Linien. Wir benutzten dabei die von Siegbahn angegebenen Zahlenwerte der Wellenlängen, die mit unseren relativen Messungen gut übereinstimmen. In unseren Spektrogrammen entsprachen einem Linienabstand von 0.001 Å etwa 0.04 mm. Zur genauen Bestimmung der Wellenlänge von Linien wurde der Spalt so eng eingestellt, daß die Breite einer Linie etwa 0.001 Å betrug.

Wir ermittelten durch Vorversuche, daß im allgemeinen schon der Gehalt von 0.1 % eines Elementes sich durch dessen Hauptlinie nachweisen ließ. Da man mit 1 mg Untersuchungssubstanz auskommen konnte, war es möglich, in günstigen Fällen 0.001 mg eines Elementes nachzuweisen. Die Möglichkeit einer Analyse so kleiner Substanzmengen machte diese Spektralmethode zum Hilfsmittel bei den vorstehend geschilderten chemisch-präparativen Arbeiten hervorragend geeignet. Das Röntgenspektrum bildete eine Kontrolle für den chemischen Arbeitsgang überhaupt, insbesondere für die Anreicherung der gesuchten Ekamangane und diente schließlich als sicherer Beweis für deren Vorhandensein.

Die Empfindlichkeit der Röntgenanalyse ließ nach der oben angegebenen Schätzung der Konzentration an Ekamanganen in der Erdrinde im allgemeinen nicht erwarten, daß diese Elemente ohne chemische Vorarbeit in Mineralien aufgefunden werden könnten. Am ehesten könnte der direkte Nachweis bei den Platinerzen gelingen, jedoch standen diese für die spektroskopischen Arbeiten zur Zeit nicht zur Verfügung.

Zum Nachweis des Elements 43 benutzten wir dessen K-Serie. Mit Präparaten, die aus Sperrylith, Columbit und Gadolinit gewonnen waren, erhielten

wir in einer größeren Zahl von Fällen die Linie $K\alpha_1$ des Elements 43 als schwache Nachbarlinie neben $K\beta_1$ des Niob. Nur bei einigen Präparaten trat diese Linie stärker auf, und es konnten bei diesen Platten auch $K\alpha_2$ und $K_{\beta 1}$ ausgemessen werden. Die letzte einzig noch fehlende Linie 43 $K\beta_2$ war wegen ihrer relativ zu den anderen geringen Intensität nicht zu erwarten. Die gemessenen Wellenlängen des Elements 43 sind in der Tabelle 2 den berechneten gegenübergestellt.

Tabelle 2.

Wellenlängen in Å der Linien des Elements 43.

Bezeichnung nach Siegbahn	$K\alpha_1$	$K\alpha_2$	$K\beta_1$
Gemessen	0.672	0.675	0.601
Berechnet	0.6734	0.6779	0.6000

Abb. 1. Schematische Darstellung der aufgefundenen K-Linien des Elements 43 mit einigen Linien benachbarter Elemente. Die Breite der Linien entspricht der Breite in den Originalspektren. Die Kurve über den Linien stellt die Intensität der Linien nach einer von Noddack ausgeführten Kornzählung dar.

Zum Nachweis des Elements 75 benutzten wir die L-Serie. Einige aus dem Columbit stammende Präparate ergaben die in der Tabelle 3 (s. nächste Seite) angeführten Linien dieses Elementes.

Die Zinklinien erscheinen teils infolge von Verunreinigungen der Antikathode, teils infolge des chemischen Arbeitsganges auf fast allen Spektrogrammen mehr oder weniger stark. Die Wolframlinien erscheinen stets kräftig infolge der Zerstäubung des Wolframs von dem Glühfaden der Kathode auf die Antikathode. Wie die Tabelle 3 und die schematische Abbildung 2 zeigen, konnten die Linien 75 $L\alpha_1$ und 75 $L\alpha_2$ neben den Zinklinien klar getrennt beobachtet werden. Ebenso erscheint die Linie 75 $L\beta_2$ neben der nahen Wolframlinie $L\beta_9$. Dagegen

Tabelle 3.

Röntgenspektrum mit den Linien des Elements 75.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Intensitätsschätzung....	4	2	2	6	1	5	9	10	5	2	1
Gemessene Wellenlänge	1.2020	1.2048	1.2094	1.2125	1.216	1.2212	1.2352	1.4299	als Bezugslinie angenommen	1.4360	1.4407
Linienbezeichnung nach SIEGBAHN und Wellenlänge	WLβ_9 1.2021	75Lβ_2 1.2041	WLβ_{10} 1.2094	WLβ_5 1.2125	75Lβ_3 1.2169 WLβ_{16} 1.2158	WLβ_7 1.2208	75Lβ_1 1.2355 WLβ_8 1.2354	75Lα_1 1.4306	Zn Kα_1 1.4321	Zn Kα_2 1.4359	75Lα_2 1.4406

Zeile 2 enthält die Wellenlängen der Linien der Lα- und Lβ-Gruppe des Elements 75 und die benachbarten ZnKα-Linien bzw. WLβ-Linien, Zeile 1 die geschätzten Intensitäten dieser Linien. Zeile 3 enthält die Deutung der Linien in der Bezeichnung von SIEGBAHN mit den Wellenlängen, die den SIEGBAHNschen Tabellen entnommen oder aus bekannten Wellenlängen mit Hilfe der MOSELEYschen Kurven graphisch interpoliert sind. Zur Auswertung der β-Linien wurden als Bezugslinien die Linien AsKα_2 und TaLβ_3 verwandt, die sich auf dem Spektrogramm befanden.

Abb. 2. Schematische Darstellung des in Tabelle 3 enthaltenen Spektrums.

Die Breite der Linien entspricht der Breite in unserer Originalaufnahme. Die Kurve über den Linien veranschaulicht die Intensität nach der in Tabelle 3 angegebenen Schätzung. Soweit die Linien dem Element 75 zuzuschreiben sind, sind die Flächen der Intensitätskurven schraffiert. Der nicht schraffierte Kurvenzug gibt die Intensität der Linien eines entsprechenden Spektrums ohne das Element 75.

deckt sich 75Lβ_1 mit der Linie WLβ_8[1], jedoch zeigt die relativ große Intensität dieser Linie, daß sie nicht allein dem Wolfram zugeschrieben werden kann. Wie einige Spektrogramme zeigen, welche die Linien des Elements 75 nicht enthalten, wäre die Intensität der Linie WLβ_8 im vorliegenden Falle nur auf etwa 4 zu schätzen. Die hier geschätzte Intensität 9 beruht also auf der Überlagerung von 75Lβ_1 und WLβ_8. Ob bei der in Spalte 5 angeführten Linie außer der von CROFFUTT aufgefundenen Linie WLβ_{16}, die wir auch gelegentlich beobachteten, noch 75Lβ_3 mitwirkt, kann wegen der schwachen Intensität

[1] WLβ_8 deckt sich mit WLβ_{11} und WLβ_{12}.

Abb. 3. K-Spektrum des Elements 43.
Die Linien Kα_2 und Kβ_1 sind in der Wiedergabe schwer erkennbar.

Abb. 4. L-Spektrum des Elements 75.

Abb. 5. Vergrößerung der Lα-Gruppe des Elements 75.

W. Noddack, I. Tacke und O. Berg: Zwei neue Elemente der Mangangruppe.

nicht mit Sicherheit entschieden werden, jedoch hat es den Anschein, als ob zwei getrennte Linien vorliegen.

Die Frage, ob die den Elementen 43 und 75 zugeschriebenen Linien noch auf andere Elemente — evtl. als Linien zweiter und höherer Ordnung — zurückgeführt werden können, haben wir systematisch unter Verwendung Moseleyscher Kurven untersucht. Solche Elemente konnten jedoch durch das Fehlen ihrer stärkeren Linien ausgeschlossen werden. Auch haben wir uns davon überzeugt, daß die in Frage kommenden Linien nicht durch Fehler der Apparatur, z. B. der Kristalle, vorgetäuscht sein können.

Die Intensitätsabstufung der den Elementen 43 und 75 zugeschriebenen Linien ist die charakteristische von den Nachbarelementen her bekannte.

Nach diesen Beobachtungen ist das Element 43 durch 3 Linien, das Element 75 durch 4 bis 5 Linien in der richtigen Intensitätsabstufung nachgewiesen.

Zusammenfassung beider Teile.

1. Aus den Häufigkeitsverhältnissen der chemischen Elemente in der Erdrinde wird geschätzt, daß der Anteil der Ekamangane an der Zusammensetzung der Erdrinde 10^{-12} bis 10^{-13} beträgt.

2. Aus dem vergesellschafteten Vorkommen der übrigen Elemente wird geschlossen, daß die Ekamangane sowohl im Platinerz als auch in den Erdenmineralien vorkommen können.

3. Es werden einige chemische und physikalische Eigenschaften der Ekamangane aus denen der Nachbarelemente vorausgesagt.

4. Es werden Platinmineralien untersucht. Dabei wird ein Sublimat gewonnen, das als das höchste Oxyd des Elements 75 angesprochen wird.

5. Es wird ein chemisches Anreicherungsverfahren auf einige Erdenmineralien angewandt.

6. Die angereicherten Präparate aus dem Columbit zeigen einen Gehalt von etwa 0.5% an Ekamangan und 5% an Dwimangan. Auch in einer Reihe von anderen Mineralien werden Spuren der gesuchten Elemente gefunden.

7. Die Identität der gefundenen Stoffe mit den fehlenden Elementen 43 und 75 wird durch das Röntgenspektogramm bewiesen.

8. Vom Element 43 werden die Linien $K\alpha_1$, $K\alpha_2$, $K\beta_1$, vom Element 75 die Linien $L\alpha_1$, $L\alpha_2$, $L\beta_1$, $L\beta_2$ ausgemessen.

Wir schlagen für die neuentdeckten Elemente folgende Namen vor:

Für das Element 43 nach unserer Ostmark den Namen Masurium (Ma) und für das Element 75 nach dem deutschen Rhein den Namen Rhenium (Re).

Die chemischen Arbeiten wurden teils in der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt, teils im Physikalisch-Chemischen Institut der Universität Berlin, die röntgenspektroskopischen Arbeiten im physikalischen Laboratorium des Wernerwerks M der Siemens & Halske A.-G. ausgeführt.

Ausgegeben am 4. September.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1925

XX. Gesamtsitzung. 18. Juni.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

*1. Hr. Pompeckj sprach über Vulkanismus und Leben.

Unter Ablehnung der Richter-Helmholtz-Arrheniusschen Annahme von der Ewigkeit des organischen Lebens und vom kosmischen Ursprunge des irdischen Lebens wird das organische Leben der Erde in Anlehnung an die Chamberlin-Moultonsche Planetesimaltheorie in stofflicher Beziehung auf vulkanische Tätigkeit zurückgeführt. Wie der Vulkanismus die stoffliche Quelle des Lebens ist, so ist er auch der Erhalter des organischen Lebens. Unmittelbare, besondere Beeinflussungen des bisherigen Entwickelungsganges des Lebens durch vulkanische Prozesse lassen sich aus den zur Verfügung stehenden Daten der Erdgeschichte nicht mit Sicherheit entnehmen. Das Aufhören vulkanischer Tätigkeit wird eine der Ursachen des Endes des Lebens sein müssen.

2. Hr. Zimmermann überreichte sein Buch »Knickfestigkeit der Stabverbindungen« (Berlin 1925).

3. Zu wissenschaftlichen Zwecken hat die Akademie bewilligt:
durch ihre philosophisch-historische Klasse:

4000 *RM* zur Fortführung der Arbeiten der Orientalischen Kommission,
2000 » für die Bearbeitung der Indices zu Ibn Saad,
1500 » für die Arbeiten der Kant-Kommission,
500 » für das Pommersche Wörterbuch;

durch ihre physikalisch-mathematische Klasse:

4000 *RM* als Zuschuß zu den Bureaukosten des Nomenclator animalium generum et subgenerum.

Die Akademie hat den ordentlichen Professor an der Universität Leipzig Hrn. Dr. Erich Brandenburg und den ordentlichen Honorarprofessor an der Universität Marburg Hrn. Dr. Karl Robert Wenck zu korrespondierenden Mitgliedern ihrer philosophisch-historischen Klasse gewählt.

Ausgegeben am 4. September.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1925

XXI. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 25. Juni.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

*1. Hr. Ludendorff sprach über Untersuchungen über die veränderlichen Sterne der Mira-Klasse.

Es werden die wichtigsten Ergebnisse einer allgemeinen Untersuchung über die Mira-Sterne mitgeteilt, und es wird namentlich die aus dieser Untersuchung sich ergebende Korrelation zwischen der Form der Lichtkurve und der Periode des Lichtwechsels ausführlich besprochen. Schließlich werden die Folgerungen erörtert, die sich auf Grund der Russellschen Theorie der Entwicklung der Sterne in bezug auf den Entwicklungsgang der Mira-Sterne ziehen lassen.

2. Sodann legte Hr. Bieberbach einen Aufsatz von Hrn. Dr. Alexander Ostrowski in Göttingen vor: Über den Schottkyschen Satz und die Borelschen Ungleichungen. (Ersch. später.)

Den Hauptgegenstand der Mitteilung bilden neue Beweise des Schottkyschen Satzes und der Borelschen Ungleichungen sowie die Herleitung zahlenmäßig bzw. asymptotisch genauer Majoranten für die Nullpunktsentwickelung einer Funktion, die im Einheitskreis regulär ist und die Werte 0 und 1 ausläßt. Der neue Beweis des Schottkyschen Satzes beruht auf der Heranziehung algebraischer Näherungsfunktionen $n(1-\sqrt[n]{z})$ von $\lg\frac{1}{z}$, deren Benutzung bemerkenswerte Vorteile bietet.

Ausgegeben am 4. September.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1925

XXII. Gesamtsitzung. 9. Juli.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

1. Hr. Erman sprach über die ägyptischen Schülerhandschriften. (Abh.)

Aus dem dreizehnten und zwölften Jahrhundert v. Chr. sind uns in verhältnismäßig großer Zahl Papyrus erhalten, die man nach ihrem Inhalt und nach den Korrekturen des Lehrers Schülern zuzuschreiben pflegt. Sie stammen indessen nicht aus der wirklichen Schulzeit ihrer Schreiber, sondern aus einer Zeit, wo diese schon als Gehilfen ihrer Meister amtlich tätig waren, und sie hatten zudem lediglich den Zweck, deren Fertigkeit im schönen Schreiben zu zeigen. Vermutlich sind sie eine Art von Gesellenstücken, nach deren Billigung die Schüler nun als rechte Schreiber anerkannt wurden, die, wie es heißt, »das Schreibzeug frei tragen« durften.

2. Hr. Einstein legte eine Arbeit über Einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität vor.

Es wird gezeigt, daß man durch Aufhebung der Hypothese der Symmetrie des Fundamentaltensors und der Komponenten des Feldes des affinen Zusammenhanges eine Verallgemeinerung des Gesetzes des Gravitationsfeldes erhält, welche das Gesetz des elektromagnetischen Feldes mit umspannt.

3. Hr. Haber legte eine Arbeit der HH. R. Ladenburg und H. Kopfermann über Die elektrische Doppelbrechung des Natriumdampfes vor.

Die Verfasser haben die elektrische Doppelbrechung des Natriumdampfes für Wellenlängen der unmittelbaren Umgebung der D_2-Linie $\left(\lambda_0 \pm \frac{1}{40}\,\text{Å}\right)$ aufgefunden; an der D_1-Linie ist sie — in Übereinstimmung mit älteren andersartigen Versuchen Ladenburgs — nicht zu erkennen und sicher kleiner als $\frac{1}{10}$ des Effektes an der D_2-Linie. Die quantitative Messung der Doppelbrechung und des daraus berechneten Unterschiedes der elektrischen Verschiebung der beiden Komponenten der D_2-Linie erlaubt, im Anschluß an theoretische Überlegungen von H. A. Kramers, die elektrische Aufspaltung der Niveaus der p- und s-Terme des Natriums, aus denen die D-Linien entstehen, abzuleiten.

4. Hr. Paschen legte eine Arbeit des Hrn. Dr. Karl Müller in Berlin vor über sehr dünne, durchsichtige Metallfolien. (Ersch. später.)

Die Arbeit betrifft die Herstellung dünner Gold- und Nickelfolien ohne Unterlagen, welche also frei in der Luft schweben, obwohl ihre Dicke nur wenige Hundertstel μ bis herab zu $^1/_{100}\,\mu$ beträgt. Verfasser gibt das Verfahren an und untersucht die spektrale Lichtdurchlässigkeit, welche für Gold selektiv, für Nickel gleichmäßig gefunden wird. Er weist dann auf die wissenschaftlichen Anwendungsmöglichkeiten hin, welche auf allen Gebieten der Physik vorhanden sind, besonders aber in der Radiologie, wo die Durchlässigkeit für Elektronen und Ionen wichtige Untersuchungen ermöglichen wird.

5. Das Ehrenmitglied Hr. Max Lenz in Hamburg übersandte sein Buch »Deutschland im Kreis der Großmächte 1871—1914« (Berlin 1925).

6. Das korrespondierende Mitglied Hr. Sten Konow in Kristiania übersandte seine Schriften »Die Inder« (Sonderabdr. aus dem »Lehrbuch der Religionsgeschichte« hrsg. von Alfred Bertholet und Eduard Lehmann, II, 4. Aufl.) und »Njord og kālī en parallel og en antydning« (Sonderabdr. aus der »Festskrift til Bibliothekar A. Kjaer).

7. Vorgelegt wurde »Briefwechsel der Brüder Jakob und Wilhelm Grimm mit Karl Lachmann«, hrsg. von Albert Leitzmann, 1. Lieferung (Jena 1925).

Die Preußische Regierung hat die Wahl des ordentlichen Professors an der Universität Berlin Hrn. Dr. Albert Brackmann zum ordentlichen Mitglied der philosophisch-historischen Klasse durch Erlaß vom 3. Juli 1925 bestätigt.

Die Akademie hat das ordentliche Mitglied ihrer physikalisch-mathematischen Klasse Hrn. Gustav Müller am 7. Juli, die korrespondierenden Mitglieder derselben Klasse Hrn. Felix Klein in Göttingen und Hrn. Joseph Partsch in Leipzig am 22. Juni und das Ehrenmitglied Hrn. Hugo Graf von und zu Lerchenfeld in Köfering bei Regensburg Ende Juni durch den Tod verloren.

Einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität.

Von A. Einstein.

Die Überzeugung von der Wesenseinheit des Gravitationsfeldes und des elektromagnetischen Feldes dürfte heute bei den theoretischen Physikern, die auf dem Gebiete der allgemeinen Relativitätstheorie arbeiten, feststehen. Eine überzeugende Formulierung dieses Zusammenhanges scheint mir aber bis heute nicht gelungen zu sein. Auch von meiner in diesen Sitzungsberichten (XVII, S. 137, 1923) erschienenen Abhandlung, welche ganz auf Eddingtons Grundgedanken basiert war, bin ich der Ansicht, daß sie die wahre Lösung des Problems nicht gibt. Nach unablässigem Suchen in den letzten zwei Jahren glaube ich nun die wahre Lösung gefunden zu haben. Ich teile sie im folgenden mit.

Die benutzte Methode läßt sich wie folgt kennzeichnen. Ich suchte zuerst den formal einfachsten Ausdruck für das Gesetz des Gravitationsfeldes beim Fehlen eines elektromagnetischen Feldes, sodann die natürlichste Verallgemeinerung dieses Gesetzes. Von dieser zeigte es sich, daß sie in erster Approximation die Maxwellsche Theorie enthält. Im folgenden gebe ich gleich das Schema der allgemeinen Theorie (§ 1) und zeige darauf, in welchem Sinne in dieser das Gesetz des reinen Gravitationsfeldes (§ 2) und die Maxwellsche Theorie (§ 3) enthalten sind.

§ 1. Die allgemeine Theorie.

Es sei in dem vierdimensionalen Kontinuum ein affiner Zusammenhang gegeben, d. h. ein $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$-Feld, welches infinitesimale Vektorverschiebungen gemäß der Relation

$$dA^{\mu} = -\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} A^{\alpha} dx^{\beta} \qquad (1)$$

definiert. Symmetrie der $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ bezüglich der Indizes α und β wird nicht vorausgesetzt. Aus diesen Größen Γ lassen sich dann in bekannter Weise die (Riemannschen) Tensoren bilden

$$R^{\alpha}_{\mu,\nu\beta} = -\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\beta}} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\beta} + \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}}{\partial x_{\nu}} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta}$$

und

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu,\nu\alpha} = -\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu} + \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x_{\nu}} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}. \qquad (2)$$

Unabhängig von diesem affinen Zusammenhang führen wir eine kontravariante Tensordichte $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ ein, deren Symmetrieeigenschaften wir ebenfalls offen lassen. Aus beiden bilden wir die skalare Dichte

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{3}$$

und postulieren, daß sämtliche Variationen des Integrals

$$\mathfrak{J} = \int \mathfrak{H} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

nach den $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ und $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ als unabhängigen (an den Grenzen nicht varierten) Variabeln verschwinden.

Die Variation nach den $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ liefert die 16 Gleichen

$$R_{\mu\nu} = 0, \tag{4}$$

die Variation nach den $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ zunächst die 64 Gleichungen

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \mathfrak{g}^{\beta\nu}\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} + \mathfrak{g}^{\mu\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} - \delta^{\nu}_{\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\beta}}{\partial x_\beta} + \mathfrak{g}^{\sigma\beta}\Gamma^{\mu}_{\sigma\beta}\right) - \mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} = 0. \tag{5}$$

Wir wollen nun einige Betrachtungen anstellen, die uns die Gleichungen (5) durch einfachere zu ersetzen gestatten. Verjüngen wir die linke Seite von (5) nach den Indizes ν, α bzw. μ, α, so erhalten wir die Gleichungen

$$3\left(\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\alpha}}{\partial x_\alpha} + \mathfrak{g}^{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\right) + \mathfrak{g}^{\mu\alpha}(\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}) = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{\nu\alpha}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\nu}}{\partial x_\alpha} = 0. \tag{7}$$

Führen wir ferner Größen $\mathfrak{g}_{\mu\nu}$ ein, welche die normierten Unterdeterminanten zu den $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ sind, also die Gleichungen

$$\mathfrak{g}_{\mu\alpha}\mathfrak{g}^{\nu\alpha} = \mathfrak{g}_{\alpha\mu}\mathfrak{g}^{\alpha\nu} = \delta^{\nu}_{\mu}$$

erfüllen, und multiplizieren (5) mit $\mathfrak{g}_{\mu\nu}$, so erhalten wir eine Gleichung, die wir nach Heraufziehen eines Index wie folgt schreiben können

$$2\mathfrak{g}^{\mu\alpha}\left(\frac{\partial \lg \sqrt{\mathfrak{g}}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\right) + (\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\beta}_{\beta\alpha}) + \delta^{\mu}_{\beta}\left(\frac{\partial \mathfrak{g}^{\beta\alpha}}{\partial x_\alpha} + \mathfrak{g}^{\sigma\beta}\Gamma^{\beta}_{\sigma\beta}\right) = 0, \tag{8}$$

wenn man mit $\mathfrak{g}$ die Determinante aus den $\mathfrak{g}_{\mu\nu}$ bezeichnet. Die Gleichungen (6) und (8) schreiben wir in der Form

$$\mathfrak{f}^{\mu} = \tfrac{1}{3}\mathfrak{g}^{\mu\alpha}(\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\beta}_{\beta\alpha}) = -\left(\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\alpha}}{\partial x_\alpha} + \mathfrak{g}^{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\right) = -\mathfrak{g}^{\mu\alpha}\left(\frac{\partial \lg \sqrt{\mathfrak{g}}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\right), \tag{9}$$

wobei $\mathfrak{f}^{\mu}$ eine gewisse Tensordichte bedeutet. Es ist leicht zu beweisen, daß das Gleichungssystem (5) äquivalent ist dem Gleichungssystem

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \mathfrak{g}^{\beta\nu}\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} + \mathfrak{g}^{\mu\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} - \mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} + \delta^{\nu}_{\alpha}\mathfrak{f}^{\mu} = 0 \tag{10}$$

in Verbindung mit (7). Durch Herunterziehen der oberen Indizes erhält man mit Rücksicht auf die Beziehungen

$$\mathfrak{g}_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{-g}} = g_{\mu\nu}\sqrt{-\mathfrak{g}}\,,$$

wobei $\mathfrak{g}_{\mu\nu}$ einen kovarianten Tensor bedeutet

$$-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + g_{\tau\nu}\Gamma^{\tau}_{\mu\alpha} + g_{\mu\tau}\Gamma^{\tau}_{\alpha\nu} + g_{\mu\nu}\phi_\alpha + g_{\mu\alpha}\phi_\nu = 0\,, \tag{10a}$$

wobei ϕ_τ ein kovarianter Vektor ist. Dies System in Verbindung mit den beiden oben angegebenen

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{\nu\alpha}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\nu}}{\partial x_\alpha} = 0 \tag{7}$$

und

$$0 = R_{\mu\nu} = -\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu} + \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} \tag{4}$$

sind das Ergebnis des Variationsverfahrens in der einfachsten Form. Auffallend an diesem Ergebnis ist das Auftreten eines Vektors ϕ_τ neben dem Tensor $(\mathfrak{g}_{\mu\nu})$ und den Größen $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$. Um Übereinstimmung mit den bisher bekannten Gesetzen der Gravitation und Elektrizität zu erhalten, wobei der symmetrische Bestandteil der $\mathfrak{g}_{\mu\nu}$ als metrischer Tensor, der antisymmetrische als elektromagnetisches Feld aufzufassen ist, muß man das Verschwinden von ϕ_τ voraussetzen, was wir im folgenden tun werden. Man wird jedoch für spätere Untersuchungen (z. B. Problem des Elektrons) im Sinne behalten müssen, daß das Hamiltonsche Prinzip für das Verschwinden der ϕ_τ keinen Anhaltspunkt liefert. Dies Nullsetzen der ϕ_τ führt zu einer Überbestimmung des Feldes, indem wir für $16+64$ Variable $16+64+4$ voneinander algebraisch unabhängige Differentialgleichungen haben.

§ 2. Das reine Gravitationsfeld als Spezialfall.

Die $g_{\mu\nu}$ seien symmetrisch. Die Gleichungen (7) sind identisch erfüllt. Durch Vertauschen von μ und ν in (10a) und Subtrahieren erhält man dann in leichtverständlicher Schreibweise

$$\Gamma_{\nu,\mu\alpha} + \Gamma_{\mu,\alpha\nu} - \Gamma_{\mu,\nu\alpha} - \Gamma_{\nu,\alpha\mu} = 0\,. \tag{11}$$

Nennt man Δ den in den beiden letzten Indizes antisymmetrischen Bestandteil der Γ, so nimmt (11) die Form an

$$\Delta_{\nu,\mu\alpha} + \Delta_{\mu,\alpha\nu} = 0$$

oder

$$\Delta_{\nu,\mu\alpha} = \Delta_{\mu,\nu\alpha}\,. \tag{11a}$$

Diese Symmetrieeigenschaft in den beiden ersten Indizes ist aber mit der Antisymmetrie in den beiden letzten unvereinbar, wie folgende Serie von Gleichungen lehrt

$$\Delta_{\mu,\nu\alpha} = -\Delta_{\mu,\alpha\nu} = -\Delta_{\alpha,\mu\nu} = \Delta_{\alpha,\nu\mu} = \Delta_{\nu,\alpha\mu} = -\Delta_{\nu,\mu\alpha}\,.$$

Dies in Verbindung mit (11a) verlangt das Verschwinden aller Δ. Die Γ sind also symmetrisch in den beiden letzten Indizes wie in der Riemannschen Geometrie.

Die Gleichungen (10a) lassen sich dann in bekannter Weise auflösen, und man erhält

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right). \tag{12}$$

Gleichung (12) in Verbindung mit (4) ist das bekannte Gravitationsgesetz. Hätten wir in § 1 von Anfang an die Symmetrie der $g_{\mu\nu}$ vorausgesetzt, so wären wir direkt zu (12) und (4) gelangt. Es scheint mir dies die einfachste und geschlossenste Ableitung der Gravitationsgleichungen für das Vakuum zu sein. Der Versuch, durch Verallgemeinerung gerade dieser Betrachtung das Gesetz der Elektromagnetik mit zu umfassen, muß daher wohl als ein natürlicher angesehen werden.

Hätten wir das Verschwinden der ϕ_τ nicht vorausgesetzt, so hätten wir aus der Voraussetzung der Symmetrie der $g_{\mu\nu}$ das bekannte Gesetz des reinen Gravitationsfeldes auf dem angegebenen Wege nicht folgern können. Hätten wir dagegen die Symmetrie der $g_{\mu\nu}$ und der $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ vorausgesetzt, so wäre das Verschwinden der ϕ_α eine Folge von (9) bzw. von (10a) und (7) gewesen; man wäre dann ebenfalls zum Gesetz des reinen Gravitationsfeldes gelangt.

§ 3. Beziehung zur Maxwellschen Theorie.

Falls ein elektromagnetisches Feld vorhanden ist, d. h. die $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ bzw. die $g_{\mu\nu}$ einen antisymmetrischen Bestandteil enthalten, gelingt eine Auflösung der Gleichungen (10a) nach den Größen $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ nicht, was die Übersichtlichkeit des ganzen Systems bedeutend erschwert. Die Auflösung gelingt jedoch, wenn wir uns auf die Untersuchung der ersten Approximation beschränken. Dies wollen wir tun und wieder das Verschwinden der ϕ_μ voraussetzen.

Wir machen also den Ansatz

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} + \phi_{\mu\nu}, \tag{13}$$

wobei die $\gamma_{\mu\nu}$ symmetrisch, die $\phi_{\mu\nu}$ antisymmetrisch seien. Die $\gamma_{\mu\nu}$ und $\phi_{\mu\nu}$ seien unendlich klein erster Ordnung. Größen zweiter und höherer Ordnung werden vernachlässigt. Die $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ sind dann ebenfalls unendlich klein erster Ordnung.

Unter diesen Umständen nimmt das Gleichungssystem (10a) die einfachere Form an

$$+\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^{\nu}_{\mu\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\nu} = 0. \tag{10b}$$

Durch zweimalige zyklische Vertauschung der Indizes μ, ν, α entstehen zwei weitere Gleichungen. Aus den drei Gleichungen lassen sich die Γ ähnlich wie im symmetrischen Falle berechnen. Man erhält

$$-\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x_\alpha}\right). \tag{14}$$

Die Gleichung (4) reduziert sich auf das erste und dritte Glied. Setzt man hierin den Ausdruck für $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ aus (14) ein, so erhält man

$$-\frac{\partial^2 g_{\nu\mu}}{\partial x_\alpha^2}+\frac{\partial^2 g_{\alpha\mu}}{\partial x_\nu \partial x_\alpha}+\frac{\partial^2 g_{\alpha\nu}}{\partial x_\mu \partial x_\alpha}-\frac{\partial^2 g_{\alpha\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\nu}=0. \quad (15)$$

Bevor wir (15) weiter betrachten, entwickeln wir Gleichung (7). Aus (13) folgt zunächst, daß mit der uns hier interessierenden Näherung gilt

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu}=-\delta_{\mu\nu}-\gamma_{\mu\nu}-\phi_{\mu\nu}. \quad (16)$$

Mit Rücksicht hierauf geht (7) über in

$$\frac{\partial \phi_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=0. \quad (17)$$

Nun setzen wir die in (13) gegebenen Ausdrücke in (15) ein und erhalten mit Rücksicht auf (17)

$$-\frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2}+\frac{\partial^2 \gamma_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu \partial x_\alpha}+\frac{\partial^2 \gamma_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\alpha}-\frac{\partial^2 \gamma_{\alpha\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\nu}=0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2}=0. \quad (19)$$

Die Gleichungen (18), welche bekanntlich durch geeignete Koordinatenwahl vereinfacht werden können, sind dieselben wie beim Fehlen eines elektromagnetischen Feldes. Ebenso enthalten die Gleichungen (17), (19) für das elektromagnetische Feld die auf das Gravitationsfeld bezüglichen Größen $\gamma_{\mu\nu}$ nicht. Beide Felder sind also — im Einklang mit der Erfahrung — in erster Approximation voneinander unabhängig.

Die Gleichungen (17), (19) sind den Maxwellschen Gleichungen für den leeren Raum fast völlig äquivalent. (17) ist das eine Maxwellsche System. Die Ausdrücke

$$\frac{\partial \phi_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2}+\frac{\partial \phi_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial \phi_{\alpha\mu}}{\partial x_\nu},$$

welche nach Maxwell verschwinden sollen, verschwinden zwar nach (17) und (19) nicht notwendig, wohl aber ihre Divergenzen vom Typus

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \phi_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial \phi_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial \phi_{\alpha\mu}}{\partial x_\nu}\right).$$

(17) und (19) sind daher mit den Maxwellschen Gleichungen des leeren Raumes im wesentlichen identisch.

Bezüglich der Zuordnung der $\phi_{\mu\nu}$ zu den elektrischen und magnetischen Vektoren ($\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{h}$) möchte ich eine Bemerkung machen, die eine von der hier vertretenen Theorie unabhängige Gültigkeit beansprucht. Gemäß der klassischen Mechanik, die mit Zentralkräften arbeitet, gibt es zu jedem Bewegungsvorgang V den inversen $\overline{V}$, bei dem dieselben Konfigurationen in entgegengesetzter Reihenfolge durchlaufen werden. Dieser inverse Begwegungsvorgang $\overline{V}$ wird

aus dem ursprünglichen V formal auch dadurch erhalten, daß man auf letzteren die Substitution

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= -t \end{aligned}$$

anwendet.

Ähnlich verhält es sich auch gemäß der allgemeinen Relativitätstheorie im Falle eines reinen Gravitationsfeldes. Um aus einer Lösung V die zugehörige Lösung $\overline{V}$ einzuführen, hat man in alle Feldfunktionen $t' = -t$ einzusetzen und außerdem das Vorzeichen der Feldkomponenten $g_{14} g_{24} g_{34}$ und der Energiekomponenten T_{14}, T_{24}, T_{34} umzukehren. Dies kommt wieder auf dasselbe hinaus, wie wenn man auf den ursprünglichen Vorgang V die obige Transformation anwendet. Die Vorzeichenänderung von $g_{14} g_{24} g_{34}$ und sowie $T_{14}\, T_{24}\, T_{34}$ ergibt sich von selbst aus dem Transformationsgesetz für Tensoren.

Diese Erzeugbarkeit des inversen Vorganges durch Transformation der Zeitkoordinate ($t' = -t$) wird man als ein allgemeines Gesetz anzusehen haben, das auch für elektromagnetische Vorgänge Gültigkeit beanspruchen kann. Dort ändert sich bei Inversion des Bewegungsvorganges der Elektronen das Zeichen der magnetischen Komponenten, nicht aber das der elektrischen. Man wird deshalb die elektrische Feldstärke den Komponenten ϕ_{23}, ϕ_{31}, ϕ_{12} zuzuordnen haben, die Komponenten ϕ_{14}, ϕ_{24}, ϕ_{34} den magnetischen. Die bisher übliche umgekehrte Zuordnung muß verlassen werden. Sie wurde bisher offenbar deshalb bevorzugt, weil es bequemer scheint, die Stromdichte durch einen Vektor (Tensor ersten Ranges) statt durch einen antisymmetrischen Tensor dritten Ranges auszudrücken.

In der hier dargestellten Theorie ist also (7) bzw. (17) der Ausdruck des magnetelektrischen Induktionsgesetzes. Dem entspricht es auch, daß auf der rechten Seite dieser Gleichung kein Ausdruck steht, der als elektrische Stromdichte interpretiert werden könnte.

Die nächste Frage ist nun die, ob die hier entwickelte Theorie die Existenz singularitätsfreier zentralsymmetrischer elektrischer Massen begreiflich erscheinen läßt. Dies Problem habe ich zusammen mit Hrn. Dr. J. Grommer in Angriff genommen, der mir bei allen rechnerischen Untersuchungen auf dem Gebiete der allgemeinen Relativitätstheorie in den letzten Jahren treu zur Seite gestanden ist. Ihm und dem »International Education Board«, der mir die dauernde Zusammenarbeit mit Hrn. Grommer ermöglicht hat, sei an dieser Stelle freundlich gedankt.

Die anomale elektrische Doppelbrechung des Natriumdampfes.

Von R. Ladenburg und H. Kopfermann.

(Mitteilung aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für physikalische Chemie und Elektrochemie, Berlin-Dahlem.)

(Vorgelegt von Hrn. Haber.)

Die D-Linien des Natriumdampfes zeigen im elektrischen Felde nicht den symmetrischen von Stark an den Wasserstoff- und wasserstoffähnlichen Linien entdeckten, der Feldstärke proportionalen Effekt; vielmehr werden sie, wie kürzlich an sehr verdünntem Na-Dampf in Absorption gezeigt wurde, erst in sehr starken Feldern von 100—150000 Volt/cm proportional dem Quadrat der Feldstärke ein wenig (um 0.01 – 0.02 Å) nach Rot verschoben[1]. Die Natriumatome besitzen mithin kein elektrisches Moment wie die Wasserstoffatome, deren Energieänderung im elektrischen Feld der Feldstärke proportional ist. In der Tat stellt man sich nach Bohr-Sommerfeld vor, daß die Bahn des Leuchtelektrons im Na-Atom unter der Einwirkung der Rumpfelektronen eine Periheldrehung ausführt; daher ist der mittlere Abstand des Elektrons ($\bar{z}$) von der durch den Kern senkrecht zum Feld gelegten Ebene Null, und damit verschwindet wenigstens in erster Annäherung auch die durch das Feld F erzeugte Energieänderung $Fe\bar{z}$. Die Wirkung des elektrischen Feldes besteht vielmehr nur in einer geringen Deformation der Bahn, so daß $\bar{z}$ einen dem Feld proportionalen Wert erhält; die dadurch entstehende Änderung der Bahnenergie ist mithin proportional F^2 und ebenso die nach Bohr berechnete Frequenzänderung der beim Übergang von einer so veränderten Bahn zur Normalbahn ausgesandten Spektrallinie.

Die genannten Versuche an den D-Linien zeigten weiter, daß die (intensivere) D_2-Linie durch das elektrische Feld polarisiert und daß die π-Komponente, die parallel zum Feld schwingt, merklich stärker verschoben wird als die σ-Komponente. Allerdings konnten die Komponenten wegen der außerordentlich geringen Wellenlängenänderung und der endlichen Breite der Linien nicht vollständig getrennt werden. An der D_1-Linie dagegen zeigte sich kein Unterschied der beiden Polarisationsrichtungen.

[1] R. Ladenburg, Zeitschr. f. Phys. 28, 51, 1924.

Um diesen wichtigen Unterschied der beiden D-Linien sicherzustellen und womöglich das Verhältnis der Frequenzänderungen der π- und σ-Komponenten zu bestimmen, wurde nunmehr die auf Grund der gemachten Beobachtung nach der Dispersionstheorie zu erwartende anomal große elektrische Doppelbrechung in unmittelbarer Nähe der D_2-Linien untersucht. Ein solcher Effekt, der den Begleiterscheinungen des Zeemaneffektes, der anomal großen magnetischen Doppelbrechung und Magnetorotation nahe den D-Linien, ganz analog ist, ist übrigens mehrfach vergeblich gesucht worden[1].

Die erwartete Erscheinung ließ sich in der Tat auf Grund der gesammelten Erfahrungen relativ leicht nachweisen, indem als Lichtquelle die früher beschriebene Na-Lampe benutzt wurde, die besonders helle relativ scharfe D-Linie von etwa 0.1° Å Breite liefert[2]. Die Absorptionslinien des untersuchten Na-Dampfes von $\infty\ 10^{-5}$ mm Druck sind nur 0.02—0.03° Å breit, so daß sie nur die Mitte der auffallenden D-Linie fortnehmen und 2 schmale Spektralbezirke übrig lassen, die symmetrisch zur Mitte liegen und deren Schwerpunkt etwa ± 0.025° Å von der Mitte λ_0 entfernt sind. Dieses übrigbleibende Licht zeigte nun in der Tat eine gut meßbare positive Doppelbrechung: die entstehende Phasendifferenz $\delta = 2\pi \frac{l}{\lambda} (n_\pi - n_\sigma)$ der π- und σ-Komponenten betrug z. B. 6 Bogengrad in einem Feld von 30000 Volt/cm (in dem nach den früheren Messungen auf kleinere Feldstärken extrapoliert die π-Komponente um etwa 0.0009° Å verschoben wird) wenigstens an der D_2-Linie; daraus folgt (mit $l = 2.8$ cm) der nicht unbeträchtliche Wert $n_\pi - n_\sigma = 3.5 \cdot 10^{-7}$. An D_1 ließ sich keine Doppelbrechung nachweisen, die auch nur $^1/_{10}$ jenes Wertes betrug.

Der beobachtete Effekt bestand z. B. darin, daß bei gekreuzten Nicols mit $\lambda/4$ Platte beim Einschalten des Feldes nur die D_2-Linie aufleuchtete, während D_1 völlig unsichtbar blieb. Genaue Messungen des Betrages der Doppelbrechung wurden mit einer Halbschattenmethode ausgeführt. Um hieraus den Unterschied der Verschiebungen $\Delta\lambda^\pi - \Delta\lambda^\sigma$ der beiden Komponenten zu berechnen, mußte die nicht genau bekannte mittlere Wellenlänge des wirksamen Lichtes und der Dampfdruck des Na gesondert bestimmt werden[3].

[1] W. Voigt, Magneto- und Elektrooptik S. 381, 1908, bei Teubner, Leipzig. O. M. Corbino, Nouvo Cim. 6 II, 449, 1913.

[2] Gemessen mittels einer großen Lummer-Gehrke-Interferenzplatte. Mit einer Bogenlampe als Lichtquelle kann man den hier beschriebenen Effekt auch nachweisen, man bekommt bei gekreuzten Nicols, deren Polarisationsebene unter 45° zur Feldrichtung liegt und eingeschalteter $\lambda/4$ Platte eine geringe Aufhellung der D_2-Linie.

[3] Letzterer konnte nicht genau genug berechnet werden, da zur Aufrechterhaltung des elektrischen Feldes das Absorptionsrohr dauernd evakuiert, also in ungesättigtem, strömendem Na-Dampf beobachtet werden mußte.

Dies geschah auf indirekte Weise, indem bei sonst unveränderter Anordnung ein (schwaches) longitudinales Magnetfeld dem absorbierenden Na-Dampf überlagert und die entstehende Drehung der Polarisationsebene mit der gleichen Lichtquelle und in demselben Na-Dampf gemessen wurde. Eine gewisse Schwierigkeit bewirkte der zur Magnetorotation hinzukommende Dichroismus, da die rechts und links zirkular polarisierten Wellen im Bereich des Zeemanschen Dublets (bzw. Quadrublets) verschieden stark absorbiert wurden und da hierdurch ein Gemisch von geradlinigem und elliptischem Licht entstand. Diese Störung wurde behoben, indem zwischen Lichtquelle und untersuchtem Dampf noch ein schwach geheiztes Na-Rohr eingeschaltet wurde, das den mittleren Wellenlängenbezirk der D-Linien der Lichtquelle, in dem Dichroismus entsteht, fortnimmt, so daß nur die auf die Drehung zu untersuchenden äußeren Teile übrigblieben.

Bei genügend schwachem Magnetfeld (10—40 Gauß) ist die Verbreiterung der Absorptionslinien durch den Zeeman-Effekt von ähnlicher Größe wie die (allerdings) einseitige Verbreiterung durch den elektrischen Effekt und ist zugleich klein gegenüber dem Abstand des Schwerpunktes des untersuchten Lichtes vom Mittelpunkt λ_0 der D_2- (bzw. D_1-)Linie; dadurch wird sowohl die elektrische Doppelbrechung als die magnetische Drehung wenigstens angenähert umgekehrt proportional dem Quadrat des Wellenlängenabstandes $\lambda-\lambda_0$. Aus der Dispersionstheorie läßt sich nämlich leicht unter obiger Bedingung ableiten, daß in ausreichender Annäherung die Aufspaltung der ursprünglichen Linie λ_0 in eine π- und eine σ-Komponente die Phasendifferenz

$$\delta = \frac{\rho l \lambda_0^2}{8\pi c^2} \frac{\lambda_0^\pi - \lambda_0^\sigma}{(\lambda-\lambda_0)^2}$$

liefert, wobei $\rho = 4\pi\mathfrak{N}\dfrac{e^2}{m}$ und $\mathfrak{N}$ die der Dampfdichte proportionale »Zahl der Dispersionselektronen« ist.

Anderseits läßt sich die magnetische Drehung im vorliegenden Fall an D_2 durch die Gleichung ausdrücken[1]

$$\chi = \frac{14}{48} \frac{\rho l e \lambda_0^4}{8\pi^2 c^3 m c} \frac{H}{(\lambda-\lambda_0)^2}.$$

Bei Division von δ und χ heben sich also die unbekannten Größen ρ und $\lambda-\lambda_0$ fort, und es bleibt

$$\frac{\delta}{\chi} = \frac{\lambda_0^\pi - \lambda_0^\sigma}{H} \frac{24\pi c}{7\dfrac{e}{mc}\lambda_0^2};$$

zugleich wird durch diese Division die Unsicherheit eliminiert, die dadurch entsteht, daß das auf Doppelbrechung untersuchte Licht nicht eine scharf definierte Wellenlänge besitzt, sondern aus einem Spektralbereich besteht, innerhalb dessen die Doppelbrechung stark variiert; denn derselbe Bereich dient zur Untersuchung der Drehung, und diese variiert innerhalb dieses Bereichs

[1] Vgl. R. Minkowski, Ann. 66, 206, 1921.

angenähert nach demselben Gesetz wie die Doppelbrechung; der wirksame Mittelwert ist also in beiden Fällen der gleiche. Somit ergibt sich schließlich mit $\frac{e}{mc} = 1.76 \cdot 10^7$ C. G. S. und $\lambda_0 = 5.89 \cdot 10^{-5}$ cm

$$\lambda_0^\pi - \lambda_0^\sigma = \frac{\delta}{\chi} H \cdot 1.88 \cdot 10^{-13},$$

d. h. zur Bestimmung der gesuchten Größe $\lambda_0^\pi - \lambda_0^\sigma$ genügt die Messung der Phasendifferenz δ sowie der Drehung χ bei bekannter Feldstärke und unter unveränderten Bedingungen von Dampfdruck und Lichtquelle. Die Messungen bei etwas variierter Dampfdichte und Feldstärke lieferten für $\lambda_0^\pi - \lambda_0^\sigma$ etwa $^9/_{10}$ der gleichzeitigen (aus der genau gemessenen elektrischen Feldstärke berechneten) Verschiebung $\lambda_0^\pi - \lambda_0$, so daß die π-Komponente etwa 10mal so stark wie die σ-Komponente verschoben würde. Dies Ergebnis ist mit den früheren direkten Messungen schwer zu vereinen, da eine so geringe Verschiebung der σ-Komponente kaum hätte wahrgenommen werden können.

Nun kann man aber, wie uns Hr. H. A. Kramers freundlichst mitteilte, aus der Analyse des Zeemaneffektes mittelst des Adiabatenprinzips auf die für den elektrischen Effekt maßgebenden Quantenzahlen schließen und bekommt das Ergebnis (s. weiter unten), daß bei D_2 2 σ-Komponenten entstehen sollten, von denen eine (σ_1) ebenso stark wie die π-Komponente verschoben und etwa $^1/_3$ so intensiv wie die σ_2-Komponente sein sollte. Wenn man unter dieser Voraussetzung n_σ ausrechnet, ergibt sich für $n_\pi - n_\sigma$ und damit für χ das γ-fache des obigen Wertes, wobei γ gleich dem Intensitätsverhältnis der σ_2-Komponente zur Summe der beiden σ-Komponenten, also nach obiger Überlegung $^3/_4$ ist. Dadurch wird $\lambda_0^\pi - \lambda_0^{\sigma_2}$ $^4/_3$mal so groß als bei obiger Rechnung $\lambda_0^\pi - \lambda_0^\sigma$, und wir finden aus den Versuchen, daß dann $\lambda_0^\pi - \lambda_0^{\sigma_2}$ innerhalb der Meßgenauigkeit mit $\lambda_0^\pi - \lambda_0$ übereinstimmt, d. h. die σ_2-Komponente wird gar nicht verschoben bzw. die Verschiebung ist kleiner als etwa $\pm\, ^1/_5$ der π-Komponente.

Damit aber sind die früheren Beobachtungen besser in Einklang zu bringen; infolge der relativ großen Breite der Linien verschmolzen nämlich die stark verschobene σ_1-Komponente mit der viel intensiveren, nahezu unverschobenen σ_2-Komponente zu einer Linie, die eine deutliche, aber geringere Verschiebung als die π-Komponente ergab.

$\pi\sigma$ λ_0 D_1

$\pi\sigma_1$ σ_2 D_2 λ_0

Während also bei D_1 die π- und σ-Komponente gleich stark verschoben werden, entsteht bei D_2 eine ebenso stark wie die π-Komponente verschobene σ_1- und eine nahezu unverschobene σ_2-Komponente (s. vorangehende Figur).

Was die Quantenzahlen im elektrischen Felde und die oben genannten, uns von Hrn. H. A. Kramers freundlichst mitgeteilten Überlegungen betrifft, so geht man von den magnetischen Quantenzahlen aus. Der s-Term spaltet nach Landé magnetisch in zwei Terme $m = \pm {}^1/_2$ auf, der p_1-Term (der der D_1-Linie entspricht) ebenfalls, der p_2-Term dagegen in 4 Terme $m = \pm {}^1/_2$ und $\pm {}^3/_2$. Da der elektrische Effekt ein quadratischer ist, d. h. die Aufspaltung unabhängig vom Vorzeichen der Feldstärke, ist zu erwarten, daß

die Terme mit gleicher Quantenzahl entgegengesetzten Vorzeichens zusammenfallen. Wir gewinnen so folgendes Bild: während p_1 ebenso wie s im elektrischen Felde nur ein (Doppel-) Niveau $\pm {}^1/_2$ liefert, entstehen aus p_2 zwei solcher (Doppel-) Niveaus $\pm {}^3/_2$ und $\pm {}^1/_2$. Da der Übergang $\Delta m = \pm 1$ eine σ-, der Übergang $\Delta m = 0$ eine π-Komponente liefert, entstehen bei D_1 und D_2 je aus dem einen möglichen Übergang $\pm {}^1/_2 \rightarrow \pm {}^1/_2$ sowohl π- als σ-Komponente, während bei D_2 außerdem der Übergang $\pm {}^3/_2 \rightarrow \pm {}^1/_2$ noch eine σ-Komponente (σ_2) liefert. Es ist bemerkenswert, daß sich die gefundenen Ergebnisse mit ganzen Quantenzahlen der Niveaus anscheinend nicht darstellen lassen[1].

Die aus diesem Schema abzuleitenden Erscheinungen bei der Einwirkung eines elektrischen Feldes auf die Resonanzstrahlung des Na, d. h. bei dem direkten elektrischen Effekt, sind in Übereinstimmung mit den von einem von uns früher gemachten Beobachtungen[2], von denen an anderer Stelle näher berichtet werden wird.

Ein Teil der zu den Versuchen verwendeten Apparate verdanken wir dem Japanausschuß und dem Elektrophysikausschuß der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft.

---

[1] Hierauf hat uns ebenfalls Hr. Kramers und unabhängig Hr. W. Thomas aufmerksam gemacht.

[2] Vorläufige Mitteilung über diese Versuche vgl. Ladenburg, Naturwiss. 12, 414, 1924.

Ausgegeben am 4. September.

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1925

XXIII. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 16. Juli.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

1. Hr. Schur sprach über »Einige Bemerkungen zur Determinantentheorie«. (Ersch. später.)

Es wird ein Fall erörtert, in dem die Frage nach der Äquivalenz zweier Scharen von Bilinearformen mit beliebig vielen Veränderlichen allein mit Hilfe von Determinanten zweiten Grades entschieden werden kann.

2. Hr. Haber legte eine Mitteilung von Hrn. H. Zocher und Hrn. K. Coper vor: Über die Erzeugung optischer Aktivität an Silber durch zirkular polarisiertes Licht.

Es wird gezeigt, daß Silberchloridschichten durch zirkular polarisiertes Licht bleibend eine optische Aktivität erlangen. Es ist sowohl verschiedene Brechung verschieden zirkularen Lichtes als zirkulärer Dichroismus oder Cottoneffekt nachweisbar.

Über die Erzeugung optischer Aktivität an Silber durch zirkular polarisiertes Licht.

Von H. Zocher und K. Coper.

(Aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für physikalische Chemie und Elektrochemie, Berlin-Dahlem.)

(Vorgelegt von Hrn. Haber.)

Die Frage nach der Erhaltung der vorhandenen, optisch nachweisbaren, zirkularen Asymmetrie bei den chemischen Vorgängen in unserer Pflanzen- und Tierwelt ist insbesondere seit van't Hoff und le Bel durch mehrere theoretische und experimentelle Untersuchungen befriedigend beantwortet worden. Die Frage nach dem Zustandekommen derselben ist um so brennender. Aus dem Nachweise, daß sowohl bei Vorgängen in der belebten als auch — im Gegensatz zu Pasteurs Hypothese — in der unbelebten Natur Gemische von Rechts- und Linksformen auftreten können, ergaben sich zwei Möglichkeiten für das Entstehen zirkularer Asymmetrie: nämlich erstens zufälliges Vorwiegen einer asymmetrischen Form über ihr Spiegelbild bei der Bildung oder Zerstörung des razemischen Gemisches oder zweitens Betätigung einer einseitig bevorzugenden Ursache. Bei Entstehung zirkular asymmetrischer Gebilde aus symmetrischen oder bei Veränderungen eines Gemenges von gleich viel Rechts- und Linksformen ist eine praktische Erhaltung der Gesamtsymmetrie (d. h. die Entstehung eines vernachlässigbar kleinen Überschusses der einen Form über die andere) unter symmetrischen Bedingungen sehr wahrscheinlich, wenn die Zahl der beteiligten Gebilde sehr groß ist. Die nahezu durchgängige Asymmetrie des organischen Lebens auf der Erde könnte also entweder ihren Ursprung in einem extrem unwahrscheinlichen Zufall haben — was eine sehr unbefriedigende Annahme bedeutete —, oder der maßgebliche Vorgang könnte unter Beteiligung einer kleinen Anzahl von Gebilden verlaufen sein, sich also auch äußerst selten wiederholt haben. Diese Gebilde können Moleküle oder Kristalle (1) sein. Eine Beschränkung des maßgeblichen Vorganges auf eine kleine Zahl von Molekülen ist ganz unglaubhaft. Aber auch die Zurückführung der Asymmetrie des Lebens auf Veränderungen (Entstehung oder Zerstörung) einiger weniger Kristalle mit je nur einer Molekülform ist wegen der dazu notwendigen starken räumlichen und zeitlichen Beschränkung wenig einleuchtend. Viel befriedigender wäre eine Möglichkeit,

bei der der Zufall keine Rolle spielt, sondern eine Bevorzugung der einen Form stattfindet, und zwar innerhalb eines beträchtlichen Bruchteils der Erdoberfläche während eines nicht sehr kleinen Abschnittes der geologischen Perioden. Es fehlt aber bisher jedes experimentelle Beispiel der Erzeugung einer Asymmetrie durch eine einseitig bevorzugende Ursache. Ein solches Beispiel wird im folgenden mitgeteilt.

Bereits Pasteur (2) hatte versucht, durch Einwirkung von außen her (Belichtung im Magnetfelde) an einem symmetrischen System optische Aktivität zu erzeugen. Aber seine Versuche verliefen ergebnislos. Klare Versuchsbedingungen für eine solche Synthese der molekularen Asymmetrie waren dann vor allem durch die Entdeckung des zirkularen Dichroismus durch Cotton (3) (1896) gegeben. Wenn — wie er nachwies — optisch aktive gefärbte Stoffe verschieden zirkulares Licht verschieden stark absorbieren, so ist — wie vor allem Byk (4) ausführte — mit großer Wahrscheinlichkeit zu erwarten, daß bei Belichtung einer lichtempfindlichen razemischen Mischung mit zirkular polarisiertem Lichte die eine Form stärker an der photochemischen Umsetzung beteiligt sein wird als die andere. Trotz dieser günstigen Prognose haben jedoch alle bis heutigen Tages in dieser Richtung angestellten Versuche völlig negative Resultate gehabt (5). Dies ist um so verwunderlicher, als es im Jahre 1919 F. Weigert (6) gelang, in einer ganzen Anzahl lichtempfindlicher Systeme mit linear polarisiertem Lichte lineare Asymmetrie zu erzeugen. Es war daher nicht unwahrscheinlich, daß der Mißerfolg allein durch den Mangel an geeigneten Beispielen begründet war. Es war naheliegend, die geeigneten Untersuchungsobjekte gerade dort zu suchen, wo auch der Weigertsche Effekt besonders stark zu erhalten ist. Tatsächlich gelingt es bei dem lichtempfindlichsten der bekannten Systeme, dem sogenannten Photochloride des Silbers, durch Belichtung mit zirkular polarisiertem Lichte zirkulare optische Asymmetrie zu erzeugen. Diese Asymmetrie besteht sowohl in einer optischen Aktivität, das heißt in einer verschiedenen Brechung verschieden zirkularen Lichtes, die an einer Drehung der Schwingungsrichtung[1] (bzw. Polarisationsebene) erkannt wird, als in einem zirkularen Dichroismus oder Cotton-Effekt, das heißt einer verschiedenen Absorption verschieden zirkularen Lichtes.

Die Versuche bestehen in folgendem: Zunächst werden nach den gebräuchlichen Methoden auf dünnen Glasplatten aus ammoniakalischer Silbertartratlösung möglichst gleichmäßige Spiegel von elementarem Silber erzeugt. Diese zeigen in der Durchsicht eine dunkle blaue bis blaugrüne Farbe. Durch Überleiten von elementarem Chlor wird das Silber in Chlorid übergeführt, das infolge einer geringen Abscheidung von sehr fein verteiltem Silber am Lichte bald eine helle rote bis violett-rote Farbe erhält. Die Zirkularpolarlisation des sehr intensiven Bogenlampenlichtes wurde mit Hilfe eines Nicolschen Prismas und eines Fresnelschen totalreflektierenden Epipeds bewerkstelligt. In den meisten Fällen wurden bisher sogenannte Viertelundulationsplättchen verwendet. Das Fresnelsche Epiped bietet aber den

---

[1] Unter Schwingungsrichtung ist stets die des elektrischen Lichtvektors zu verstehen.

großen Vorteil, daß die Abweichung der Schwingung von einer genau kreisförmigen für andere als die mittlere Lichtwellenlänge nicht so stark ist. Die Einstellung dieser beiden Teile gegeneinander geschieht derart, daß zunächst die Schwingungsrichtung des aus dem Nicol austretenden Lichtes senkrecht oder parallel zur Einfallsebene des Epipeds gestellt wird, was sich genau mit Hilfe eines zweiten Nicols und evtl. eines später zu beschreibenden Halbschattensystems zur Prüfung auf Elliptizität kontrollieren läßt. Dann dreht man Nicol oder Epiped um genau 45°. In dem aus dem Epiped heraustretenden Lichte ist die senkrecht zur Einfallsebene schwingende Komponente um $^1/_4$ Wellenlänge gegenüber der parallel zu ihr schwingenden verzögert. Daraus läßt sich stets sofort angeben, ob das austretende Licht rechts- oder linkszirkulares ist. Läßt man derart zirkular polarisiertes Licht durch eine nach der genannten Vorschrift hergestellte Photochloridplatte etwa eine Stunde lang hindurchtreten, so zeigt die Platte nunmehr bleibend sehr deutlich die beiden erwähnten Arten der zirkularen Asymmetrie. Der Nachweis derselben erfolgt am besten mit Hilfe symmetrischer Halbschattenapparate. Diese sind dadurch ausgezeichnet, daß die Veränderung, die das vom Polarisator kommende Licht auf der einen Hälfte des Gesichtsfeldes erleidet, dem absoluten Betrage nach ebenso groß ist wie in der anderen Gesichtsfeldhälfte, aber entgegengesetztes Vorzeichen hat. Die beiden Arten der Veränderung, die linear polarisiertes Licht in einer optisch homogenen Schicht erleiden kann, sind

I. die Drehung der Schwingungsrichtung und

II. die Überführung in elliptisch polarisiertes Licht.

I. Um erstere nachzuweisen, bedienten wir uns eines Dünnschliffes, bestehend aus einem Rechts- und einem Linksquarz senkrecht zur optischen Achse (angefertigt von der Firma Leiß, Steglitz), die in einer sehr scharfen Trennungslinie zusammenstoßen. Dreht das untersuchte Objekt gleichmäßig im ganzen Gesichtsfelde, so bewirkt der Dünnschliff eine Verstärkung der Drehung in der einen Hälfte und eine Schwächung in der andern. Nun kann bekanntlich eine Drehung nicht nur durch eine optische Aktivität (besser zirkulare Doppelbrechung), sondern auch durch einen linearen Dichroismus erfolgen. Während aber im ersteren Falle die Drehung unabhängig von der Lage des Präparates ist, wechselt sie im letzteren Falle ihr Vorzeichen bei einer Drehung des Präparates um 90°. Daran sind also die beiden Fälle leicht zu unterscheiden.

II. Der Halbschattenapparat zum Nachweise einer Elliptizität ähnelte sehr dem von Leiser[(7)] beschriebenen. Während dieser aus zwei senkrecht zueinander stehenden gepreßten Glasstreifen besteht, hatten wir uns zunächst von Glimmer ein möglichst dünnes Spaltstück (blasse Interferenzfarben im natürlichen reflektierten Lichte zeigend) hergestellt und dieses in einer solchen Orientierung auf einen Glasstreifen geklebt, daß seine Doppelbrechung der des in seiner Längsrichtung gepreßten Glasstreifens entgegenwirkte. Dann wurde die Pressung derart reguliert, daß die Helligkeit des freien und des vom Glimmer bedeckten Glases zwischen gekreuzten Nicols genau gleich war.

Bringt man außer diesem Halbschattensystem zwischen gekreuzte Nicols noch ein Präparat, das im ganzen Gesichtsfelde die gleiche Elliptizität linearen Lichtes bewirkt, so tritt in der einen Hälfte eine Verstärkung, in der anderen eine Schwächung auf. Eine solche Elliptizität kann nun sowohl durch eine lineare Doppelbrechung (wegen der Verzögerung der stärker gebrochenen linearen Komponente gegenüber der schwächer gebrochenen) als auch durch einen zirkularen Dichroismus (wegen der höheren Durchlässigkeit für die weniger absorbierte zirkulare Komponente) hervorgerufen werden. Während aber letztere Wirkung von der Orientierung des Präparates gegen die Schwingungsrichtung des vom Polarisator kommenden Lichtes unabhängig ist, wechselt erstere bei einer Drehung des Präparates um 90° ihr Vorzeichen. So hat man also auch einen einfachen untrüglichen Nachweis für den zirkularen Dichroismus.

Bringt man zwischen gekreuzte Nicols, zwischen denen der Drehungshalbschatten gleiche Gesichtsfeldhelligkeit zeigt, außerdem eine — sagen wir mit rechtszirkularem rotem Lichte — belichtete Photochloridschicht, so erscheint der Linksquarz hellrot, der Rechtsquarz dunkelblaugrau. Es findet also eine Linksdrehung statt (Rechtslicht wird stärker gebrochen). Das Auftreten der Farben beweist eine starke anomale Dispersion der Drehung. Rot wird am stärksten gedreht Der Betrag der Drehung für Rot war nach einstündiger Belichtung in einer Platte, die im reflektierten Licht das Blau 2. Ordnung zeigte (entsprechend einer Dicke von etwa 0.15 μ) von der Größenordnung von $^1/_4$°. Die Wirkung bleibt bei einer Drehung der Schicht um 90° die gleiche. Setzt man an Stelle des Drehungs- den Elliptizitätshalbschattenapparat, so erscheint die Hälfte mit rechtselliptischem Lichte dunkelrot, die andere weißlich. Eine Drehung der Schicht um 90° bewirkt keine Veränderung. Das bedeutet, daß für Rot die Platte lineares Licht in rechtselliptisches umwandelt (rechtszirkulares Licht besser hindurchläßt, linkszirkulares stärker absorbiert). Daß aber die Absorption für diejenige Lichtart nach Wellenlänge und Schwingungsform gerade abnimmt, mit der belichtet wurde, ist eben das, was man zu erwarten hat, und was sich bei allen Ausbleichreaktionen bisher zeigte.

Bei der Untersuchung im monochromatischen Lichte (durch Lichtfilter) stellte sich nun die bemerkenswerte Tatsache heraus, daß für die Vorzeichen der zirkularen optischen Asymmetrie die gleichen Regeln gelten wie für die lineare optische Anisotropie in Silberschichten, wie sie durch Kathodenzerstäubung, durch Abscheidung in feinfasrigen Systemen (z. B. Pflanzenfasern), durch den Weigertschen Effekt und auch nach bisher unveröffentlichten Versuchen des Verfassers durch Polieren von Silberspiegeln erhalten werden: 1. Der Dichroismus wechselt sein Vorzeichen in der Mitte des Spektrums. Im Gelb bis Blau erscheint die Gesichtsfeldhälfte mit linkselliptischem Licht heller. 2. Im größten Teile des Spektrums ist die im Rot stärker absorbierte Schwingungsform die schwächer gebrochene. Die Schichten mit dem Umkehrpunkte des Cotton-Effektes im Orange zeigen im ganzen Spektrum Linksdrehung.

Läßt man durch eine solche Schicht bei der Untersuchung das Licht einmal in der gleichen Richtung hindurchtreten wie bei der Belichtung und einmal

entgegengesetzt, so ist die Wirkung beide Male genau die gleiche. Die Platte verhält sich durchaus wie ein optisch aktiver Kristall oder eine optisch aktive Lösung, nicht wie ein isotroper Körper im Magnetfeld. Das bedeutet aber, daß in ihr nicht etwa stets ein und dieselbe Umlaufsrichtung des Lichtes bevorzugt wird, sondern beim Durchtritt des Lichtes in der einen Richtung der eine Umlaufssinn, bei der entgegengesetzten Fortpflanzungsrichtung der andere. Es ist also stets die gleiche Lichtart bevorzugt. Es haben die das Licht beeinflussenden Teilchen die Symmetrie einer Rechts- oder Linksschraube.

Was für Teilchen mögen dies aber sein? Welcher Vorgang findet bei der Belichtung mit zirkularem Lichte statt? Das Photochlorid besteht aus Silberchlorid, das eine kleine Menge elementares Silber enthält. Im wesentlichen bedingt letzteres die Färbung und — wie die Abhängigkeit von der Wellenlänge zeigt — auch die zirkulare Asymmetrie. In der noch nicht zirkular belichteten, im natürlichen Lichte rot angelaufenen Platte wird die Verteilung des metallischen Silbers den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit gehorchen, und es werden unter den verschiedenen möglichen Lagen, die die Ag-Atome gegeneinander haben, auch solche Anordnungen vorhanden sein, die Rechts- bzw. Linksschrauben darstellen. Es ist durchaus plausibel, daß in derartigen Gebilden die Absorption für die beiden verschiedenen Umlaufsrichtungen des zirkular polarisierten Lichtes verschieden ist; ist es doch bekannt, daß lineare Anordnungen von Silberatomen (z. B. längliche Kolloidteilchen) verschieden linear schwingendes Licht verschieden absorbieren. Belichtet man dieses System, das Rechtsanordnungen in gleicher Zahl wie Linksanordnungen enthält, mit Rechtslicht, so wird dieses bevorzugt von den einen — sagen wir von den Rechtsformen — absorbiert. Diese werden vorzugsweise photochemische Veränderungen erleiden; die Linksformen werden in viel geringerem Maße angegriffen werden. Es mag sein, daß (wie Weigert es für den linearen Effekt angibt) die Menge des abgeschiedenen Silbers dabei konstant bleibt, die Veränderung etwa nur darin besteht, daß bei der Reaktion je ein Silberatom in den Ionenzustand und je ein anderes Silberion in den elementaren Zustand übergeführt wird. Es würde dann nur ein Elektron von einem der Atome des absorbierenden Komplexes zu einem Silberion wandern, dadurch wiederum eine Atomfiguration bildend, die zirkular symmetrisch oder mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine Rechts- oder Linksform sein kann. So wird auf alle Fälle eine zirkulare Asymmetrie zustande kommen. Um eine Aktivität, wie sie an den bekannten Reuschschen Glimmerkombinationen oder an tordierten doppelbrechenden Systemen zu beobachten ist, handelt es sich jedenfalls nicht.

Über die Hervorbringung desselben Effektes an Farbstoffen, die auch nach den gebräuchlichen Methoden in enantiomorphe Modifikationen gespalten werden können, sind Versuche im Gange.

Wenn es, wie vorstehend geschildert, gelungen ist, die zirkulare Asymmetrie molekularer Komplexe[1] zu erzeugen, so ist damit ein Weg gezeigt, auf dem die chemische Asymmetrie unserer Flora und Fauna entstanden sein kann,

---

[1] Die Gleichartigkeit dieser Konfigurationen von Silberatomen mit unseren gewöhnlichen zirkular-asymmetrischen Molekeln bleibe dahingestellt.

wenn die gleichen Bedingungen auch in der Natur vorkommen. Byk (4) hat nun gezeigt, daß die Möglichkeit besteht, daß ein Überschuß der einen zirkularen Form des Lichtes auf der Erde vorhanden ist. Dieser kommt zustande durch die asymmetrische Beeinflussung des linear polarisierten, durch Reflexion (etwa an Wasseroberflächen) elliptisch gewordenen Himmelslichtes durch das Magnetfeld der Erde. Eine zweite Möglichkeit ist noch hinzuzufügen. Die anomale Dispersion der Magnetorotation, wie sie z. B. an flüssigem Sauerstoff und an den Lösungen der Salze seltener Erden gefunden wurde, zeigt im Gegensatz zum normalen Faraday-Effekt an den Absorptionsstellen den gleichen Verlauf wie der Brechungsindex. Dies läßt sich aber ohne weiteres durch die Annahme von Unterschieden in der Stärke der Absorption verschieden zirkularen Lichtes erklären. Diese Unterschiede rühren nach der Meinung von R. Ladenburg von der Langevinschen Einstellung paramagnetischer Atome her, deren Elektronen nur Licht von dem gleichen Umlaufsinne absorbieren können. Die Bedingungen zum Auftreten einer solchen Wirkung sind aber auch auf der Erde gegeben.

Hiermit ist nun wohl eine Möglichkeit für das Zustandekommen der zirkularen Asymmetrie des organischen Lebens auf der Erde aufgezeigt. Ob freilich die äußerst schwache, kaum je nachweisbare Asymmetrie des Himmels- oder Sonnenlichtes imstande gewesen sein kann, durch eine dem gefundenen Effekt analoge Wirkung die starke Asymmetrie im chemischen Bau der Organismen hervorzurufen, dürfte noch sehr fraglich erscheinen.

Literaturverzeichnis.

(1) Die Bedeutung dieser Tatsache bzw. ihrer Wirkungen hat A. Byk, Naturwiss. **13**, 17 (1925) erörtert.

(2) Rev. scientif. (3) **7**, 3 (1884).

(3) Compt. rend. **120**, 989, 1044 (1895); Ann. chim. phys. (7) **8**, 347 (1896).

(4) Zeitschr. f. phys. Chem. **49**, 641 (1904).

(5) Der letzte und eingehendste Versuch ist der von G. Bredig, Zeitschr. f. angew. Chem. **36**, 456 (1923) berichtete. Ausführlichere Literaturangaben s. P. Walden, Naturwiss. **13**, 380 (1925).

(6) Siehe z. B. Ann. d. Phys. **63**, 681 (1920).

(7) Abhandl. d. Dtsch. Bunsenges. Nr. 412 (1910).

Ausgegeben am 4. September.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1925

XXIV. Gesamtsitzung. 23. Juli.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

1. Hr. Planck überreichte eine Abhandlung von Hrn. Prof. Dr. E. Schrödinger (Zürich) Bemerkungen über die statistische Entropie-Definition beim idealen Gas.

Es wird gezeigt, daß man auf eine kürzlich von Einstein vertretene Form der Gasstatistik geführt wird, wenn man den Planckschen Gedanken, daß der Rollentausch der Moleküle unwesentlich sei, auf jene Form der Statistik anwendet, die das Gas aus unabhängigen Einzelmolekülen bestehend annimmt.

2. Sodann sprach Hr. Planck »Über die statistische Entropie-Definition«.

Im Anschluß an frühere Arbeiten und mit Bezugnahme auf die vorstehende Notiz von Hrn. E. Schrödinger wird die Definition der Entropie eines beliebigen physikalischen Gebildes in eine Form gebracht, die sowohl irgendwelche Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen als auch die Voraussetzung gleichartiger unabhängiger Einzelmoleküle entbehrlich macht. Bei der Anwendung auf einige spezielle Fälle wird dann gezeigt, inwiefern bei einem Gase die Moleküle nicht als unabhängig voneinander behandelt werden dürfen.

3. Hr. Roethe legte vor eine Mitteilung von Prof. Dr. Wilhelm Stieda in Leipzig: 'Johann Bernoulli (III) und seine Beziehungen zum preußischen Herrscherhause.'

Der durch Friedrich den Großen schon im Alter von 19 Jahren nach Berlin als Akademiker berufene Mathematiker Johann Bernoulli, zuletzt Direktor der mathematischen Klasse, konnte mit dem bescheidenen akademischen Gehalt seine wachsende Familie nicht erhalten. So hat er den König mehrfach um Aufbesserung gebeten, mit geringem Erfolg, aber ihm auch sonst über seine Tätigkeit berichtet. Seine Geldnot nötigte ihn zum Bilderhandel und zur Anfertigung populärer Reisebeschreibungen und anderer Schriftstellerei. Auf alle diese Verhältnisse beziehen sich 64 meist kurze Briefe des großen Königs (39), seiner Nachfolger und andrer Glieder der königlichen Familie, Briefe, die sich in Gotha befinden und kulturgeschichtlichen Wert besitzen.

4. Hr. von Harnack legte eine Abhandlung vor des Hrn. Dr. Carl Schmidt, wissenschaftlichen Beamten der Akademie: Der Kolophon des Ms. orient. 7594 des Britischen Museums (eine Untersuchung zur Elias-Apokalypse).

Es wird der Nachweis geführt, daß der im Ms. orient. 7594 des British Museum nachträglich hinzugefügte Kolophon um 350 n. Chr. den Anfang der Elias-Apokalypse darbietet, der in achmimischer Version von Steindorff veröffentlicht ist. Im Anschluß daran wird das nur fragmentarisch erhaltene achmimische Papyrusbuch nach seiner äußeren Zusammensetzung unter

sucht und der Umfang auf Grund der Quaternionenbildung näher bestimmt. Dabei wird die Identität der koptischen Elias-Apokalypse mit der von den christlichen Autoren zitierten in Frage gestellt.

5. Hr. Schulze legte die 8. Lieferung von »Tobler-Lommatzsch, Altfranzösisches Wörterbuch« (Berlin 1925) vor.

6. Endlich wurde vorgelegt: Monumenta Germaniae historica, Epistolarum tomi VI partis alterius fasciculus II, Karolini aevi IV (Berolini 1925).

Die Akademie hat den ordentlichen Professor an der Universität Bonn Hrn. Dr. Rudolf Thurneysen zum korrespondierenden Mitglied ihrer philosophisch-historischen Klasse gewählt.

Bemerkungen über die statistische Entropiedefinition beim idealen Gas.

Von Prof. Dr. Erwin Schrödinger
in Zürich.

(Vorgelegt von Hrn. Planck.)

Es liege ein System von einer sehr großen Anzahl N von gleichbeschaffenen Gasmolekülen vor. Jedes davon könne eine diskrete Menge von Energiestufen (Quantenzuständen) annehmen, die wir nach aufsteigender Energie mit 1, 2, 3, ... numerieren. Die Definition dieser Menge kann mit der Zahl N und mit dem Gesamtvolum, das den Molekülen zur Verfügung steht, variieren. Die Gesamtenergie des Molekülsystems sei E. Für die Entropie S dieses Systems bei der Energie E liegt eine Anzahl verschiedener statistischer Definitionen vor, die wir kritisch betrachten wollen.

1. Erste Entropiedefinition[1]. Als bestimmte Verteilung wird bezeichnet ein System von Zahlen

$$N_1, N_2, N_3 \cdots N_i \cdots; \sum N_i = N, \tag{1}$$

welches angibt, wieviele Moleküle augenblicklich auf jeder Stufe sich befinden. Als thermodynamische Wahrscheinlichkeit (th. W.) dieser Verteilung wird bezeichnet ihre Permutationszahl

$$W = \frac{N!}{N_1!\, N_2! \cdots N_i! \cdots}. \tag{2}$$

Es wird das Maximum von W bei konstantem E aufgesucht und als Entropie definiert:

$$S_{\mathrm{I}} = k \ln W_{\max}. \tag{I}$$

Es zeigt sich, daß diese Definition der Entropie auf den Gaszustand wegen der in Wirklichkeit vorliegenden Größe der Energiestufen und Molekülzahlen prinzipiell nicht anwendbar ist, außer bei ganz extrem tiefer Temperatur. Sobald nämlich die Zahl der frequentierten Energiestufen größer ist als die der Moleküle — und sie ist bei nicht ganz extrem tiefer Temperatur ganz außerordentlich viel größer[2] — wird

$$W_{\max} = N!$$

[1] S. z. B. M. Planck, Theorie der Wärmestrahlung, 4. Aufl., § 123f.
[2] S. z. B. D. Enskog, Ann. d. Phys. (4) **72**, 331, 1923.

und S_{I} würde vom Energieinhalt E unabhängig werden, was sinnlos ist. Erst wenn umgekehrt die Zahl der frequentierten Energiestufen klein geworden ist gegen N, wird (I) anwendbar und vernünftig. Wir merken an, daß alsdann für den Zustand kleinster Energie, d. h. für $T = 0$

$$\lim S_{\mathrm{I}} = 0, \tag{3}$$

weil der Nenner in (I) $N!$ wird, wenn alle Moleküle auf der untersten Stufe sind. — Auf den Umstand, der es ermöglicht hat, gleichwohl scheinbar die Definition (I) zu verwenden, kommen wir unter Nr. 3 zu sprechen.

2. Zweite Entropiedefinition. Als th. W. des Gases (nicht einer bestimmten Verteilung) bei der Energie E wird bezeichnet die Summe der Permutationszahlen (2) für alle möglichen Verteilungen (1). Als Entropie wird definiert

$$S_{\mathrm{II}} = k \ln \sum W. \tag{II}$$

Es ist hinreichend bekannt, daß in dem Falle großer Molekülzahlen N_i, dem einzigen, auf den (I) anwendbar ist, die Definition (II) mit (I) sehr angenähert zusammenfällt, weil die Summe aller übrigen Permutationszahlen die maximale nur um einen Faktor übertrifft, welcher zwar sehr groß, aber gegen die maximale Permutationszahl immer noch so klein ist, daß sein Logarithmus gegen den ihren gänzlich vernachlässigt werden kann. Die Definition (II) kann also angesehen werden als die sinngemäße Fortsetzung von (I) in das Gebiet höherer Temperatur, jedenfalls ist auch

$$\lim S_{\mathrm{II}} = \lim S_{\mathrm{I}} = 0 \tag{4}$$

für $T = 0$.

3. Daß in der Literatur gleichwohl öfters ungestraft nach (I) gerechnet wird, erklärt sich daraus, daß man durch formale (mathematisch fehlerhafte) Anwendung der Stirlingschen Formel auch im Falle kleiner N_i auf das Faktoriellenprodukt im Nenner des Ausdruckes (2) bei Berechnung seines Maximums — daß man, sage ich, durch dieses Vorgehen automatisch von (I) auf (II) übergeht. Der Beweis hierfür läßt sich erbringen[1], indem man immer eine Anzahl aufeinanderfolgender Energiestufen zu einer »Stufengruppe« zusammenfaßt und zwar so, daß zwar die Energiedifferenzen innerhalb einer solchen Gruppe noch vernachlässigbar klein, aber gleichwohl die Zahlen der Moleküle in den Gruppen im allgemeinen groß sind. Es zeigt sich dann, daß es gestattet ist, in (II) die Summe aller W durch die Summe derjenigen W zu approximieren, die zu einer bestimmten Verteilung der Moleküle auf die Stufengruppen gehören, und zwar zu derjenigen, für welche

$$\frac{N!}{N_1'!\, N_2'! \cdots N_i'! \cdots}$$

ein Maximum ist, wobei die N_i' die Anzahlen der Moleküle in den einzelnen Stufengruppen sind. Man überzeugt sich leicht, daß man auf diese Weise für S_{II} ein Resultat erhält, mit dem — sozusagen zufällig — dasjenige genau

[1] Er ist implizite enthalten in Überlegungen von D. Enskog l. c. S. 329f.

übereinstimmt, das durch den oben angedeuteten fehlerhaften Rechenvorgang für S_{I} erhalten werden kann.

4. Dritte Definition der Entropie[1]. Man denkt sich das vorgelegte Gas in einer sehr großen Zahl von n Exemplaren, mit der Gesamtenergie nE, definiert die Entropie dieser Gasgesamtheit ganz analog wie nach (1) diejenige der Molekülgesamtheit und definiert als Entropie des Einzelgases den $n$ten Teil davon. Dies möge S_{III} heißen. Da die bloß gedachte Zahl der Gasexemplare beliebig steigerungsfähig ist, können Schwierigkeiten ähnlicher Art wie unter Nr. 1 nicht auftreten. Es stellt sich heraus, daß unter allen Umständen

$$S_{\mathrm{III}} = S_{\mathrm{II}}. \tag{III}$$

Offenbar würde es auch zu nichts anderem führen, wenn man auf die Gasgesamtheit anstatt der ersten die zweite Definition anwenden wollte.

5. Für das Folgende dürfen wir von der Definition (II) ausgehen, da, wie wir sahen, die übrigen Rechnungsweisen, soweit sie überhaupt sinnvoll sind, mit ihr koinzidieren. Einige Forscher[2] sind nun mit Max Planck der Ansicht, daß von S_{II} noch $kln(N!)$ subtrahiert werden muß, um die sogenannte absolute Entropie zu erhalten. Ein Teil von ihnen hält diese Subtraktion nicht für statistisch begründbar, sondern lediglich aus Zweckmäßigkeitsgründen für geboten[3], und zwar weil ohne sie

A. die statistische Entropie nicht additiv wird, z. B. für 2 Mol Gas nicht doppelt so groß ausfällt wie für 1 Mol;

B. die Entropie des bei tiefer Temperatur gesättigten Dampfes — so tief, daß die spezifische Wärme des Kondensats zu vernachlässigen ist — dennoch nicht gleich der durch T dividierten Verdampfungswärme wird, sondern eben um $kln(N!)$ größer.

Ein anderer Teil dieser Forscher und insbesondere Planck selbst begründet diese Subtraktion statistisch[4] damit, daß bei der Abzählung der Permutationen die Moleküle zu stark individualisiert worden seien, der Rollentausch gleichbeschaffener Moleküle habe bei dieser Abzählung als unwesentlich zu gelten. Aus diesem Grunde sei die th. W. noch durch $N!$ zu dividieren.

Ich möchte hier nicht — wie an anderer Stelle[5] — gegen diese Auffassung streiten, sondern will sie als richtig ansehen. Ich möchte zu zeigen versuchen, daß wenn man sie annimmt, man beinahe zwangläufig zu derjenigen Entropiedefinition für das ideale Gas geführt wird, welche kürzlich von A. Einstein[6] und bald darauf, anscheinend unabhängig, von

---

[1] »Theorie der Wärmestrahlung«, 4. Aufl. § 180ff.

[2] Das Gegenteil vertreten vor allem P. Ehrenfest und V. Trkal, Ann. d. Phys. **65**, 609, 1921.

[3] L. Nordheim, Zeitschr. f. Phys. **27**, 65, 1924.

[4] Vgl. bes. M. Planck, Ann. d. Phys. **66**, 365, 1921. Einen Ausgleich versucht K. F. Herzfeld ibid. **69**, 54, 1922; auch D. Enskog l. c.

[5] E. Schrödinger, Physik. Zeitschr. **25**, 41, 1924.

[6] A. Einstein: Sitzungsber. d. Berl. Akad. d. Wiss., 10. Juli 1924, 8. und 29. Jan. 1925. — Siehe auch Bose, Zeitschr. f. Phys. **26**, 178, 1924.

A. Schidlof[1] einzuführen versucht wurde, auf Grund einer im ersten Augenblick höchst eigenartig anmutenden Art von Statistik.

Überlegen wir nun. Der Grund für die Division durch $N!$ soll doch sein, daß wir in der Permutationszahl (2), die in (II) eingeht, zwei Zustände, die lediglich durch Rollentausch von Molekülen auseinander hervorgehen, bisher als verschieden gezählt haben, nun aber alle solche Zustände nur als einen einzigen zählen wollen. Wird dem nun wirklich dadurch Rechnung getragen, daß wir einfach durch $N!$ dividieren? Ich glaube doch nicht. Damit zwei Moleküle ihre Rollen tauschen können, müssen sie doch wirklich verschiedene Rollen haben; andernfalls haben wir solche Zustände bei der früheren Abzählung ja gar nicht als verschieden gezählt, daher brauchen und dürfen wir eine Vielfachheit, die für uns gar niemals bestanden hat, auch jetzt nicht »wegkorrigieren«!

Vielmehr erkennt man, daß die Vielfachheit, mit der ein bestimmter »Zustand im neuen Sinn« bei unserer früheren Abzählung aufgetreten ist, gerade durch die Zahl W selbst gegeben ist. Es ist also in (II) jedes W durch sich selbst zu dividieren, d. h. durch die Einheit zu ersetzen. Als Argument des ln tritt also jetzt auf die Gesamtzahl aller Verteilungen (im Sinne von Nr. 1) ohne Rücksicht auf ihre Permutabilität. Wir wollen das die vierte Entropiedefinition nennen.

$$S_{IV} = kln \text{ (Anzahl aller Verteilungen bei der Gesamtenergie } E). \quad \text{(IV)}$$

Dies ist nun, wie wir unten noch etwas näher beleuchten werden, genau die Entropiedefinition, die Einstein und Schidlof vorschlagen. Für nicht allzu tiefe Temperatur stimmt sie genau mit dem überein, was Planck durch seine Division durch $N!$ erreicht (d. h. mit $S_{II} - kln N!$). Woher kommt das? Nun sehr einfach daher, daß bei nicht allzu tiefer Temperatur unsere oben vorgenommene »Berichtigung« der Planckschen Statistik vollkommen überflüssig wird, weil da für einen ausreichend großen Bruchteil der Verteilungen wirklich alle Moleküle auf verschiedenen Energiestufen (Quantenzuständen) sich befinden, mithin die N_i alle 0 oder 1 werden und $W = N!$. Der Übergang von (II) zu (IV) ist also wirklich gar nichts anderes als die sinngemäße Fortsetzung der für hohe Temperatur als statistisch begründet angenommenen Planckschen Division in das Gebiet von Temperaturen, die so tief sind, daß die gelegentliche Mehrfachbesetzung einzelner Quantenzustände nicht mehr ganz vernachlässigt werden darf.

Daß nun die Definition (IV) wirklich übereinstimmt mit der von Einstein in seinen letzten Arbeiten vorgeschlagenen, aus der dieser Forscher eine so interessante Theorie der Entartung entwickelt hat, ist leicht zu zeigen. Man muß sich nur klar machen, daß es in (IV) wieder nicht darauf ankommt, wirklich alle Verteilungen abzuzählen, sondern daß es hinreicht sich auf diejenigen zu beschränken, welche alle derselben »wahrscheinlichsten« Verteilung

[1] A. Schidlof, Arch. de Genève (5) **6**, 281, 381, 1924. Vorgetragen am 23. Oktober 1924 in der Genfer physikalischen und naturforschenden Geselischaft. So weitgehende Folgerungen für die Gasentartung wie Einstein zieht Schidlof nicht.

auf passend gewählte Stufengruppen[1] entspricht (siehe den in Nr. 3 skizzierten Vorgang). Die Zahl dieser Stufenverteilungen ist es, welche Einsteins Entropiedefinition als th. W. unmittelbar zugrunde liegt[2]. — Die Quantenerscheinungen am Gas (Entartung) werden nach (IV) schon bei sehr viel höherer Temperatur merklich als nach (II), nämlich schon dann, wenn die Zahl der frequentierten Energiestufen nicht mehr sehr groß ist gegen N; nach (II) hingegen erst dann, wenn sie nicht mehr sehr groß ist gegen 1.

Daß man an Plancks Division durch $N!$ nicht bis zu beliebig tiefer Temperatur festhalten darf, sondern sie dort allmählich durch etwas anderes zu ersetzen hat, geht auch aus folgender, eigentlich sehr selbstverständlichen Tatsache hervor, die gleichwohl lange Zeit unbeachtet geblieben war[3]. Da nach (4) S_{II} für lim $T = 0$ gegen 0 geht, so geht selbstverständlich $S_{II} - k \ln N!$ nicht gegen 0, sondern gegen $-k \ln N!$. Auf der anderen Seite aber ist klar, daß der Logarithmus einer Permutationszahl oder einer Summe von solchen, d. h. also jedenfalls einer natürlichen Zahl, bei richtiger Rechnung unmöglich negativ ausfallen kann, welche Verabredung immer man bezüglich des Verschieden- oder Nichtverschiedenzählens gewisser Permutationen auch treffen mag.

6. Auf diesem Wege wird man also beinahe zwangläufig auf die Einsteinsche Form der Statistik geführt, wenn man für die Plancksche »Division durch $N!$« eine statistische Begründung geben will. — Man kann nun allerdings auch noch einen ganz anderen Weg einschlagen. Während alle bisherigen Überlegungen immer von der Voraussetzung ausgingen, daß jedem einzelnen Molekül eine Reihe ausgezeichneter Zustände und Energiewerte quantentheoretisch vorgeschrieben sind (vgl. die Einleitung vorliegender Note) und daß jeder mögliche Quantenzustand des Gaskörpers einfach dadurch erhalten wird, daß man jedes einzelne Molekül, unabhängig von den übrigen, auf einen von diesen Molekülquantenzuständen versetzt; kann man andrerseits auch der Ansicht sein, daß eine so weitgehende Unabhängigkeit der Gasmoleküle voneinander (die man freilich von der klassischen Gastheorie her als das Charakteristische des idealen Gaszustandes anzusehen gewohnt war) quantentheoretisch nicht besteht, sondern daß nicht den einzelnen Molekülen, vielmehr dem Gaskörper als Ganzem bestimmte Quantenzustände mit ganz bestimmten Energieniveaus zuzuschreiben sind. Diesen Standpunkt vertritt Planck selbst in zwei wichtigen Arbeiten[4]. Man darf alsdann mit Fug und Recht annehmen, daß jeder dieser Gasquantenzustände die »Symmetriezahl« $N!$ besitzt[5], und es steht nichts im Wege, zu verabreden, daß man die $N!$

---

[1] D. h. derjenigen Stufengruppenverteilung, welche durch die größte Zahl von Stufenverteilungen realisiert wird; »Verteilung« bedeutet dabei stets, im Sinne von Nr. 1 der vorliegenden Note, »bestimmtes N_i-System« bzw. »bestimmtes N_i'-System«.

[2] Man vgl. am besten die zweite Abhandlung Einsteins, § 7.

[3] Aufgedeckt von Einstein an der soeben zitierten Stelle.

[4] Diese Berichte, 8. Juni 1916 und 5. Februar 1925.

[5] Ganz sicher scheint mir das ohne genaue Kenntnis der Quantenzustände auch hier nicht. Man denke z. B. an die Rotationsquantenzustände einer zweiatomigen Molekel mit gleichen Atomen. Hier hat es keinen Sinn, zu sagen, daß man die beiden Atome die Rollen tauschen läßt, denn ihre Rollen sind ununterscheidbar, man gelangt, auch bei numerierten

lediglich durch Rollentausch sämtlicher Moleküle auseinander hervorgehenden Zustände nur als einen einzigen zählen will. Wir wollen an dieser Verabredung festhalten.

Diese Änderung der Auffassung greift nun sehr viel tiefer ein, als man denkt und ist nichts weniger als eine leere Formsache, wofür man sie im ersten Augenblick halten könnte. Natürlich besteht das Wesentliche nicht in der eben genannten Verabredung, vielmehr in folgendem: Betrachten wir die Energielinie des Gases und denken uns auf ihr die erlaubten Energiewerte durch Punkte markiert, dann fallen nach der neuen Auffassung immer, auch bei niedrigem Energieinhalt, genau $N!$ Energiestufen des Gases exakt zusammen; nach der früheren Auffassung dagegen nur die durch (2) gegebene Anzahl. Da nun die Gesamtzahl der markierten Punkte durch das klassische Phasenvolum des Gases unabänderlich gegeben ist, so nimmt die neue Auffassung implizite eine außerordentlich viel weniger dichte Lagerung der zahlenmäßig verschiedenen Gasenergiestufen an, die Stufenhöhe wird also sehr viel größer, und so ist es zu erklären, daß nach ihr die Quantenerscheinungen am Gas (Entartung) schon bei viel höheren Temperaturen auftreten, als wenn man die einzelnen Moleküle quantelt.

Die oben unter 5A und B bezeichneten Schwierigkeiten werden durch diese neue Auffassung in der Tat beseitigt, und man muß ihr als einer allgemeinen Hypothese über das quantentheoretische Verhalten des Gases volle Berechtigung zugestehen. Gegen die spezielle Durchführung hege ich jedoch gewisse Bedenken, welche ich hier darlegen möchte (man vergleiche zu dem Folgenden die zweite der zitierten Abhandlungen Plancks S. 50). Es wird nämlich weiterhin doch wieder die Annahme gemacht, nicht nur daß die Gesamtenergie des Gases ebenso wie in der klassischen Gastheorie additiv aus den kinetischen Energien der einzelnen Moleküle sich zusammensetze, sondern auch, daß die Quantenzustände des Gases von solcher Art seien, daß in ihnen die Einzelenergie jedes Moleküls nur gewisse diskrete Werte $u^{(1)} u^{(2)} u^{(3)} \cdots u^{(r)} \cdots\cdots$ annehmen könne. Schon diese Annahme scheint mir bei der veränderten Grundauffassung in keiner Weise zwangläufig. Natürlich müssen jetzt, gerade umgekehrt wie früher, die Energiestufen $u^{(r)}$ der Gasmoleküle aus der Energiestufenverteilung des Gaskörpers abgeleitet werden. Hierzu wird verwendet die Forderung, daß die Anzahl aller verschiedenen (im Sinne obiger Verabredung verschiedenen!) Gaszustände, in denen kein Einzelmolekül den Energiewert $u^{(r)}$ überschreitet, gleich sein müsse

$$r^N. \tag{5}$$

Die Abzählung wird also so vorgenommen: das erste Molekül kann entweder die Energie $u^{(1)}$ oder die Energie $u^{(2)} \cdots$ oder die Energie $u^{(r)}$ haben; das zweite Molekül kann entweder die Energie $u^{(1)}$ oder $\cdots$ oder die Energie $u^{(r)}$

Atomen, nur zu einer anderen Phase des genau identischen Zustandes. Oder: ein gleichseitiges Atomdreieck rotiere um seine dreizählige Achse. Hier sind nur zwei Anordnungen bei numerierten Atomen unterscheidbar, nicht sechs. Denn nur dies ist unterscheidbar, ob die Atome an einem ruhenden Beobachter an der Peripherie in der Reihenfolge 1 2 3 1 2 3 1 ... vorbeigehen, oder in der Reihenfolge 3 2 1 3 2 1 3 ... Tertium non datur.

haben; $\cdots$; das Nte Molekül kann $\cdots$ oder die Energie $u^{(r)}$ haben. Die Begründung dieser Abzählung ist es, die ich durchaus nicht zu verstehen vermag. Sie wäre natürlich ohne weiteres verständlich, wenn 1. die Quantenbedingungen für den Gaskörper von solcher Art wären, daß sie nur die Energiebeträge der Einzelmoleküle vorschrieben; und wenn 2. bei der Abzählung die Individualität berücksichtigt werden sollte. Letzteres soll aber laut Verabredung nicht geschehen! Also kann auch ersteres nicht zutreffen, denn sonst würde die Abzählung, wie man leicht überlegt, nicht r^N, sondern

$$\binom{N+r-1}{N} \tag{6}$$

ergeben. Es ist also sicherlich die Meinung, daß die Quantelung des Gaskörpers noch andere Beschränkungen ergibt als nur hinsichtlich der Einzelenergiebeträge. Das Ergebnis der Abzählung wird ganz von der Art dieser weiteren Beschränkungen abhängen. Ein Fall, in welchem die Abzählung (5) zutreffen würde, wäre z. B. der, daß den N Molekülen durch die Quantenbedingungen N Raumzellen zugewiesen wären, zwischen denen sie Platz wechseln können, jedoch so, daß in jeder Zelle immer ein und nur ein Molekül sich aufhält, während sein Ort innerhalb der Zelle belanglos ist. An Stelle der Individualität der Moleküle würde dann die Individualität der N Raumzellen treten. Es ist also ganz zweifellos, daß man durch weitere spezielle Voraussetzungen über die Beschaffenheit der Gasquantenzustände es herbeiführen kann, daß die Abzählung (5) korrekt ist. Doch ist mir kein allgemeiner Grund ersichtlich, der unabhängig von speziellen Voraussetzungen dieser Art verlangen würde, daß jeder individuellen Zuordnung der Moleküle zu den Energiebeträgen genau ein von allen übrigen verschiedener — und zwar ohne Rücksicht auf die Individualität der Moleküle verschiedener — Quantenzustand des Gases entsprechen muß.

7. Ich halte die eben dargelegten Schwierigkeiten für so groß, daß sie eine willkürfreie Durchführung des schönen Gedankens: nicht von der Quantelung der Einzelmoleküle sondern von der des ganzen Gases auszugehen — unmöglich machen. Es war das Hauptziel dieser Note, zu zeigen, daß, wenn man an der Quantelung der Einzelmoleküle festhält, der Versuch einer statistischen Begründung der ofterwähnten »Division« notwendig zur Einsteinschen Form der Statistik führt. Das bedeutet ein radikales Abgehen von der Boltzmann-Gibbsschen Art der Statistik. Gerade was in dieser der springende Punkt ist, die Permutierbarkeit einer Verteilung, welche Permutierbarkeit die Häufigkeit des Auftretens der betreffenden Verteilung im Laufe des »Gaslebens« bedingt, gerade das wird in der neuen Form der Statistik beiseite gesetzt, es werden alle Verteilungen als gleich häufig auftretend angesehen, ohne Rücksicht auf ihre Permutierbarkeit. Es fehlt vorläufig jede Möglichkeit, die merkwürdige Art von Wechselwirkung zwischen den Molekülen zu verstehen, welche zur Ausschaltung der Permutationszahl aus dem statistischen Kalkül führen soll. Die Gasmoleküle müßten dann, wie von Planck und Einstein auch betont wird, ganz etwas anderes sein und ganz

anders aufeinander einwirken, als wir uns das bisher vorgestellt hatten. Ich möchte demgegenüber erneut auf die Möglichkeit hinweisen, daß die Quantelung der Translationsbewegung durch diejenige Art von Wechselwirkung beherrscht wird, welche wir auch von anderen Erscheinungen her kennen, nämlich durch die Zusammenstöße[1]. Aber auch der weitere Umstand wird im Auge zu behalten sein, daß die empirische Bestätigung der STERN-TETRODEschen Dampfdruckformel überhaupt nicht unwiderruflich dazu zwingt, die Translationsbewegung als gequantelt anzusehen[2].

---

[1] Siehe meine oben zitierte Abhandlung.

[2] Siehe z. B. NERNST, Die Grundlagen des neuen Wärmesatzes, cap. XIII, 2; ferner die oben zitierte Abhandlung ENSKOGS.

Über die statistische Entropiedefinition.

Von Max Planck.

Zu dem vorstehenden Thema hat neuerdings Hr. E. Schrödinger[1] einige interessante Bemerkungen veröffentlicht, in denen unter anderem auch die kürzlich von Hrn. A. Einstein[2] und die von mir[3] entwickelte Theorie der sogenannten Gasentartung einer kritischen Beleuchtung unterzogen wird. Dies gibt mir Veranlassung, das Ergebnis von Untersuchungen, die mich in letzter Zeit beschäftigt haben und deren Hauptinhalt ich bereits in meinen im Dezember 1924 an der Universität München abgehaltenen Gastvorlesungen entwickeln konnte, hier etwas früher als ursprünglich beabsichtigt, mit Weglassung alles weniger Wesentlichen, mitzuteilen und daran die Besprechung einiger Punkte anzuknüpfen, welche in der Schrödingerschen Arbeit berührt werden.

§ 1.

Unter den verschiedenen möglichen statistischen Definitionen der Entropie möchte ich bei dem heutigen Stande unserer Kenntnisse der folgenden den Vorzug geben, die sich übrigens mit keiner der vier von Schrödinger a. a. O. namhaft gemachten Definitionen genau deckt. Die (absolute) Entropie eines physikalischen Gebildes von vielen Freiheitsgraden bei einer bestimmten Energie E ist:

$$S = k \log P, \tag{1}$$

wo P die Anzahl der verschiedenen stationären Zustände darstellt, welche das Gebilde bei der Energie E annehmen kann.

Dieser Definition liegt natürlich die Hypothese zugrunde, daß es in einem physikalischen Gebilde von bestimmter Energie nur eine endliche Anzahl von stationären Zuständen gibt. Im übrigen ist sie unabhängig von der Beschaffenheit des Gebildes (Oszillatorensystem, Kristall, Gas, Lösung). Ihr Hauptvorzug besteht darin, daß sie grundsätzlich alle Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen und die damit verbundenen Willkürlichkeiten vermeidet, indem sie das Problem der Berechnung der Entropie zurückführt auf ein anderes selbständiges physikalisches Problem, nämlich die Quantelung der in dem Gebilde stattfindenden Vorgänge. Sie unterscheidet sich von allen anderen bisherigen

[1] E. Schrödinger, Diese Berichte 1925 (s. die vorhergehende Abhandlung).
[2] A. Einstein, Diese Berichte p. 261, 1924; p. 3, p. 18, 1925.
[3] M. Planck, Diese Berichte p. 49, 1925.

Definitionen dadurch, daß sie die Entropie des Gebildes direkt liefert und nicht erst auf dem Weg über die Betrachtung der einzelnen Teile (Moleküle), aus denen das Gebilde zusammengesetzt ist, wo dann leicht die Gefahr besteht, daß die Wechselwirkungen der Teile nicht hinlängliche Berücksichtigung finden.

Bevor ich einiges über die Folgerungen aus der Definition (1) sage, möchte ich auf ihren engen Zusammenhang mit der Definition der freien Energie F hinweisen, die ich in meinen letzten Arbeiten benutzt habe:

$$F = -kT \cdot \log \sum e^{-\frac{\mathrm{E}}{kT}}, \tag{2}$$

wobei die Zustandssumme Σ über alle verschiedenen stationären Zustände zu erstrecken ist, welche das Gebilde überhaupt annehmen kann.

Ordnet man die Summenglieder nach dem Werte der Energie E des betreffenden stationären Zustandes, so wird jedem Wert von E eine bestimmte Anzahl P von Summengliedern entsprechen, welche zusammenaddiert den Beitrag

$$P \cdot e^{-\frac{\mathrm{E}}{kT}} \tag{3}$$

zur Zustandssumme liefern. Dieser Ausdruck besitzt für einen bestimmten Wert von E ein Maximum, dessen Größe im Vergleich zu seiner Breite wegen der vielen Freiheitsgrade des Gebildes so ungeheuer ist, daß von dem Logarithmus nur ein einziges Glied der ganzen Summe merklich in Betracht kommt. Bezeichnen wir gerade dieses Glied durch (3), so wird die freie Energie nach (2):

$$\begin{aligned} F &= -kT \log \left(P \cdot e^{-\frac{\mathrm{E}}{kT}}\right) \\ &= -kT \log P + \mathrm{E}, \end{aligned}$$

und diese Beziehung, verglichen mit der thermodynamischen Gleichung:

$$F = -TS + \mathrm{E} \tag{4}$$

ergibt die Gleichung (1).

Wie man umgekehrt von der Definition (1) zur Gleichung (2) gelangen kann, wird aus der folgenden Darstellung erhellen (§ 6).

§ 2.

Bei der Anwendung der Definition (1) auf ein bestimmtes Gebilde ist vor allem zu unterscheiden, ob das Gebilde aus einer großen Zahl voneinander vollkommen getrennter und daher unabhängiger gleichartiger Elemente (Moleküle, Oszillatoren) besteht oder ob das nicht der Fall ist. Ich glaube, daß aus der Nichtberücksichtigung dieser Frage eine ganze Reihe von Zweideutigkeiten und Mißverständnissen hervorgegangen ist. Denn es gibt eine Anzahl von Sätzen, die nur für den erstgenannten speziellen Fall gelten, für den allgemeineren aber keine Bedeutung besitzen.

Wir wollen mit der Behandlung des ersten Falles beginnen und ein spezielles Beispiel desselben vorausschicken. Wohl die einfachste Annahme ist diejenige, daß die N gleichartigen voneinander unabhängigen Elemente des Systems einfach-harmonische Oszillatoren mit der Schwingungs-

zahl ν sind, die in hinreichend großen Entfernungen voneinander feste Lagen innehaben und deren jeder die Energie

$$\varepsilon_n = nh\nu \qquad (n = 0, 1, 2, 3 \cdots)$$

besitzen kann. Dann ist auch die gesamte Energie E des Gebildes ein Vielfaches von $h\nu$:

$$\text{(5)} \qquad \mathrm{E} = Rh\nu \qquad (R \gg 1)$$

und die Gesamtzahl der verschiedenen Zustände, welche das Gebilde bei der Energie E annehmen kann, ist gleich der Anzahl der Arten, wie die Energie E auf die N Oszillatoren verteilt werden kann, also:

$$\text{(6)} \qquad P = \frac{(N+R-1)!}{R!\,(N-1)!} = \frac{(N+R)^{N+R}}{R^R N^N},$$

folglich die Entropie nach (1) und (5):

$$\text{(7)} \qquad S = kN\left\{\left(1 + \frac{\mathrm{E}}{Nh\nu}\right)\log\left(1 + \frac{\mathrm{E}}{Nh\nu}\right) - \frac{\mathrm{E}}{Nh\nu}\log\frac{\mathrm{E}}{Nh\nu}\right\}.$$

Die Zahl P der verschiedenen möglichen Zustände des Gebildes bei der Energie E läßt sich noch weiter unterteilen, wenn man die Zustände so gruppiert, daß man alle diejenigen Zustände, bei denen die Anzahl der mit einer bestimmten Energie ε_n versehenen Oszillatoren die nämliche $N_n (\gg 1)$ ist, zu einer besonderen Gruppe zusammenfaßt. Dann entspricht jeder solchen Gruppe ein bestimmtes »Verteilungsgesetz«, charakterisiert durch eine Gleichung von der Form:

$$N_n = f(\varepsilon_n)$$

wobei

$$\text{(8)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} N_n = N \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} N_n \varepsilon_n = \mathrm{E}.$$

Die Zahl der Zustände, die einem bestimmten Verteilungsgesetz angehören, ist dann:

$$\text{(9)} \qquad \frac{N!}{\prod_n N_n!} = \prod_n \left(\frac{N}{N_n}\right)^{N_n}$$

Diese Zahl erreicht ein Maximum P_m für das spezielle Verteilungsgesetz

$$\text{(10)} \qquad N_n = N \cdot \alpha \cdot e^{-\beta \varepsilon_n},$$

wo α und β aus den Gleichungen (8) zu entnehmen sind; und dieses Maximum ist so steil, daß man in dem Ausdruck (1) der Entropie statt P auch P_m setzen kann:

$$\text{(11)} \qquad S = k \log P_m,$$

wie unmittelbar zu verifizieren ist; das heißt, daß man, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, von allen möglichen Verteilungsarten der Energie

E auf die N Oszillatoren alle diejenigen vernachlässigen kann, welche nicht dem Verteilungsgesetz (10) angehören.

Wir dürfen also bei der Verteilung der Energie E auf die N Oszillatoren nicht nur von einer bestimmten Gesamtzahl aller möglichen Verteilungen, sondern auch von einem ganz bestimmten Verteilungsgesetz reden, das durch (10) ausgedrückt ist. Andere Verteilungsgesetze kommen tatsächlich gar nicht in Betracht, weil es zu wenige Zustände gibt, die ihnen angehören.

Führt man die absolute Temperatur T ein, durch die Beziehung:

$$\frac{dS}{d\mathrm{E}} = \frac{1}{T}, \tag{12}$$

so ergibt sich:

$$T = \frac{1}{k\beta}, \tag{13}$$

und die »Verteilungszahl« derjenigen Oszillatoren, welche die Energie ε_n besitzen, wird:

$$\frac{N_n}{N} = w_n = \frac{e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}}}{\sum e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}}}. \tag{14}$$

Je kleiner die Energie ε_n ist, um so häufiger kommt sie vor.

§ 3.

Auf Grund des Befundes, daß bei der Berechnung der Entropie nach (1) die Gesamtzahl P der Zustände, welche das Gebilde bei der Energie E besitzt, ersetzt werden kann durch die Zahl P_m derjenigen Zustände, welche der am häufigsten vorkommenden Energieverteilung unter seine N Elemente entsprechen, können wir auch leicht den allgemeinen Fall erledigen, daß die Energie ε_n, die ein Oszillator besitzen kann, nicht gerade ein ganzes Vielfaches n einer bestimmten Energie ist. Auch für diesen Fall ergibt sich aus dem Maximum von (9) mit den Nebenbedingungen (8) in bekannter Weise das Verteilungsgesetz (10) mit den Verteilungszahlen (14).

§ 4.

Den bisherigen Betrachtungen war die Voraussetzung zugrunde gelegt worden, daß jedes einzelne der N gleichartigen voneinander unabhängigen Elemente des Gebildes einen einzigen Freiheitsgrad besitzt, und daß dementsprechend den verschiedenen Zuständen, die ein Element annehmen kann, lauter verschiedene Energien zukommen. Anders wird die Sache, wenn jedes einzelne Element mehrere Freiheitsgrade besitzt. Denn dann kann es vorkommen, daß verschiedenen möglichen Zuständen des Elementes die nämliche Energie ε_n entspricht, oder, wie man auch sagen kann, daß eine bestimmte Energie ε_n in verschiedener Weise innerhalb des Elementes angeordnet sein kann.

Wir wollen also jetzt die Annahme machen, daß es p_n verschiedene Zustände des Elementes gibt, welche alle die nämliche Energie ε_n besitzen, oder

daß die Energie ε_n auf p_n verschiedene Arten im Element angeordnet sein kann. Über die Art des Unterschiedes dieser Zustände, sowie überhaupt über die Art der verschiedenen Freiheitsgrade des Elementes machen wir aber keinerlei beschränkende Annahmen; insbesondere auch nicht darüber, ob die Freiheitsgrade gleichartig sind oder nicht.

Dann bedarf es zur vollkommenen Charakterisierung eines bestimmten Verteilungsgesetzes der Energie E auf die N Elemente des Gebildes und innerhalb derselben zweier Indizes, indem $N_{np} (\geqq 1)$ die Zahl derjenigen Elemente bezeichnet, welche die Energie ε_n in der p ten Anordnung $(1 \leqq p \leqq p_n)$ enthalten.

Die Zahl der einem bestimmten Verteilungsgesetz angehörigen verschiedenen Zustände des Gebildes ist dann nach (9):

$$\frac{N!}{\prod\limits_n \prod\limits_p N_{np}!} = \prod_n \prod_p \left(\frac{N}{N_{np}}\right)^{N_{np}}, \tag{15}$$

wobei

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_n \sum_p N_{np} = \sum_n N_n = N \\ &\text{und} \\ &\sum_n \sum_p N_{np} \varepsilon_n = \sum_n N_n p_n \varepsilon_n = \mathrm{E}. \end{aligned} \right. \tag{16}$$

Bei der am häufigsten vorkommenden Verteilung ist, wie eine nähere Betrachtung unschwer ergibt:

$$N_{np} = \frac{N_n}{p_n}.$$

Daher wird aus (15):

$$\prod_n \left(\frac{p_n N}{N_n}\right)^{N_n},$$

und diese Zahl erreicht ihren Maximalwert P_m für

$$\frac{N_n}{N} = w_n = \frac{p_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}}}{\sum p_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}}}, \tag{17}$$

welche Gleichung eine Verallgemeinerung von (14) darstellt. Für die Entropie des Gebildes erhält man dann:

$$S = k \log P_m = kN \log \sum p_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} + \frac{\mathrm{E}}{T},$$

woraus durch Vergleich mit (4) der Ausdruck der freien Energie des Gebildes folgt:

$$F = -NkT \cdot \sum p_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}}. \tag{18}$$

Hierfür kann man auch schreiben:

$$F = -NkT \cdot \sum e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}, \tag{19}$$

wenn jetzt die einzelnen Summenglieder nicht den verschiedenen Energien, sondern allen verschiedenen Zuständen eines Elements entsprechen, da zu der nämlichen Energie ε_n p_n Zustände gehören.

Geht man statt von der Energie E von der Temperatur T des Gebildes aus, so ist die freie Energie bequemer zu berechnen als die Entropie.

§ 5.

Nach den vorstehenden Resultaten zeigt das Gesetz der Verteilung der Energie unter die einzelnen Elemente des Gebildes einen wesentlich verschiedenen Charakter, je nachdem ein Element einen oder mehrere Freiheitsgrade besitzt. Bei einem einzigen Freiheitsgrad sind nach (14) die Elemente mit der geringsten Energie am häufigsten vertreten, bei mehreren Freiheitsgraden dagegen wird nach (17) die Verteilungszahl bei einem gewissen Wert der Energie ε_n ein Maximum besitzen, welches um so ausgeprägter ist, je mehr Freiheitsgrade vorhanden sind. Um das näher zu illustrieren, nehmen wir als Beispiel einen einfachen Fall. Wir knüpfen an die oben im § 2 durchgeführte Betrachtung eines Gebildes von einfach-periodischen Oszillatoren an, fassen aber jetzt je f dieser Oszillatoren zusammen zu einem einzigen Element des Gebildes, das wir zur Unterscheidung einen »Mehrfach-Oszillator« nennen wollen. Dann möge das Gebilde aus N solchen Mehrfach-Oszillatoren von je f Freiheitsgraden bestehen.

Die Anzahl der Zustände eines Mehrfach-Oszillators, die bei der Energie $\varepsilon_n = nh\nu$ möglich sind, ist, analog dem Ausdruck (6):

$$\frac{(f+n-1)!}{n!\,(f-1)!} = p_n, \tag{20}$$

und daraus ergibt sich für die Verteilungszahl derjenigen Mehrfach-Oszillatoren, welche die Energie $\varepsilon_n = nh\nu$ besitzen, nach (17):

$$w_n = \frac{(f+n-1)!}{n!\,(f-1)!}\, e^{-\frac{nh\nu}{kT}} \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right)^f. \tag{21}$$

Um diejenige Energie zu finden, welche am häufigsten vorkommt, bilden wir den Quotienten:

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{f+n}{n+1} \cdot e^{-\frac{h\nu}{kT}} \tag{22}$$

und suchen diejenige Ordnungszahl n, welche diesen Quotienten nahe gleich 1 macht. Es ist das diejenige ganze Zahl n, welche dem Wert

$$\frac{f - e^{\frac{h\nu}{kT}}}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \tag{23}$$

am nächsten kommt. Daraus folgt für die am häufigsten vorkommende Energie ein Wert nahe an

$$\frac{f - e^{\frac{h\nu}{kT}}}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \cdot h\nu. \tag{24}$$

Dagegen ist die mittlere Energie eines Mehrfach-Oszillators:

$$\bar{\varepsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} n w_n h\nu = \frac{f h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \tag{25}$$

Die mittlere Energie ist also stets etwas größer als die häufigste Energie.

Für das mittlere Schwankungsquadrat der Energie ergibt sich weiter:

$$\overline{(\varepsilon - \bar{\varepsilon})^2} : \bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{f} \cdot e^{\frac{h\nu}{kT}}. \tag{26}$$

§ 6.

Gehen wir nun über zu dem Fall, daß jedes der N gleichartigen Elemente des betrachteten Gebildes viele Freiheitsgrade beliebiger Art besitzt, so nimmt das Verteilungsgesetz eine immer exklusivere Form an, indem diejenigen Energien, welche von der mittleren abweichen, an Häufigkeit immer mehr zurücktreten. Das erkennt man im einzelnen an dem im vorigen Paragraphen behandelten speziellen Beispiel der N Mehrfach-Oszillatoren von je f Freiheitsgraden. Je größer f wird, desto mehr nähert sich die häufigste Energie (24) der mittleren Energie (25), und desto kleiner werden die Schwankungen (26). Wir werden daher, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, den Satz aussprechen dürfen, daß bei der Verteilung der Energie auf ein Gebilde von vielen gleichartigen Elementen mit vielen Freiheitsgraden ganz beliebiger Art sämtliche Elemente die nämliche Energie besitzen, und daß man folglich bei einem solchen Gebilde auch von der Temperatur und der freien Energie eines einzelnen Elementes in einem ganz bestimmten Sinne reden kann. Die freie Energie eines Elementes von vielen Freiheitsgraden ist dann gegeben durch den Ausdruck (19), wenn man darin den Faktor N fortläßt, und damit gelangen wir zu dem allgemeinen im § 1 eingeführten Ausdruck (2) der freien Energie eines beliebigen Gebildes von vielen beliebigen Freiheitsgraden, nur daß dort E statt ε steht. Da es in der Regel bequemer ist, von der Temperatur auszugehen als von der Gesamtenergie, so werden wir im folgenden statt der Definition (1) die Definition (2) benutzen.

§ 7.

Bisher hatten wir das betrachtete Gebilde als zusammengesetzt angesehen aus lauter voneinander unabhängigen gleichartigen Elementen. Indem wir jetzt übergehen zu dem allgemeineren Fall eines beliebigen Gebildes mit vielen Freiheitsgraden, bemerken wir zunächst, daß, wenn man das Gebilde in mehrere voneinander unabhängige Teilgebilde mit vielen Freiheitsgraden zerlegen kann, die freie Energie F des Gesamtgebildes sich additiv zusammensetzt aus den freien Energien der Teilgebilde, weil jeder Zustand eines Teilgebildes mit

jedem Zustand eines anderen Teilgebildes kombiniert werden kann. Von diesem Satz macht man Gebrauch bei der Bestimmung der freien Energie eines festen Körpers. Denn, wie BORN und KÁRMÁN[1] zeigten, wird es durch die Einführung von sogenannten Normalkoordinaten möglich, alle in dem Körper vor sich gehenden Bewegungen aufzufassen als zusammengesetzt aus vielen voneinander völlig unabhängigen einfach periodischen Schwingungen, die sich durch das ganze akustische Spektrum bis zu sehr kurzen Wellenlängen hin erstrecken, und wenn man die einzelnen Intervalle des Spektrums so wählt, daß sie einerseits breit genug sind, um zahlreiche Schwingungen zu enthalten, andererseits aber doch so schmal, daß die Schwingungsfrequenzen jedes Intervalls als nahezu gleich betrachtet werden können, so ist damit die Möglichkeit der Berechnung der freien Energie mittels der oben behandelten Methode gegeben, wobei die Schwierigkeit nur noch in der Berechnung der Anzahl der auf jedes Spektralintervall fallenden Freiheitsgrade liegt[2].

§ 8.

Zu den Gebilden, welche nicht als zusammengesetzt aus gleichartigen voneinander unabhängigen Elementen betrachtet werden können, gehört als typisches Beispiel der Fall eines Gases. Denn selbst wenn, wie wir annehmen wollen, alle N Moleküle eines Gases gleichartig und unveränderlich sind, können dieselben nicht als voneinander unabhängig betrachtet werden, weil sie physikalische Wirkungen aufeinander ausüben, die sich bei den Zusammenstößen geltend machen. Hier läßt sich also die zur Bestimmung der freien Energie nach (2) notwendige Berechnung der Energien aller möglichen Zustände des Gases einstweilen nicht anders durchführen, als daß man direkt nach der Anzahl der Zustände des Gases fragt, welche in ein bestimmtes wohldefiniertes Gebiet des dem Gase eigentümlichen Phasenraumes fallen. In dieser Frage liegt nicht die geringste Zweideutigkeit oder Willkür. Nun ist ein Zustand eines aus gleichartigen Molekülen bestehenden Gases vollständig bestimmt, wenn man erstens alle Raumpunkte kennt, in denen sich ein Molekül befindet, und zweitens die Geschwindigkeit des Moleküls. Man braucht aber nicht zu wissen, »welches« Molekül das ist. Falls man also zur Berechnung der Gesamtzahl der in dem Phasengebiet enthaltenen Zustände für jedes Molekül über alle in Betracht kommenden Raumpunkte summiert, so erhält man jeden Zustand des Gases nicht einmal, sondern $N!$ mal.

Ich kann daher nicht zugeben, daß es, wie Hr. SCHRÖDINGER a. a. O. ausführt, noch einer besonderen Festsetzung oder Verabredung bedarf, um die $N!$ lediglich durch Rollenaustausch von Molekülen unterschiedenen Zustände des Gases als einen einzigen Zustand zu zählen, wofern man sich überhaupt auf den Standpunkt der Definition (1) stellt. Die besondere Art der Zählung ist vielmehr nach meiner Meinung notwendig bedingt durch den Umstand, daß die Moleküle im Lauf ihrer Bewegungen ihre Plätze tauschen können und daher in zwei verschiedenen Zuständen des Gases nicht paarweise zu identi-

[1] M. BORN und TH. v. KÁRMÁN, Physikal. Zeitschr. **13**, p. 297, 1912.
[2] P. DEBYE, Ann. d. Phys. **39**, p. 789, 1912.

fizieren sind, im Gegensatz zu den früher betrachteten ruhenden Oszillatoren, welche feste Plätze einnehmen und deshalb durch alle ihre Veränderungen hindurch stets individuell unterscheidbar bleiben.

Was nun die Durchführung der Quantelung der Molekülbewegungen betrifft, so vollzieht sich dieselbe in dem Fall, daß das für die gegebene Temperatur und das gegebene Volumen des Gases in Betracht kommende Phasengebiet sehr ausgedehnt ist (idealer Gaszustand), einfach nach dem in der Anwendung auf Oszillatoren bewährten Satz, daß bei einem Gebilde von f Freiheitsgraden die Anzahl der in einem Phasengebiet enthaltenen Zustände gleich ist dem Verhältnis der Größe des entsprechenden Phasenvolumens zu der Potenz h^f. Dabei braucht man auf die Frage nach der Art der Molekülbewegungen, das heißt nach der Form der Phasenzellen h^f, gar nicht einzugehen, da dieselben als unendlich klein behandelt werden. Dann geht die Zustandssumme (2) über in ein Zustandsintegral, und für die Entropiekonstante ergibt sich der bekannte Stern-Tetrodesche Wert. Anders und schwieriger wird die Aufgabe, wenn die Temperatur und das Volumen so tief sinken, daß nur eine begrenzte Anzahl von Gliedern der Zustandssumme (2) zu ihrem Wert praktisch beiträgt (Gasentartung). In diesem Falle wird es zur Durchführung der Rechnung notwendig, die Quantelung der Molekülbewegungen wirklich anzugeben, ein Problem, dessen strenge Lösung bisher nur in sehr wenigen Fällen gelungen ist, z. B. für ein einziges zwischen zwei parallelen festen Wänden hin und her fliegendes Molekül. Schon bei zwei Molekülen stellen sich wegen der Unkenntnis der Einzelvorgänge beim Zusammenstoß Schwierigkeiten ein, und diese Schwierigkeiten wachsen ins Ungeheuere, wenn man sehr viele Moleküle voraussetzt. Es bleibt einstweilen nichts anderes übrig, als einen einigermaßen plausiblen möglichst einfachen Ansatz einzuführen. Ein derartiger Versuch ist bereits vor Jahren von A. Sommerfeld[1] gemacht worden. Der in meiner obenerwähnten Arbeit gemachte Ansatz, dessen provisorischer Charakter übrigens durch die Anführung verschiedener Modifikationen dort auch zum Ausdruck gekommen sein dürfte, beruht auf dem Gedanken, die Quantelung der Gasbewegungen auf möglichst einfache Weise so auf die Quantelung der einzelnen Moleküle zurückzuführen, daß für den Grenzfall des idealen Gaszustandes die richtige Quantelung herauskommt. Ich stimme aber Hrn. Schrödinger darin durchaus bei, daß dieser Ansatz keineswegs vollbefriedigend ist und daß er sicher einmal durch einen besseren ersetzt werden muß. Auch bin ich mit ihm davon überzeugt, daß in der endgültigen Quantelungsformel die mittlere Weglänge der Moleküle eine wesentliche Rolle spielen wird[2].

Ob es auf diesem Wege gelingen wird, einen durch Messungen bestätigten Ausdruck für die Entropie eines entarteten Gases zu finden, wird die Zukunft lehren. Jedenfalls möchte ich glauben, daß der Versuch gemacht werden muß, ehe man sich dazu entschließt, zu der von Einstein vorgeschla-

---

[1] A. Sommerfeld, Vorträge über die kinetische Theorie der Materie und der Elektrizität in Göttingen, S. 123. Leipzig (Teubner) 1914.

[2] Vgl. E. Schrödinger, Physikalische Zeitschrift, **25**, S. 41, 1924.

genen Auffassung überzugehen, nach welcher außer denjenigen Wechselwirkungen der Moleküle, die von ihrer Undurchdringlichkeit und von ihren gegenseitigen Anziehungskräften herrühren, und die in der hier entwickelten Theorie ohne weiteres ihren Platz finden, noch eine besondere statistische Abhängigkeit der Moleküle voneinander ins Spiel kommt, die sich einstweilen nur auf die Analogie mit den Strahlungsquanten gründet.

In einem späteren Aufsatz beabsichtige ich auf einige einzelne Punkte, die hier nur in aller Kürze aufgeführt wurden, darunter auch auf die Definition der Zahl P in (1) und in (3), noch etwas näher einzugehen.

Ausgegeben am 4. September.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1925 XXV

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

Library of Congress
NOV 25 1925
Smithsonian Deposit

BERLIN 1925

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang einer aufzunehmenden Mitteilung soll in der Regel in den Sitzungsberichten bei Mitgliedern 32, bei Nichtmitgliedern 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte, in den Abhandlungen 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Abhandlungen nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 200 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1925

XXV. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 30. Juli.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

*1. Hr. v. Laue sprach über die piezoelektrisch erzwungenen Schwingungen am Quarz.

Durch experimentelle Arbeiten von Cady sowie Giebe und Scheibe hat man die Longitudinalschwingungen von Quarzstäben im elektrischen Kondensator unter Einfluß schneller elektrischer Schwingungen kennengelernt. Der Vortrag entwickelt die quantitative Theorie dafür und zeigt, was man über die piezoelektrischen Konstanten des Quarzes aus dem Vorgang entnehmen kann.

2. Das korrespondierende Mitglied Hr. Korschelt in Marburg übersandte das weiter herausgegebene Werk: »Bearbeitung einheimischer Tiere«. Erste Monographie: Der Gelbrand *Dytiscus marginalis L.*, Bd. 1 und 2 (Leipzig 1924).

Einige Bemerkungen zur Determinantentheorie.

Von I. Schur.

(Vorgetragen am 16. Juli 1925 [s. oben S. 425].)

Ist

$$f(x) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

eine (relative) Invariante einer gegebenen Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen[1]

$$(1) \qquad y_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta} x_\beta, \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, n)$$

so kann es eintreten, daß außerhalb der Gruppe $\mathfrak{G}$ keine lineare Substitution existiert, die $f(x)$, abgesehen von einem konstanten Faktor, ungeändert läßt. In diesem Fall nenne ich $f(x)$ eine *charakteristische Invariante* der Gruppe. Allgemeiner verstehe man unter einem *Eigensystem* der Gruppe $\mathfrak{G}$ ein System linear unabhängiger Funktionen

$$(2) \qquad f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x),$$

denen die Eigenschaft zukommt, daß für jede Substitution (1) von $\mathfrak{G}$ die Ausdrücke

$$f_1(y), f_2(y), \cdots, f_k(y)$$

sich als lineare homogene Verbindungen der Funktionen (2) mit konstanten Koeffizienten darstellen lassen[2]. Von einem *charakteristischen Eigensystem* der Gruppe spreche ich wieder, wenn die Substitutionen von $\mathfrak{G}$ die einzigen sind, bei denen die $f_\varkappa(x)$ eine lineare homogene Transformation erfahren.

Im allgemeinen ist es schwierig zu entscheiden, ob eine gegebene Invariante oder ein gegebenes Eigensystem der zu untersuchenden Gruppe als charakteristisch zu bezeichnen ist. In der eigentlichen Invariantentheorie sind erst in neuerer Zeit Probleme dieser Art in Angriff genommen und erledigt worden[3].

---

[1] Im folgenden soll von einer linearen Substitution oder Transformation nur dann gesprochen werden, wenn die Koeffizientendeterminante von Null verschieden ist.

[2] Ein solches Funktionensystem $f_\varkappa(x)$ wird in der Literatur vielfach als ein »transformables System« bezeichnet.

[3] Vgl. A. Ostrowski, Über eine neue Eigenschaft der Diskriminanten und Resultanten binärer Formen, Math. Annalen, Bd. 79 (1919), S. 360—387, A. Ostrowski und I. Schur, Über eine fundamentale Eigenschaft der Invarianten einer allgemeinen binären Form, Math. Zeitschrift, Bd. 15 (1922), S. 81—105, und A. Ostrowski, Über eine neue Frage in der algebraischen Invariantentheorie, Jahresber. der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 33 (1924), S. 174—184.

Aber schon viel früher haben S. KANTOR und G. FROBENIUS[1] einen hierher gehörenden Satz aufgestellt:

I. *Sind die Elemente der Matrix*

$$X = (x_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, n)$$

unabhängige Variable und die der Matrix $Y = (y_{\alpha\beta})$ *ganze lineare Funktionen dieser Variabeln, und unterscheidet sich die Determinante der Matrix* Y *von der Matrix* X *nur um einen konstanten von Null verschiedenen Faktor, so ist entweder* $Y = AXB$ *oder* $Y = AX'B$, *wo* A *und* B *konstante Matrizen sind und* X' *die zu* X *konjugierte Matrix* $(x_{\beta\alpha})$ *bedeutet.*

Der Satz besagt insbesondere, daß die Determinante von X eine charakteristische Invariante der durch die Substitutionen der Form

$$y_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma,\delta}^{n} a_{\alpha\gamma} x_{\gamma\delta} b_{\delta\beta} \quad \text{oder} \quad y_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma,\delta}^{n} a_{\alpha\gamma} x_{\delta\gamma} b_{\delta\beta}$$

gebildeten Gruppe $\mathfrak{G}_n$ (in n^2 Veränderlichen) darstellt. Im folgenden will ich auf einen allgemeinen Satz aufmerksam machen, aus dem insbesondere hervorgeht, daß für jedes r aus der Reihe der Zahlen $2, 3, \cdots, n$ die $\binom{n}{r}^2$ Unterdeterminanten r-ten Grades von X ein charakteristisches Eigensystem der Gruppe $\mathfrak{G}_n$ liefern:

II. *Es sei*

$$X = (x_{\alpha\varkappa}) \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, m, \ \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

eine Matrix mit m *Zeilen und* n *Spalten, deren* mn *Elemente unabhängige Variable sind. Ferner sei* $Y = (y_{\alpha\varkappa})$ *eine Matrix vom gleichen Typus, deren* mn *Elemente lineare homogene Funktionen der* $x_{\alpha\varkappa}$ *sind. Weiß man, daß für ein festes* r, *das den Bedingungen*

$$2 \leqq r \leqq m, \quad 2 \leqq r \leqq n$$

genügt, die $N = \binom{m}{r}\binom{n}{r}$ *Unterdeterminanten* r*-ten Grades der Matrix* Y *linear unabhängige lineare homogene Verbindungen der* N *Unterdeterminanten* r*-ten Grades der Matrix* X *sind, so ist für* $m \neq n$ *die Matrix* Y *von der Form* AXB, *wo* A *und* B *konstante quadratische Matrizen der Grade* m *und* n *mit nicht verschwindenden Determinanten bedeuten. Ist aber* $m = n$, *so ist entweder* $Y = AXB$ *oder* $Y = AX'B$.

Beim Beweis dieses Satzes setze ich den Satz I nicht als bekannt voraus. Von Wichtigkeit ist bei diesem Beweis, daß die nm Elemente $y_{\alpha\varkappa}$ von Y sich von selbst als linear unabhängig ergeben. Dies ist in unserem Fall direkt leicht zu zeigen, läßt sich aber auch aus einer allgemeinen Eigenschaft der Eigensysteme folgern (§ 2).

---

[1] S. KANTOR, Theorie der Äquivalenz von linearen ∞^λ-Scharen bilinearer Formen, Sitzungsber. der Münchener Akademie 1897, S. 367—381 (§ 2), und G. FROBENIUS, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen, Sitzungsber. der Berliner Akademie, S. 994—1015 (§ 7). Bei KANTOR wird der Satz ohne Beweis mitgeteilt. — Vgl. auch E. STEINITZ, Über die linearen Transformationen, welche eine Determinante in sich überführen, Sitzungsber. der Berliner Math. Gesellschaft 1903, S. 47—52.

§ 1.

Beweis des Satzes II.

Man bezeichne die N Unterdeterminanten r-ten Grades von X mit

$$D_1, D_2, \cdots, D_N$$

und die entsprechenden Unterdeterminanten der Matrix Y mit

$$\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_N.$$

Nach Voraussetzung bestehen also Gleichungen der Form

$$\Delta_\varrho = \sum_{\sigma=1}^{N} c_{\varrho\sigma} D_\sigma, \tag{3}$$

$$D_\varrho = \sum_{\sigma=1}^{N} c'_{\varrho\sigma} \Delta_\sigma. \qquad (\varrho = 1, 2, \cdots, N) \tag{3'}$$

Differenziert man D_ϱ nach den mn Variabeln $x_{\alpha\varkappa}$, so folgt aus (3'), daß die Nmn Ableitungen

$$\frac{\partial D_\varrho}{\partial x_{\alpha\varkappa}} \tag{4}$$

sich als lineare homogene Verbindungen der Ableitungen

$$\frac{\partial \Delta_\varrho}{\partial y_{\alpha\varkappa}}$$

darstellen lassen. Unter den Ausdrücken (4) kommen aber, wenn von den Vorzeichen abgesehen wird, alle Unterdeterminanten

$$D'_1, D'_2, \cdots, D'_P \qquad \left(P = \binom{m}{r-1}\binom{n}{r-1}\right) \tag{5}$$

des Grades $r-1$ von X vor. Hieraus folgt, daß diese Determinanten sich linear und homogen durch die entsprechenden Unterdeterminanten

$$\Delta'_1, \Delta'_2, \cdots, \Delta'_P \tag{6}$$

von Y ausdrücken lassen. Da die Ausdrücke (5) linear unabhängig sind, muß dasselbe auch für die Ausdrücke (6) gelten, also sind umgekehrt die Δ'_τ durch die D'_τ linear ausdrückbar[1].

Was also über die Unterdeterminanten r-ten Grades von X und Y vorausgesetzt war, ist auch für die Unterdeterminanten des Grades $r-1$ richtig. Indem man diese Schlußweise fortsetzt, erkennt man, daß *es genügt, unseren Satz für den Fall $r = 2$ zu beweisen.*

Zugleich ergibt sich, daß die $x_{\alpha\varkappa}$ sich als lineare Verbindungen der $y_{\alpha\varkappa}$ darstellen lassen. Folglich müssen die mn Funktionen $y_{\alpha\varkappa}$ linear unabhängig sein. Als lineare Funktionen sind sie daher ebenso wie die $x_{\alpha\varkappa}$ unabhängige Variable.

---

[1] Eine ähnliche Schlußweise benutzt schon E. Steinitz, a. a. O.

Ersetzt man Y durch eine äquivalente Matrix AYB, so kommt das dem gleich, daß man die m Zeilen und n Spalten von Y zwei linearen Transformationen von nicht verschwindenden Determinanten unterwirft. Eine solche Transformation von Y möge als eine *elementare Transformation* (A, B) bezeichnet werden. Wir haben zu zeigen: Sind die Unterdeterminanten zweiten Grades von X und Y durcheinander linear ausdrückbar, so kann Y durch fortgesetzte Anwendung elementarer Transformationen für $m \neq n$ in X und für $m = n$ entweder in X oder in X' übergeführt werden. Hierbei kann $m \leqq n$ angenommen werden, da wir sonst nur in der ganzen Untersuchung Zeilen und Spalten zu vertauschen brauchten.

Der Beweis soll in einer Reihe von Einzelschritten erbracht werden.

1. Schreibt man Y in der Form

$$Y = \sum M_{\alpha\varkappa} x_{\alpha\varkappa},$$

so muß jede der Matrizen $M_{\alpha\varkappa}$ vom Range $r_{\alpha\varkappa} = 1$ sein. Denn wäre $r_{\alpha\varkappa} > 1$, so ließe sich in Y eine Unterdeterminante zweiten Grades Δ angeben, die in bezug auf $x_{\alpha\varkappa}$ ein Polynom zweiten Grades wäre, was auszuschließen ist, da Δ eine lineare Verbindung der Unterdeterminanten zweiten Grades von X sein soll. Der Fall $r_{\alpha\varkappa} = 0$ kommt aber nicht in Betracht, weil sonst die mn Elemente von Y nicht linear unabhängig sein könnten.

2. Wir können nun insbesondere die Matrix M_{11} durch eine elementare Transformation (A, B) in die Matrix

$$AM_{11}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

überführen. Die Matrix $AYB = (z_{\alpha\varkappa})$ hat dann die Eigenschaft, daß die Variable x_{11} nur in dem Element z_{11}, und zwar mit dem Koeffizienten 1 vorkommt. Der Einfachheit wegen nehmen wir an, die Matrix Y genüge schon dieser Bedingung.

Setzt man nun

$$X_{11} = \begin{pmatrix} x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2n} \\ x_{32} & x_{33} & \cdots & x_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_{m2} & x_{m3} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}, \quad Y_{11} = \begin{pmatrix} y_{22} & y_{23} & \cdots & y_{2n} \\ y_{32} & y_{33} & \cdots & y_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ y_{m2} & y_{m3} & \cdots & y_{mn} \end{pmatrix},$$

so hängen die Elemente von Y_{11} nur noch von den Elementen von X_{11} ab. Dies ergibt sich unmittelbar, indem man jede Determinante

$$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{\alpha 1} & y_{\alpha\varkappa} \end{vmatrix} \qquad (\alpha = 2, 3, \cdots m, \quad \varkappa = 2, 3, \cdots n)$$

als lineare Verbindung der Unterdeterminanten zweiten Grades von X darstellt und die Koeffizienten von x_{11} vergleicht. Ist ferner $2 \leqq m - 1$, so ist es klar, daß die Unterdeterminanten zweiten Grades

(7) $$\Delta_1^{11}, \Delta_2^{11}, \cdots \Delta_Q^{11} \qquad \left(Q = \binom{m-1}{2}\binom{n-1}{2}\right)$$

von Y_{11} sich allein durch die Unterdeterminanten zweiten Grades von X_{11} linear und homogen ausdrücken lassen. Außerdem sind die Ausdrücke, weil die Elemente von Y_{11} als unabhängige Variable aufzufassen sind, voneinander linear unabhängig. Für $m \geqq 3$ besteht folglich zwischen den Matrizen X_{11} und Y_{11} dieselbe Beziehung wie zwischen X und Y.

Was hier über x_{11} und y_{11} ausgesagt worden ist, gilt natürlich auch entsprechend abgeändert für $x_{\alpha\varkappa}$ und $y_{\alpha\varkappa}$, wenn nur bekannt ist, daß die Variable $x_{\alpha\varkappa}$ nur in dem Element $y_{\alpha\varkappa}$ von Y (mit dem Koeffizienten 1) vorkommt. Ich sage in diesem Fall, die Matrix Y sei in bezug auf die Variable $x_{\alpha\varkappa}$ *normiert*. Streicht man dann in Y die α-te Zeile und die $\varkappa$-te Zeile, so hat die so entstehende Teilmatrix $Y_{\alpha\varkappa}$, das *Komplement* von $y_{\alpha\varkappa}$, insbesondere die Eigenschaft, daß ihre Elemente nur noch von den Elementen der analog gebildeten Teilmatrix $X_{\alpha\varkappa}$ von X abhängen.

3. Ich beweise unseren Satz zunächst für den Fall einer Matrix Y, die in bezug auf x_{11} normiert ist und außerdem der Bedingung $Y_{11} = X_{11}$ genügt, also die Gestalt

(8) $$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

hat. Es soll gezeigt werden, daß in diesem Fall Y durch eine elementare Transformation in X übergeführt werden kann. Nur für $m = n = 2$ kann Y auch mit X' äquivalent sein.

Wir können nämlich von der ersten Zeile eine lineare Verbindung der $m - 1$ letzten Zeilen und von der ersten Spalte eine lineare Verbindung der $n - 1$ letzten Spalten abziehen, so daß das an Stelle von y_{1n} tretende Element die Variabeln

(9) $$x_{2n}, x_{3n}, \cdots, x_{mn}$$

und das an Stelle von y_{m1} tretende Element die Variabeln

(10) $$x_{m2}, x_{m3}, \cdots, x_{mn}$$

nicht mehr enthält. Dies ist eine elementare Transformation, durch die die Gestalt von (8) sonst nicht geändert wird. Es mögen schon in der Matrix (8) die Elemente y_{1n} und y_{m1} diesen Bedingungen genügen.

Ich behaupte, daß alsdann von selbst

(11) $$y_{11} = x_{11}, \; y_{1\varkappa} = a_\varkappa x_{1\varkappa}, \; y_{\alpha 1} = b_\alpha x_{\alpha 1} \qquad (\alpha = 2, 3, \cdots m, \; \varkappa = 2, 3, \cdots n)$$

werden muß. Eine Ausnahme bildet nur der Fall $m = n = 2$, in dem noch

(12) $$y_{11} = x_{11}, \;\; y_{12} = a_2' x_{21}, \;\; y_{21} = b_2' x_{12}$$

sein kann.

Um dies einzusehen, schließe man folgendermaßen. Die Matrix (8) ist in bezug auf x_{mn} normiert. Denn käme x_{mn} irgendwo außerhalb der letzten Zeile und letzten Spalte vor, so wäre der Rang von M_{mn} größer als 1. Daher enthalten die Elemente des Komplements Y_{mn} von y_{mn} keine der Variabeln

$$x_{1n}, x_{2n}, \cdots, x_{mn}, x_{m1}, x_{m2}, \cdots, x_{m,n-1}.$$

Es muß dann Y von selbst auch in bezug auf die übrigen Variabeln (9) und (10) normiert sein. Denn ein $x_{\alpha n} (\alpha > 1)$ könnte nur noch in y_{m1} und ein $x_{m\varkappa} (\varkappa > 1)$ nur noch in y_{1n} vorkommen. Dann wäre aber der Rang von $M_{\alpha n}$ oder $M_{m\varkappa}$ größer als 1.

Würde nun für $\varkappa < n$ das Element $y_{1\varkappa}$ eine Variable $x_{\alpha\lambda} \neq x_{1\varkappa}$ enthalten, so kann nicht $\alpha > 1$ sein, weil $y_{1\varkappa}$ zum Komplement von $y_{\alpha n}$ gehört, und es kann nicht $\lambda > 1$, $\lambda \neq \varkappa$ sein, weil $y_{1\varkappa}$ zum Komplement von $y_{m\lambda}$ gehört. Für $\varkappa > 1$ kommt auch $\lambda = 1$ nicht in Betracht, weil Y in bezug auf x_{11} normiert sein soll. Ebenso gestaltet sich die Betrachtung für das Element $y_{\alpha 1}$ für $\alpha < m$.

Ist ferner $n > 2$, so gehört y_{1n} zu den Komplementen $Y_{m2}, \cdots, Y_{m,n-1}$ und ist außerdem von den Variabeln (9) unabhängig. Daher kann y_{1n} nur noch die Variabeln x_{1n} und

$$x_{21}, x_{31}, \cdots, x_{m-1,1} \tag{13}$$

enthalten. Die Variabeln (13) kommen aber nicht in Betracht, weil sonst wegen der für $\alpha \neq m$ schon bewiesenen Relationen (11) eine der Matrizen $M_{\alpha 1}$ vom Range 2 wäre. Für $n > 2$ ist daher auch $y_{1n} = a_n x_{1n}$. Ist aber $n = 2$, so liefert diese Schlußweise nur

$$y_{1n} = a_n x_{1n} + a_n' x_{m1}.$$

Ebenso ergibt sich, daß für $m > 2$ auch $y_{m1} = b_m x_{m1}$ und für $m = 2$

$$y_{m1} = b_m x_{m1} + b_m' x_{1n}$$

sein muß. Damit die Rangzahlen von M_{1n} und M_{m1} gleich 1 werden, muß noch in den Ausnahmefällen $n = 2$ oder $m = 2$

$$a_n b_m' = a_n' b_m = 0$$

werden. Hieraus folgt also die Richtigkeit der Formeln (11) bzw. (12).

Ist nun nicht $m = n = 2$, so kommt noch hinzu, daß jede Unterdeterminante

$$\Delta_{\alpha\varkappa} = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{1\varkappa} \\ y_{\alpha 1} & y_{\alpha\varkappa} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & a_\varkappa x_{1\varkappa} \\ b_\alpha x_{\alpha 1} & x_{\alpha\varkappa} \end{vmatrix}$$

eine lineare Verbindung der Unterdeterminanten zweiten Grades von X sein soll. Es kann offenbar nur

$$\Delta_{\alpha\varkappa} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{1\varkappa} \\ x_{\alpha 1} & x_{\alpha\varkappa} \end{vmatrix}$$

sein. Das liefert $a_\varkappa b_\alpha = 1$. Multipliziert man nun alle Zeilen von Y mit Ausnahme der ersten mit a_2 und alle Spalten mit Ausnahme der ersten mit b_2, so geht Y in X über.

Im Falle $m = n = 2$ kommt noch die Möglichkeit

$$Y = \begin{pmatrix} x_{11} & a' x_{21} \\ b' x_{12} & x_{22} \end{pmatrix}$$

in Betracht. Hier müssen wieder die Determinanten von X und Y übereinstimmen, was $a'b' = 1$ liefert. Man zeigt nun wie vorhin, daß in diesem Fall Y mit X' äquivalent ist.

4. Um nun den Satz II (für $r = 2$) zu beweisen, haben wir nur noch zu zeigen, daß für $m \neq n$ die Matrix Y und für $m = n$ entweder Y oder Y' durch eine elementare Transformation auf die Gestalt (8) gebracht werden kann.

Hierzu nehme man an, Y sei bereits in bezug auf x_{11} normiert. Ist $m = 2$, so sind nach dem früheren $y_{22}, y_{23}, \cdots, y_{2n}$ linear unabhängige Linearformen von $x_{22}, x_{23}, \cdots, x_{2n}$. Folglich kann durch eine lineare Transformation der $n - 1$ letzten Spalten erreicht werden, daß Y die Gestalt (8) erhält. Für $m = 2$ ist der Satz also richtig.

Ist aber $m > 2$, so steht das Komplement Y_{11} von y_{11} zur Matrix X_{11} in derselben Beziehung von Y zu X. Nimmt man den Satz für Matrizen mit weniger als m Zeilen als bewiesen an, so kann für $m \neq n$ die Matrix Y_{11} und für $m = n$ entweder Y_{11} oder Y'_{11} durch eine elementare Transformation in X_{11} übergeführt werden. Wendet man diese Transformation auf die letzten $m - 1$ Zeilen und die letzten $n - 1$ Spalten von Y oder Y' an, so erhält man eine Matrix der Form (8).

Damit ist der Satz II vollständig bewiesen.

§ 2.

Ein Satz über die Eigensysteme einer irreduziblen Gruppe.

III. *Es sei $\mathfrak{G}$ eine irreduzible Gruppe linearer homogener Substitutionen*

$$(14) \qquad y_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta} x_\beta. \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, n)$$

Bilden die k Funktionen

$$(15) \qquad f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)$$

ein Eigensystem von $\mathfrak{G}$, so muß das System vom »linearen Range« n sein, d. h. es ist nicht möglich, alle k Funktionen durch weniger als n Linearformen

$$z_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} b_{\mu\nu} x_\nu \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, m,\ m < n)$$

auszudrücken. Eine Ausnahme bildet nur der Fall $k = 1$, $f_1(x) = konst.$

Wäre nämlich für $\varkappa = 1, 2, \cdots, k$

$$f_\varkappa(x_1, x_2, \cdots, x_n) = g_\varkappa(z_1, z_2, \cdots, z_m),$$

so würde sich ergeben[1]

$$\frac{\partial f_\varkappa}{\partial x_\nu} = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial g_\varkappa}{\partial z_\mu} b_{\mu\nu}.$$

Wegen $m < n$ ließen sich n Konstanten $c_1, c_2, \cdots, c_n$ bestimmen, die den m Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} b_{\mu\nu} c_\nu = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, m)$$

genügen und nicht sämtlich Null sind. Der Differentialausdruck

$$A(f) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}$$

würde dann für $f = f_1, f_2, \cdots, f_k$ verschwinden.

Man denke sich nun die Gesamtheit $\mathfrak{D}$ von Differentialausdrücken dieser Art ins Auge gefaßt. In $\mathfrak{D}$ wird es eine Basis von gewissen l linear unabhängigen Ausdrücken

$$A_\lambda(f) = \sum_{\nu=1}^{n} c_{\lambda\nu} \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots, l)$$

geben, durch die sich alle übrigen linear und homogen darstellen lassen. Es muß dann $l < n$ sein, da sonst alle $\frac{\partial f_\varkappa}{\partial x_\nu}$ gleich Null, die $f_\varkappa(x)$ also Konstanten wären. Für $k > 1$ kommt dieser Fall nicht in Betracht, weil die $f_\varkappa(x)$ als Funktionen eines Eigensystems linear unabhängig sein müssen, und für $k = 1$ haben wir diesen Fall ausgeschlossen.

Geht nun die Gruppe $\mathfrak{G}$ durch die Ähnlichkeitstransformation

$$\xi_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} p_{\beta\alpha} x_\beta \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, n)$$

in die Gruppe $\mathfrak{G}_1$ über, so bilden die Funktionen

$$h_\varkappa(\xi) = f_\varkappa(x)$$

ein Eigensystem von $\mathfrak{G}_1$. Ferner wird

$$\frac{\partial f_\varkappa}{\partial x_\nu} = \sum_{\varrho=1}^{n} p_{\nu\varrho} \frac{\partial h_\varkappa}{\partial \xi_\varrho},$$

also

$$A_\lambda(f_\varkappa) = \sum_{\varrho=1}^{n} \frac{\partial h_\varkappa}{\partial \xi_\varrho} \left(\sum_{\nu=1}^{n} c_{\lambda\nu} p_{\nu\varrho} \right) = B_\lambda(h_\varkappa).$$

Da die Matrix $(c_{\lambda\nu})$ vom Range l sein muß, lassen sich die n^2 Größen $p_{\nu\varrho}$ so bestimmen, daß die Determinante $|p_{\nu\varrho}|$ von Null verschieden ausfällt und die Matrix der Größen $\sum_\nu c_{\lambda\nu} p_{\nu\varrho}$ die Gestalt

[1] Es wird hierbei stillschweigend vorausgesetzt, daß es sich um stetig differenzierbare Funktionen handle. Für Polynome $f_\varkappa(x)$ läßt sich der Beweis noch einfacher erbringen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

erhält. Dann wird $B_\lambda(h) = \frac{\partial h}{\partial \xi_\lambda}$. Wir dürfen annehmen, daß bereits

$$A_\lambda(f) = \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} \tag{16}$$

sei. Die k Funktionen $f_\varkappa(x)$ hängen dann von $x_1, x_2, \cdots, x_l$ nicht ab.

Ist nun für die Substitution (14) unserer Gruppe

$$f_\varkappa(y) = \sum_{\mu=1}^{k} q_{\varkappa\mu} f_\mu(x), \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, k)$$

so erhalten wir für $\lambda = 1, 2, \cdots, l$

$$\frac{\partial f_\varkappa(y)}{\partial x_\lambda} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_\varkappa(y)}{\partial y_\nu} a_{\nu\lambda} = 0.$$

Da aber die n Linearformen $y_1, y_2, \cdots, y_n$ wegen $|a_{\alpha\beta}| \neq 0$ unabhängige Variable sind, wird auch

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_\varkappa(x)}{\partial x_\nu} a_{\nu\lambda} = 0.$$

Der Differentialausdruck

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_\nu} a_{\nu\lambda}$$

gehört also zu $\mathfrak{D}$ und muß eine lineare Verbindung der l Ausdrücke (16) sein. Das liefert für jede Substitution von $\mathfrak{G}$

$$a_{l+1,\lambda} = a_{l+2,\lambda} = \cdots = a_{n\lambda} = 0,$$

für $\lambda = 1, 2, \cdots l$, was der vorausgesetzten Irreduzibilität der Gruppe $\mathfrak{G}$ widerspricht.

Aus III folgt unmittelbar:

III*. *Bilden die Funktionen* (15) *ein Eigensystem der irreduziblen Gruppe* $\mathfrak{G}$ *und weiß man, daß für*

$$z_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} b_{\alpha\beta} x_\beta \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, n)$$

die k Ausdrücke $f_\varkappa(z)$ als lineare homogene Verbindungen der $f_\varkappa(x)$ mit nicht verschwindender Determinante darstellbar sind, so muß die Determinante $|b_{\alpha\beta}|$ von Null verschieden sein. Eine Ausnahme bildet nur der Fall $k = 1$, $f_1(x) = konst.$

Denn aus den Voraussetzungen des Satzes folgt, daß umgekehrt die $f_\varkappa(x)$ als lineare Verbindungen der $f_\varkappa(z)$ darstellbar sind. Dies erfordert aber, daß $|b_{\alpha\beta}| \neq 0$ wird, da sich sonst alle $f_\varkappa(x)$ durch weniger als n lineare Funktionen der x_ν ausdrücken ließen.

Daß nun unter den Voraussetzungen des Satzes II die mn Elemente der Matrix Y linear unabhängige Funktionen der $x_{\alpha\varkappa}$ sein müssen, folgt auf Grund des Satzes III* aus der Tatsache, daß die Unterdeterminanten r-ten Grades von X ein Eigensystem der irreduziblen Gruppe der elementaren Transformationen

$$y_{\alpha\varkappa} = \sum a_{\alpha\beta}\, x_{\beta\lambda}\, b_{\lambda\varkappa} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, m, \ \varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots, n)$$

von X bilden.

Über sehr dünne, durchsichtige Metallfolien.

Von Dr. Carl Müller
in Berlin.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

(Vorgelegt von Hrn. Paschen am 9. Juli 1925 [s. oben S. 412].)

Die vom dunkelgrün durchscheinenden Blattgold her bekannte, auch an chemisch auf Glas erzeugten Silber- und Platinschichten beobachtete Eigenschaft der Metalle, in sehr dünnen Schichten lichtdurchlässig zu werden, hat die Physik schon frühzeitig zu erfolgreichen Forschungen über das Verhalten des Lichts beim Durchgang durch Metalle angeregt[1]. Die für diese Untersuchungen benutzten dünnen Metallschichten waren freilich meist keine freien Metallhäutchen, sondern dünne Metallspiegel, welche auf durchsichtigem, stärkerem Material, z. B. Glas, Glimmer, Zelluloid usw., auf chemischem Wege oder durch elektrische Zerstäubung niedergeschlagen waren. Diese angrenzenden festen Unterlagen bringen indes nach verschiedenen Richtungen hin störende Nebeneffekte und Unklarheiten mit sich; insbesondere bleibt die Frage offen, von welcher Stärke an derartige dünne Niederschläge als zusammenhängende Atomschichten aufzufassen sind. Man hat deshalb verschiedentlich versucht, auch freie homogene Metallfolien zu gewinnen, z. B. durch Erzeugung schwacher galvanischer Gold- oder Platinniederschläge auf einem stärkeren Kupferblech, das nachträglich abgeätzt wurde. Aber diese Bestrebungen scheinen selbst bei Edelmetallen keine merkliche und sichere Unterschreitung der bei etwa 9.10^{-6} cm (0.09 μ) liegenden Grenzdicke des Blattgoldes ergeben zu haben[2]. Unedle Metalle, wie dünne, auf gewalztem Kupferblech niedergeschlagene Nickelfolien, konnten auf diesem Wege selbst bei vorsichtigster, über mehrere Wochen ausgedehnter Abätzung sogar nur bis zu Stärken von 1 μ (1.10^{-4} cm) isoliert werden. Auch das von Lummer und Kurlbaum u. a. beispielsweise für Strahlungsmessungen erfolgreich ausgestaltete Wollaston-Dublierungsverfahren ergibt bei 0.5 μ starken ausgedehnteren Nutzschichten bereits erhebliche Ungleichmäßigkeiten und Porositäten.

---

[1] Faraday und Warren de la Rue, Philos. Trans. (1857) 145. Exp. res. IV 391. G. Quincke, Pogg. Ann. **119**, S. 368 (1863).
Über die weitere umfangreiche Literatur vgl. Drude, Winkelmanns Handbuch d. Phys. Bd. VI (1906) S. 1311.

[2] Vgl. E. v. Angerer, Techn. Kunstgriffe bei phys. Untersuchungen, Vieweg & Sohn. 1924.

Im nachstehenden sei ein im letzten Jahr in der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt entwickeltes neues Verfahren beschrieben, welches freie Metallhäutchen von noch etwa 10mal geringerer Dicke als beim Blattgold erreichbar, d. h. bis zu 1.10^{-6} cm Stärke (0.01 μ) herab liefert. Die neuen Folien besitzen dabei neben einer hoch gesteigerten Durchsichtigkeit gegenüber dem inhomogenen und porösen Blattgold zugleich den Vorzug einer weitgehenden Gleichmäßigkeit.

Das entwickelte Verfahren geht bei geeigneten Metallen ebenfalls von der elektrogalvanischen Erzeugung des gewünschten Metallhäutchens auf einer stärkeren Metallgrundschicht und der späteren Wegätzung dieser Grundschicht aus. Das Neue und Wesentliche besteht einmal darin, daß der dünne Metallniederschlag nochmals mit einer Schutzschicht überzogen wird, so daß die dünne Nutzschicht bei Biegungen sowie äußeren mechanischen Einwirkungen geschützt annähernd in der neutralen Zone liegt, ferner beim beiderseitigen Abätzen erst zum Schluß dem Angriff des Ätzmittels ausgesetzt ist. Weitere wesentliche Kunstgriffe bestehen neben dem Trocknen als gespannte Fläche darin, daß beide äußeren Schutzschichten aus leicht löslichem Material und von solcher Feinheit (z. B. aus elektrolytisch erzeugten Kupferniederschlägen von weniger als 0.01 mm Stärke) gewählt werden, daß beim Freiätzen, wo bei stärkeren, schwerer löslichen, z. B. Walzkupferunterlagen, einzelne bereits freigelegte Stellen leicht durch stehengebliebene, sich werfende Schutzschichtreste zerrissen werden, keine die Nutzschicht gefährdenden Spannungen auftreten. Es ist gelungen, nach diesem Verfahren aus Nickel und Gold, die ihrer günstigen chemischen, optischen und mechanischen Eigenschaften wegen in erster Linie näher studiert wurden, membranartige Folien von 6 cm Durchmesser bis zu Stärken von 0.04 μ herzustellen; solche von 2 cm Durchmesser bis zu 0.02 μ und einige kleinere sogar bis zu 0.01 μ (1.10^{-6} cm) Dicke herab. Auch Silber-, Platin- und Eisenfolien konnten beispielsweise ohne Schwierigkeit bis unter 0.04 μ Stärke gewonnen werden. Die dünnsten, von kleinen Metallringen getragenen Goldfolien waren freilich schon gegen Luftzug sehr empfindlich; 0.01 μ Nickelfolien hingegen zeigten sich, nachdem einmal die Gefahr des Zerreißens beim Abätzen, Herausheben und Trocknen vorüber war, wesentlich fester und auch in Laboratorienluft (vermutlich ihres Wasserstoffgehalts wegen) beständig. Bemerkenswert ist die hohe Elastizität der dünnen Nickelfolien, die größtenteils in dem feinwelligen Oberflächencharakter der auf nicht ganz glatter Grundschicht erzeugten dünnen Metallhaut ihren Grund haben dürfte. Straffgespannte Membranen aus 0.04 μ Nickelfolie von 6 cm Durchmesser konnten beispielsweise bis 1 mm durchgebogen werden.

Stärkere Nickelfolien von 0.25 μ Dicke hielten, zum Zwecke der Erprobung als Entladungsfenster auf eine Siebfläche mit 0.6 mm weiten Löchern gelegt, Überdrucke bis zu 25 cm Quecksilbersäule aus.

Die Bestimmung der vorstehend genannten Dickenangaben erfolgte unter der vorläufigen Annahme normaler spezifischer Gewichte bei den Folien bis 0.04 μ herab durch direkte Wägung größerer Folienflächen. Bei den dünneren Folien diente zunächst als Anhalt die im Vergleich zu den 0.04 μ Folien verminderte, pro Flächeneinheit transportierte Elektrizitätsmenge (Produkt aus Strom

und Zeit). Da indes die Abscheidung der Metallniederschläge nicht momentan mit der Stromeinschaltung auf der Grundschicht erfolgt, sondern zunächst dispers im Elektrolyten (was die wahre Niederschlagsstärke vermindert), andererseits auch mit einer rein chemischen Fällung, z. B. beim Gold durch die Kupfergrundschicht, zu rechnen ist (was den ersten Fehler kompensieren würde), sind Kontrollbestimmungen jener Daten in folgender Weise vorgenommen worden. Es wurden in der beschriebenen Weise 200 cm^2 große Stücke Rohfolie mit Kupferschichten und 0.016 μ starker Goldinnenschicht hergestellt, hiervon das Kupfer in ähnlicher Lösung, wie sonst abgeätzt, jedoch die zurückbleibenden Goldfilter abfiltriert und nach sorgfältiger Dekantierung gewogen und auf Restspuren von Cu untersucht. Die von Hrn. Fischer im chemischen Laboratorium der Reichsanstalt freundlichst durchgeführte Analyse ergab 8 mg Goldgewicht gegenüber 6 mg nach dem elektrochemischen Äquivalent

Abb. I.

Sektoröffnung: λ = 578 546 436 408 365 334 313 296 265 253 $\mu\mu$

Nr.
1 1
2 0.5
3 1 + Goldfolie I 0.035 μ
4 1 + Nickelfolie 0.025 μ
5 1 + Goldfolie II 0.035 μ
6 0.2
7 0.1

berechnet. Ein Kupfergehalt, der kolorimetrisch bei weniger als 0.1 mg Cu deutlich nachweisbar gewesen wäre, wurde nicht gefunden.

Setzt man demzufolge die angegebenen Stärkenschätzungen als annähernd richtig voraus, so würde sich, da für Nickel bzw. Gold die Atomkonstanten von Hull und Bohlin bzw. Vegard[1] röntgenographisch zu $3.5 \cdot 10^{-8}$ cm bzw. zu $4.07 \cdot 10^{-8}$ cm gemessen sind, ergeben, daß bei den dünnsten bisher gewonnenen 1.10^{-6} cm starken Nickel- und Goldfolien nur noch durchschnittlich 30 Atomschichten übereinander liegen.

Von den Eigenschaften der neuen Folien ist in erster Linie zunächst die ins Auge fallende Lichtdurchlässigkeit und Färbung orientierend untersucht worden.

Einen Überblick über die steigende Lichtdurchlässigkeit, die bei Dickenverminderung unter 10.10^{-6} cm (0.1 μ) eintritt, geben die in Abb. I, II, III wiedergegebenen Spektralaufnahmen, die unter Einschaltung verschieden starker Folien aus Nickel und Gold bzw. mit abgestufter Sektorenschwächung mittels eines Quarzspektrographen und einer Quarzquecksilberlampe als Lichtquelle gewonnen sind. Bei den Aufnahmen der Abb. I wurden frei aufgestellte Folien

---

[1] Bohlin, Ann. d. Phys. **61**, 430, 1920. Hull, Phys. Rev. **17**, 571, 1921. Vegard, Phil. Mag. **32**, 65, 1916.

Abb. II.

Belichtungszeit gegen Nr. 1—7 verdoppelt.

λ = 578 546 436 408 365 334

Nr.	Sektoröffnung: + 2 mm Glasschicht
8	1
9	1 + Goldfolie 0.02 μ
10	0.5
11	1 + Goldfolie 0.04 μ
12	0.2
13	1 + Nickelfolie 0.025 μ
14	0.1
15	0.05
16	1 + Nickelfolie 0.04 μ
17	0.02
18	0.01

Abb. III.

Belichtungszeit gegen 1—7 auf das 40fache erhöht.

λ = 578 546 436 408 365 334

Nr.	Sektoröffnung: + 2 mm Glasschicht
19	0.01
20	1 + dünnstes Blattgold (etwa 0.08 μ)
21	0.005
22	1 + Nickelfolie 0.1 μ
23	0.002

verwendet; bei den Aufnahmen der Abb. II und III, wo das Spektrum bei λ = 313 μμ abgeschnitten erscheint, sind Folien bzw. ein Streifen Blattgoldes benutzt, welche zwischen 2 Glasplatten geschützt montiert lagen. Die vergleichenden Sektorenaufnahmen Nr. 8, 10, 12, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 23 sind demgemäß mit analoger Glasplattenschwächung gewonnen worden. Die Reihenfolge der Aufnahmen wurde möglichst so gewählt, daß jede Folienaufnahme interpolierend zwischen zwei Sektoraufnahmen mit größerer bzw. kleinerer Schwächung lag. Die Blattgoldaufnahme Nr. 20 zeigt neben der bekannten vorzugsweisen Durchlässigkeit im Grün (λ = 546 μμ) deutlich die in ungleichmäßiger Schwärzung des Spaltbildes sich äußernde schwankende Stärke des Blattgolds. Auch die neuen gleichmäßigen elektrolytisch gewonnenen Goldfolien zeigen noch ein Durchlässigkeitsmaximum im sichtbaren Gebiet, das sie hier

gegenüber Nickelfolien gleicher Dicke wesentlich durchlässiger erscheinen läßt (vgl. die Aufnahmen Nr. 3, 4, 5, 9 und 13); doch verflacht sich dieses spektrale Durchlässigkeitsmaximum bei geringer werdender Dicke erheblich und rückt zudem mit abnehmender Dicke zu größeren Wellenlängen, im Einklang mit dem Wechsel der Durchlässigkeitsfärbung der dünnen Goldfolien, die bei 0.04 μ Dicke noch deutlich grün, bei 0.02 μ schwach gelblich erscheinen (vgl. die direkt spektralphotometrisch gemessenen Durchlässigkeitskurven der Abb. IV, V, VI für Gold- und Nickelfolien ähnlicher Dicke).

Parallel der Verschiebung der spektralen Durchlässigkeit wechselt die Reflexfarbe der dünnen Goldhäutchen, die bei 0.04 μ noch deutlich goldgelb nuanciert sind, mit Verfeinerung zu 0.02 μ in ein dunkles Rosa. Der reflek-

Abb. IV.

Goldfolie etwa 0.04 μ
($4 \cdot 10^{-6}$ cm).

Abb. V.

Goldfolie etwa 0.02 μ
($2 \cdot 10^{-6}$ cm).

Abb. VI.

Nickelfolie etwa 0.025 μ
($2.5 \cdot 10^{-6}$ cm).

tierende Anteil sichtbarer Strahlung beträgt nach orientierenden Messungen bei den dünnsten Goldfolien nur noch wenige Prozent. Daß die rötliche Reflexfarbe nicht, wie man vermuten könnte, von einem Kupfergehalt der dünnen Goldfolie herrührt, dürfte durch die auf S. 466 erwähnte Analyse größerer Goldfolienstücke von analoger Stärke und gleichartiger Färbung klargestellt sein. Im übrigen erscheinen derartige 0.02 μ-Goldfolien an den Randstellen, wo die Goldfolie auf einer Kupferunterlage aufliegt, also das Licht infolge der Reflexion an der Kupferunterlage die doppelte Golddicke (0.04 μ) durchläuft, in der ähnlichen goldgelben Reflexfarbe wie eine freie Goldfolie von analoger Dicke (0.04 μ).

Gegenüber der Gesamtstrahlung einer normal belasteten Nitralampe zeigen die auch in den dünnsten Schichten »grauen« Nickelfolien ähnliche Durchlässigkeiten wie im sichtbaren Gebiet (bei 0.025 μ Dicke etwa 11 Prozent), die 0.04 μ-Goldfolien zeigten bezüglich der Nitralampengesamtstrahlung etwa 6 Prozent Durchlässigkeit (gegenüber 15—30 Prozent im sichtbaren Gebiet), die 0.02 μ-Goldfolien etwa 14 Prozent Durchlässigkeit gegenüber 50—60 Prozent im Sichtbaren).

Eingehendere spektrale Messungen, insbesondere über die bei der Lichtschwächung auf Absorption, Reflexion, Zerstreuung entfallenden Anteile, sollen ebenso wie allgemeinere vergleichende Untersuchungen über die Dicke und

die optischen, akustischen, elektrischen, magnetischen, lichtelektrischen und magnetooptischen Eigenschaften der Folien und ihr Verhalten gegen Kathodenstrahlen und chemische Einwirkungen den Gegenstand weiterer Untersuchungen an Folien möglichst zahlreicher Materialien bilden.

Einen Anhalt für die Klarheit und gute Gleichmäßigkeit der neuen Folien geben die mikrophotographischen Vergleichsaufnahmen[1] der Abb. VII und VIII. In der rechten Abb. VIII ist ein in 1/100 mm geteilter mikroskopischer Maßstab mit 400facher Vergrößerung und Apertur 0.4 direkt aufgenommen; in der linken Abb. VII wurde derselbe Maßstab durch eine Nickelfolie von 0.025 μ Dicke hindurch photographiert, welche zwischen Maßstab und Mikroskopobjektiv eingeschaltet war.

Abb. VII. *Abb. VIII.*

Mikrophotographische Aufnahme einer in 0.01 mm geteilten Skala. Vergrößerung 400fach. (Zeiss Comp. Okul. 20fach und Obj. C. ($f = 8.5$ mm; Apertur 0.4; freier Objektabstand 1.6 mm.)

a) Mit Nickelfolie von $2.5 \cdot 10^{-6}$ cm Stärke zwischen Objektiv und Maßstab.

b) Ohne Nickelfolie (verkürzte Belichtungszeit).

Irgendwelche Schärfeneinbußen des linken Bildes infolge des Lichtdurchgangs durch die Folie, bei dem immerhin ein weit geöffnetes Lichtbündel sehr verschiedene Folienstellen durchstrahlte, sind nicht wahrzunehmen.

Die Oberfläche der dünnsten Metallfolien selbst erscheint auch bei noch stärkerer Vergrößerung als glasartige, strukturlose, nur ganz vereinzelt von Poren durchbrochene Haut.

Auch Durchstrahlungen mit polarisiertem Licht zeigten keinerlei ungleichmäßige Aufhellung, sondern nur eine ganz geringfügige Drehung der Polarisationsebene (um 0.02°)[2], im Gegensatz zu den bekannten Spannungsstörungen bei den durch Zerstäubung auf Quarzplatten usw. hergestellten Metallschichten. Die neuen Folien dürften daher besonders für metalloptische Untersuchungen ein willkommenes Studienmaterial bilden.

[1] Durch Hrn. Wetthauer freundlichst aufgenommen.

[2] Nach freundlichen Messungen von Hrn. Schönrock.

Eigenartig ist das Verhalten der dünnen Nickelfolien gegenüber chemischen Einflüssen. Wird eine Nickelfolie mittlerer Feinheit von beispielsweise 0.03—0.04 μ Stärke in sauerstoffhaltiger Atmosphäre erhitzt, so nimmt ihre Durchsichtigkeit in derart hohem Maße zu, daß man zunächst an einen starken Substanzverlust glaubt. Zugleich treten je nach der Foliendicke Färbungen, besonders im reflektierten Licht, auf. Durch Erhitzen in Wasserstoff kann man jedoch die Folie leicht in die ursprüngliche Metallfolie zurückverwandeln, ein Zeichen, daß lediglich eine Oxydierung des Nickelhäutchens stattgefunden hatte. Die Folie behält dabei auch nach Überführung in das durchsichtigere Nickeloxyd vollkommen ihre Form und ihren Zusammenhang.

Beachtenswert ist ferner die auf die große abkühlende Oberfläche zurückzuführende Fähigkeit der neuen Folien, starke elektrische Ströme zu leiten, die sie nicht nur als Zuleitungen sehr geringer Masse und Steifigkeit für Meßinstrumente, als Stromleiter für Galvanometer, Elektrometer, Thermosäulen empfiehlt, sondern auch für Thermophonzwecke geeignet macht. Folienstreifen aus Nickel konnten bei 0.04 μ Stärke beispielsweise in Luft pro Zentimeter Breite mit 0.3 Amp., ohne zu oxydieren, belastet werden. Auch in Membranform dürften die Folien ihrer obenerwähnten hohen Elastizität, außerordentlichen Leichtigkeit[1] und vollkommenen Dämpfung wegen für akustische und optische Zwecke, ebenso wie für magnetische und mechanische Geräte ein vielseitig verwendbares Konstruktionsmaterial ergeben.

Zusammenfassung.

Es wird die Gewinnung von sehr dünnen, hochdurchsichtigen freien Metallfolien aus Nickel, Gold, Platin, Silber, Eisen bis teilweise zu Stärken von $1 . 10^{-6}$ cm herab beschrieben und ein Überblick über das Verhalten der Folien in mechanischer, chemischer, elektrischer und besonders optischer Hinsicht an Hand spektrographischer Aufnahmen und spektralphotometrischer Messungen gegeben.

[1] Gewicht einer 0.04 μ Nickelfolienmembran von 60 mm Durchmesser etwa 1 Milligramm. Probefolien können durch Vermittlung des Verfassers erhalten werden.

Über den Schottkyschen Satz und die Borelschen Ungleichungen.

Von Dr. Alexander Ostrowski
in Göttingen.

(Vorgelegt von Hrn. Bieberbach am 25. Juni 1925 [s. oben S. 411].)

1. Einleitung. In der vorliegenden Mitteilung entwickele ich einen neuen elementaren Beweis des Schottkyschen Satzes über Funktionen $f(z)$, die für $|z| < 1$ regulär sind und die Werte 0 und 1 nicht annehmen[1]. Dieser Beweis unterscheidet sich von dem Schottkyschen sowie von dem Borelschen Beweis des Picardschen Satzes insbesondere auch dadurch, daß ich die komplexe Funktion $\lg z$ durch die algebraische Funktion $n(1-\sqrt[n]{z})$ ersetze, deren Einführung gewisse Vorteile bietet[2].

Die neue Beweisanordnung, die wir in 2. darlegen, ist nicht nur wesentlich direkter und kürzer als die bisherigen, sondern dürfte insbesondere auch einfacher sein als der auf der Theorie der elliptischen Modulfunktionen beruhende Beweis, wenigstens, wenn man explizite Abschätzungen erhalten will. Darüber hinaus liefert sie auch eine sehr scharfe Abschätzung, da bisher in der Formel (3) auf elementarem Wege nur $\frac{\lg \frac{1}{\vartheta}}{\vartheta^2}$ im Exponenten erreicht werden konnte, gegenüber der genauen Größenordnung $\frac{1}{\vartheta}$, die sich, wie Hr. Landau zeigte, mit Hilfe der elliptischen Modulfunktion ergibt — während unsere Methode $\frac{\lg \frac{1}{\vartheta}}{\vartheta}$ liefert.

Wir gehen in 2. von dem folgenden der Sache nach auf Borel zurückgehenden Satz aus:

[1] F. Schottky, Über den Picardschen Satz und die Borelschen Ungleichungen. Diese Sitzber. 1904, pp. 1244—62. — Den wesentlichen Gedankengang des vorliegenden Beweises habe ich 1920 gefunden und verschiedenen Göttinger Kollegen mitgeteilt, sowie im S. S. 1921 in einer Vorlesung in Hamburg vorgetragen.

[2] Diese Funktion konvergiert für $n \to \infty$ bei geeigneter Festlegung des Zweiges gegen $-\lg z$, doch ist $n = \infty$ in unserem Zusammenhang nicht als der günstigste Wert von n anzusehen.

Ist $f(z)$ für $|z| < r$ regulär und von 0 verschieden, sowie absolut $\leqq M$, ist ferner $f(0) = 1$ und $0 < \rho < r$, so gilt[1]

$$(1)\qquad \underset{|z|\leqq\rho}{\frac{1}{|f(z)|}} \leqq M^{\frac{2\rho}{r-\rho}}, \qquad \underset{|z|\leqq\rho}{|f(z)|} \leqq M^{\frac{2\rho}{r+\rho}}.$$

Der Beweis dieses Satzes wird gewöhnlich nach einem Gedanken von Carathéodory mit Hilfe der Logarithmusfunktion auf das sogenannte Schwarzsche Lemma zurückgeführt. Wir geben in 3. einen neuen Beweis von (1) und von einer weiteren damit zusammenhängenden Borelschen Abschätzung, der von der Logarithmusfunktion für komplexe Werte des Arguments keinen Gebrauch macht. Im Anschluß daran gehen wir kurz auf die Koeffizientenabschätzungen ein, die sich aus (1) ergeben, da die Cauchyschen Abschätzungen für Funktionen ohne Nullstellen sich in einer bestimmten Richtung verschärfen lassen. Darüber hinaus gestattet aber unsere Methode, (1) nicht nur für die Funktionen $f(z), \frac{1}{f(z)}$, sondern auch für die sogenannten Majoranten ihrer Nullpunktsentwicklungen herzuleiten; doch lassen sich diese Relationen auch aus einem entsprechenden Ergebnis von Borel direkt herleiten.

Endlich gehen wir in 4. auf Koeffizientenabschätzungen von Funktionen ein, die die Werte 0 und 1 auslassen. Wir formulieren hier nur eines der Ergebnisse, zu denen wir gelangen: Die Nullpunktsentwicklung von $f(z)$ hat die Entwicklung der Funktion $\frac{|f(0)|}{1 - e^{230} c z}$ nach Potenzen von z zur Majorante, wenn $c = \text{Max}\,(1, |\lg|f(0)||)$ ist — eine für ins Unendliche wachsende c sehr günstige Abschätzung, die die »richtigen« Größenordnungen in c liefert, sich indessen, was numerische Koeffizienten anbetrifft, noch weiter verschärfen läßt.

Zum Schluß ermitteln wir asymptotisch genaue Schranken für alle Ableitungen von $f(z)$ — bisher waren solche nur für die erste Ableitung bekannt.

Im übrigen haben wir in der vorliegenden Mitteilung keinen Wert darauf gelegt, möglichst günstige numerische Konstanten zu erzielen, da sonst der Gedankengang an verschiedenen Stellen modifiziert werden müßte.

2. Der Schottkysche Satz. Es sei zunächst $f(z)$ eine für $|z| \leqq 1$ reguläre und von 0 und 1 verschiedene Funktion. Wir setzen $|f(0)| = f_0$, ferner für $0 < r < 1$

$$\underset{|z|\leqq r}{\text{Max}}\, |f(z)| = M(r), \quad \underset{|z|\leqq r}{\text{Max}}\, \frac{1}{|f(z)|} = m(r);$$

$$\text{Max}\,(e, M(r)) = \overline{M}(r), \quad \text{Max}\,(e, m(r)) = \overline{m}(r),$$

und es sei $c = \text{Max}\,(1, |\lg f_0|)$, so daß $e^{-c} \leqq f_0 \leqq e^c$, $c \geqq 1$ ist. Wir beweisen zuerst den

[1] Vgl. E. Landau, Über den Picardschen Satz, Vierteljahrsschrift Zür. Nat. Ges. 51 (1906) pp. 275 ff. Man kann $f(0)$ und M durch Multiplikation mit einer von 0 verschiedenen Konstanten verschieden normieren. Wir normieren so, daß $f(0) = 1$ wird; dem Borelschen, auf einen Gedanken von Hadamard zurückgehenden Beweis entspricht die Normierung $M = 1$.

Hilfssatz. Für $0 < \rho < r < 1$ gilt die Relation

$$\text{I} \qquad \overline{m}(\rho) \leqq e^{\frac{10c}{r-\rho}} (\lg \overline{M}(r))^{\frac{2}{r-\rho}}$$

und die mit I wegen der Symmetrie unserer Voraussetzungen in bezug auf die Vertauschung von f mit $\frac{1}{f}$ äquivalente Relation

$$\text{I}^* \qquad \overline{M}(\rho) \leqq e^{\frac{10c}{r-\rho}} (\lg \overline{m}(r))^{\frac{2}{r-\rho}}.$$

Beweis. Man kann beim Beweis von I $m(\rho) = \overline{m}(\rho) > e$ annehmen, da I sonst trivial ist. Es sei etwa für $|z_0| = \rho$ $|f(z_0)| = \frac{1}{\overline{m}(\rho)}$. Da die direkte Anwendung von (1) auf $f(z)$ eine zu schwache Abschätzung liefert, bilden wir unter Benutzung der Tatsache, daß $f(z)$ für $|z| < 1$ auch den Wert 1 ausläßt, eine Hilfsfunktion $f^*(z)$, für die $M(r)$ von wesentlich kleinerer Größenordnung ist, während $f^*(z)$ gleichfalls für $|z| < 1$ von 0 verschieden bleibt und $m(\rho)$ sicher nicht wesentlich kleiner wird. Die Anwendung von (1) auf $f^*(z)$ wird uns dann ohne weiteres I liefern. Und zwar setzen wir[1]

$$f^*(z) = n\left(1 - \sqrt[n]{1 - f(z)}\right), \qquad n = [\lg \overline{M}(r)] \quad, \quad n \geqq 1,$$

wo der für $|z - z_0| < \varepsilon$ mit einem hinreichend kleinen ε durch die Entwicklung

$$(2) \qquad f^*(z) = f(z) + \frac{1 - \frac{1}{n}}{2!} f^2(z) + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)}{3!} f^3(z) + \cdots$$

definierte Zweig zu nehmen ist. Da für $|\alpha| < \frac{1}{2}$

$$\left|\alpha + \frac{1 - \frac{1}{n}}{2!}\alpha^2 + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)}{3!}\alpha^3 + \cdots\right| \leqq |\alpha|\,(1 + |\alpha| + |\alpha|^2 + \cdots)$$
$$= \frac{|\alpha|}{1 - |\alpha|} < 2\,|\alpha|$$

---

[1] Zur Erläuterung des in der besonderen Wahl der Hilfsfunktion $f^*(z)$ liegenden Kunstgriffes sei für den Kenner noch folgendes bemerkt: Wählt man als Hilfsfunktion $f^*(z)$ die durch eine der Entwicklung (2) entsprechende Entwicklung in der Nähe von $z = z_0$ eindeutig festgelegte Funktion $-\lg(1 - f(z))$, so ergibt sich (a) ganz analog wie im Text. Auch die Abschätzung (c) — und noch schärfere — kann man noch erhalten, wenn man von der folgenden elementaren Eigenschaft des Logarithmus Gebrauch macht: Es ist für jedes x $|\lg(1+x)| \geqq \lg(1+|x|)$, wo links eine beliebige Bestimmung des Logarithmus genommen werden kann, rechts dagegen der positive Wert zu nehmen ist. Um aber eine zu (b) analoge Abschätzung zu erhalten, muß auch der Imaginärteil von $\lg(1 - f(z))$ berücksichtigt werden. Geschieht dies durch Einschaltung eines weiteren Kreises mit Hilfe der entsprechenden Borelschen Ungleichungen, so gelangt man zu einer etwas schwächeren Gestalt von I, I*, die indessen auch zur Herleitung des Schottkyschen Satzes mit der Schranke von der Form

$$e^{c^{\lg \frac{e}{\delta}}}$$

ausreicht. Für den von uns benutzten Wert von n hat sich aber der Imaginärteil unserer Hilfsfunktion $f^*(z)$ noch nicht so weit herausgebildet, daß darauf beim Beweis besondere Rücksicht genommen werden müßte.

ist, liefert die Entwicklung (2) für $f^*(z_0)$ wegen $|f(z_0)| = \frac{1}{\overline{m}(\rho)} < \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$

$$|f^*(z_0)| < 2\,|f(z_0)| = \frac{2}{\overline{m}(\rho)}, \qquad \overline{m}(\rho) < \frac{2}{|f^*(z_0)|} \leqq 2 \operatorname*{Max}_{|z|=\rho} \frac{1}{|f^*(z)|} = 2\, m^*(\rho),$$

mithin

$$\text{(a)} \qquad m^*(\rho) > \frac{\overline{m}(\rho)}{2},$$

wobei f_0^*, $m^*(\rho)$, $M^*(r)$ bei $f^*(z)$ den Größen f_0, $m(\rho)$, $M(r)$ entsprechen sollen. Ebenso folgt sofort

$$M^*(r) \leqq n\left(1+\sqrt[n]{1+\overline{M}(r)}\right) < \lg \overline{M}(r)\left(1+\sqrt[n]{e^n(e+e^{-n})}\right)$$
$$\leqq \left(1+e(e+e^{-n})\right) \lg \overline{M}(r) \leqq (e^2+2) \lg \overline{M}(r)$$
$$\text{(b)} \qquad M^*(r) < 10 \lg \overline{M}(r)\,^{1}.$$

Endlich erhalten wir für f_0^*, wenn die in Betracht kommende Bestimmung von $\sqrt[n]{1-f(0)}$ gleich α gesetzt wird, wegen $|\alpha| \leqq \sqrt[n]{1+f_0}$

$$\frac{1}{f_0^*} = \frac{1}{nf_0}\left|\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}\right| \leqq \frac{1}{nf_0}\left(1+|\alpha|+|\alpha|^2+\cdots+|\alpha|^{n-1}\right) < \frac{n(1+f_0)}{nf_0}$$
$$= 1+\frac{1}{f_0} \leqq 1+e^c < e^{2c},$$

$$\text{(c)} \qquad \frac{1}{f_0^*} \leqq e^{2c}.$$

Da $f^*(z) \neq 0$ für $|z| < 1$ ist, folgt nach (a), (b), (c) und (1), angewandt auf $\frac{f^*(z)}{f^*(0)}$

$$f_0^*\, m^*(\rho) \leqq \left(\frac{M^*(r)}{f_0^*}\right)^{\frac{2\rho}{r-\rho}}, \qquad m^*(\rho) \leqq (M^*(r))^{\frac{2\rho}{r-\rho}} \left(\frac{1}{f_0^*}\right)^{\frac{r+\rho}{r-\rho}},$$

$$\frac{\overline{m}(\rho)}{2} \leqq \left(10 \lg \overline{M}(r)\right)^{\frac{2}{r-\rho}} (e^{2c})^{\frac{2}{r-\rho}}, \quad \overline{m}(\rho) \leqq (20e^{2c})^{\frac{2}{r-\rho}} \left(\lg \overline{M}(r)\right)^{\frac{2}{r-\rho}},$$

$$\overline{m}(\rho) \leqq e^{\frac{10c}{r-\rho}} \left(\lg \overline{M}(r)\right)^{\frac{2}{r-\rho}}\,^{1}, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Wir behaupten nun, daß für $0 < \vartheta \leqq \frac{1}{e}$

$$\text{(3)} \qquad M(1-\vartheta) \leqq e^{56c\frac{\lg\frac{1}{\vartheta}}{\vartheta}}$$

ist. Denn wäre für ein positives $\vartheta \leqq \frac{1}{e}$ $M(1-\vartheta) > e^{56c\frac{\lg\frac{1}{\vartheta}}{\vartheta}}$, so würde aus

[1] Wegen $e = 2.71\cdots > 2$, $e^2 = 7.38\cdots < 8$, $e^3 = 20.0\cdots > 20$, $e^7 - 1 > 400$.

I* für $\rho = 1 - \vartheta$, $r = 1 - \frac{\vartheta}{2}$, $\frac{r-\rho}{2} = \frac{\vartheta}{4}$ folgen:

$$\lg \overline{m}(r) \geqq M(\rho)^{\frac{r-\rho}{2}} e^{-5c} > e^{14c \lg \frac{1}{\vartheta} - 5c} > \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^2 (e^{7c} - 1) \geqq \left(\frac{2}{\vartheta}\right)^2 c \frac{e^7 - 1}{4} > 56 c \frac{2}{\vartheta} \lg \frac{2}{\vartheta}\text{[1]},$$

$$m\left(1 - \frac{\vartheta}{2}\right) > e^{56c \frac{\lg \frac{2}{\vartheta}}{\frac{\vartheta}{2}}}.$$

Daher folgt weiter aus Symmetriegründen, wenn man ϑ durch $\frac{\vartheta}{2}$ ersetzt,

$$M\left(1 - \frac{\vartheta}{4}\right) > e^{56c \frac{\lg \frac{4}{\vartheta}}{\frac{\vartheta}{4}}},$$

und daher allgemein, wenn man für ganze $n > 1$ ϑ sukzessive durch $\frac{\vartheta}{4}$, $\frac{\vartheta}{4^2}, \cdots, \frac{\vartheta}{4^{n-1}}$ ersetzt,

$$M\left(1 - \frac{\vartheta}{4^n}\right) > e^{56c \frac{\lg \frac{4^n}{\vartheta}}{\frac{\vartheta}{4^n}}},$$

was für hinreichend große n der gleichmäßigen Beschränktheit von $f(z)$ für $|z| \leqq 1$ widerspricht.

Nun folgt aber aus (3) für $1 \geqq \vartheta \geqq \frac{1}{e}$

$$M(1 - \vartheta) \leqq M\left(1 - \frac{1}{e}\right) < e^{56ce} < e^{198c} \leqq e^{198c \frac{\lg \frac{e}{\vartheta}}{\vartheta}},$$

da $\frac{1}{\vartheta} \lg \frac{e}{\vartheta}$ für $\frac{1}{e} \leqq \vartheta \leqq 1$ monoton abnimmt und für $\vartheta = 1$ den kleinsten Wert 1 annimmt. Daher gilt nunmehr allgemein

$$M(1 - \vartheta) \leqq e^{198c \frac{\lg \frac{e}{\vartheta}}{\vartheta}}, \qquad 0 < \vartheta \leqq 1. \tag{4}$$

Lassen wir jetzt die Voraussetzung fallen, daß $f(z)$ auch für $|z| = 1$ regulär ist, so ist (4) jedenfalls auf $f(rz)$ für jedes positive $r < 1$ anwendbar und liefert, da f_0 unverändert bleibt,

$$M(r(1 - \vartheta)) \leqq e^{198c \frac{\lg \frac{e}{\vartheta}}{\vartheta}}, \qquad 0 < r < 1, \quad 0 < \vartheta \leqq 1.$$

woraus für $r \to 1$ bei festem ϑ wieder (4) folgt[2]. Es sei nun $d = \text{Max}\,(1, \lg f_0)$.

---

[1] Siehe Anmerkung 1 auf S. 474.

[2] Da bei dieser Formel darüber, wie groß $|1 - f(0)|$ bleibt, nichts vorausgesetzt wird, ist hierin und in (5) zugleich eine von Hrn. LANDAU hervorgehobene, für viele Anwendungen wichtige Präzisierung der ursprünglichen SCHOTTKYschen Formulierung enthalten — in der SCHOTTKYschen Formulierung hing nämlich die Schranke für $M(1 - \vartheta)$ von den unteren Schranken für $|1 - f(0)|$ und $|f(0)|$ ab. Von dieser Einschränkung kann man sich nach einer Bemerkung von P. LEVY am einfachsten direkt freimachen — wenn man die ursprüngliche SCHOTTKYsche Formulierung

Ist $d < c$, d. h. $d = 1$, $c > 1$, so daß $|f(0)| < \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$ ist, so ist sicher

$e > |1 - f(0)| > e^{-1}$, so daß für $1 - f(z)$ $M(1-\vartheta) \leqq e^{198 \frac{\lg \frac{e}{\vartheta}}{\vartheta}}$ ist, und daher

jedenfalls für $f(z)$ $M(1-\vartheta) \leqq 1 + e^{198 \frac{\lg \frac{e}{\vartheta}}{\vartheta}} < e^{199 \frac{\lg \frac{e}{\vartheta}}{\vartheta}} = e^{199 d \frac{\lg \frac{e}{\vartheta}}{\vartheta}}$ gilt. So ergibt sich der Satz. Ist $f(z)$ für $|z| < 1$ regulär und von 0 und 1 verschieden, ist ferner $d = \text{Max}\,(1, \lg |f(0)|)$, so daß $|f(0)| \leqq e^d$, $d \geqq 1$ ist, so gilt für $0 < \vartheta \leqq 1$

$$(5) \qquad \underset{|z| = 1-\vartheta}{|f(z)|} < e^{199 d \frac{\lg \frac{e}{\vartheta}}{\vartheta}} < e^{200 d \frac{\lg \frac{e}{\vartheta}}{\vartheta}}.$$

3. Die Borelschen Ungleichungen. Wir wollen nun den Gedanken der Verwendung der n-ten Wurzel als Hilfsfunktion statt des Logarithmus benutzen, um den Beweis der obigen Ungleichungen (1) von Borel ohne Gebrauch der komplexen Logarithmusfunktion zu führen. Offenbar kann dabei unbeschadet der Allgemeinheit $r = 1$ angenommen werden. Es wird also vorausgesetzt, daß $f(z)$ für $|z| < 1$ regulär, von 0 verschieden und absolut nicht größer als $\mathfrak{M} = e^M (M > 0)$ ist, sowie im Nullpunkt den Wert 1 hat, und es ist zu beweisen, daß

$$(6) \qquad e^{\frac{2\varrho M}{1+\varrho}} \geqq \underset{|z| \leqq \varrho}{|f(z)|} \geqq e^{-\frac{2\varrho M}{1-\varrho}} \qquad 0 < \varrho < 1$$ [1]

ist.

Es sei für ein ganzes $n > 0$ $\varphi_n(z)$ der Zweig von $\sqrt[n]{f(z)}$, für den $\varphi_n(0) = 1$ ist. Dann gilt für $|z| < 1$

$$|\varphi_n(z)| \leqq e^{\frac{M}{n}}.$$

---

gewonnen hat, indem man, falls $|1 - f(0)| < \frac{1}{2}$ ist, diese Formulierung auf denjenigen Zweig von $1 - \sqrt{f(z)}$ anwendet, dessen Wert im Nullpunkt absolut größer als $\frac{1}{2}$ ist. Denn damit ist dann eine Schranke für $|f(z)|$ gewonnen. Der Übergang von $f(z)$ zu $1 - f(z)$ gestattet dann ohne weiteres auch den Einfluß der unteren Schranke für $|f(0)|$ zu eliminieren.

[1] Aus diesen Ungleichungen ergibt sich sofort der folgende Satz: Konvergiert eine Folge von für $|z| < 1$ regulären und gleichmäßig beschränkten Funktionen $f_n(z)$ im Nullpunkt gegen 0, und verschwindet in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes keine der Funktionen $f_n(z)$, so konvergiert die Folge $f_n(z)$ gleichmäßig für $|z| \leqq \varrho$ für jedes $\varrho < 1$ gegen 0. Denn ist eine gemeinsame Schranke der Funktionen $f_n(z)$ für $|z| < 1$ etwa $\mathfrak{M}$, so folgt durch Anwendung von (6) auf die Funktionenfolge $g_n(z) = \frac{f_n(z)}{f_n(0)}$ für $0 < \varrho < 1$

$$\underset{|z| \leqq \varrho}{|g_n(z)|} \leqq \left(\frac{\mathfrak{M}}{|f_n(0)|}\right)^{\frac{2\varrho}{1+\varrho}}, \quad \underset{|z| \leqq \varrho}{|f_n(z)|} \leqq \mathfrak{M}^{\frac{2\varrho}{1+\varrho}} |f_n(0)|^{\frac{1-\varrho}{1+\varrho}},$$

und die rechte Seite der letzten Ungleichung konvergiert für $n \to \infty$ gegen 0. Für den Fall, daß die $f_n(z)$ als in einer Umgebung des Nullpunktes gleichmäßig konvergent vorausgesetzt werden, ist dies im wesentlichen ein bekannter Satz von Hurwitz. Offenbar kann man auch die Schranken $\mathfrak{M}_n = \underset{|z|<1}{\text{Max}} |f_n(z)|$ von n abhängig machen und ins Unendliche wachsen lassen, wenn nur $\lg \mathfrak{M}_n = o(\lg |f_n(0)|)$ ist. — Der obige Satz hängt eng zusammen mit einem potentialtheoretischen Satz von Harnack.

Nun ist aber

$$\psi_n(z) = e^{\frac{M}{n}} \frac{\phi_n(z) - 1}{e^{\frac{2M}{n}} - \phi_n(z)} = \frac{\phi_n(z)\, e^{-\frac{M}{n}} - e^{-\frac{M}{n}}}{1 - e^{-\frac{M}{n}} \phi_n(z)\, e^{-\frac{M}{n}}}$$

für $|z| < 1$ regulär, ferner ist $\psi_n(0) = 0$ und $|\psi_n(z)| \leqq 1$ für $|z| < 1$, da durch $v = \dfrac{w - e^{-\frac{M}{n}}}{1 - w e^{-\frac{M}{n}}}$ für $\dfrac{M}{n} > 0$ das Innere des Einheitskreises auf sich selbst abgebildet wird. Da nun nach dem SCHWARZschen Lemma $\underset{|z| \leqq \varrho}{|\psi_n(z)|} \leqq \rho$ ist, folgt

$$(7)\qquad \phi_n(z) e^{-\frac{M}{n}} = \frac{\psi_n(z) + e^{-\frac{M}{n}}}{1 + e^{-\frac{M}{n}} \psi_n(z)}, \quad \phi_n(z) - 1 = \psi_n(z) \frac{e^{\frac{M}{n}} - e^{-\frac{M}{n}}}{1 + e^{-\frac{M}{n}} \psi_n(z)},$$

$$(8)\qquad \underset{|z| \leqq \varrho}{|\phi_n(z) - 1|} \leqq \rho \frac{e^{\frac{M}{n}} - e^{-\frac{M}{n}}}{1 - \rho e^{-\frac{M}{n}}} < \frac{\rho}{1 - \rho} \left(e^{\frac{M}{n}} - e^{-\frac{M}{n}}\right).$$

Nun ist $e^{\frac{M}{n}} - e^{-\frac{M}{n}} = 2 \dfrac{M}{n}(1 + c_n)$, $1 - \left(e^{\frac{M}{n}} - e^{-\frac{M}{n}}\right) \dfrac{\rho}{1 - \rho} = e^{-\frac{2M}{n} \frac{\varrho}{1-\varrho}(1 + c'_n)}$,

wo für $n \to \infty$ $c_n \to 0$, $c'_n \to 0$ ist. Daher folgt aus (8) für hinreichend große $n > n_0(\rho, M)$

$$\underset{|z| \leqq \varrho}{|\phi_n(z)|} \geqq 1 - \frac{\rho}{1 - \rho} \left(e^{\frac{M}{n}} - e^{-\frac{M}{n}}\right) = e^{-\frac{2M}{n} \frac{\varrho}{1-\varrho}(1 + c'_n)}, \quad \underset{|z| \leqq \varrho}{|f(z)|} \geqq e^{-\frac{2M\varrho}{1-\varrho}(1 + c'_n)},$$

woraus für $n \to \infty$ die zweite Ungleichung (6) folgt, die allein bei unserem Beweis des SCHOTTKYschen Satzes benutzt wird.

Zweitens folgt aus (7)

$$(9)\qquad \underset{|z| \leqq \varrho}{|\phi_n(z)|}\, e^{-\frac{M}{n}} \leqq \frac{e^{-\frac{M}{n}} + \rho}{1 + e^{-\frac{M}{n}} \rho}.$$

Denn die reelle Transformation $v = \dfrac{w + e^{-\frac{M}{n}}}{1 + w e^{-\frac{M}{n}}}$ führt das Innere des Kreises $|w| \leqq \rho$ in das Innere eines die reelle Achse ortogonal schneidenden Kreises über, wobei die beiden Schnittpunkte als Bildpunkte von $w = \mp \rho$ die Abszissen $\dfrac{e^{-\frac{M}{n}} - \rho}{1 - e^{-\frac{M}{n}} \rho}$ bzw. $\dfrac{e^{-\frac{M}{n}} + \rho}{1 + e^{-\frac{M}{n}} \rho}$ haben. Und da $\dfrac{e^{-\frac{M}{n}} + \rho}{1 + e^{-\frac{M}{n}} \rho} \pm \dfrac{e^{-\frac{M}{n}} - \rho}{1 - e^{-\frac{M}{n}} \rho} > 0$

ist, liegt der Bildkreis innerhalb des Kreises $|v| \leqq \dfrac{e^{-\frac{M}{n}} + \rho}{1 + e^{-\frac{M}{n}} \rho}$.

Aus (9) folgt aber

$$\underset{|z|\leq\varrho}{|\phi_n(z)|} \leq \frac{1+e^{\frac{M}{n}}\rho}{1+e^{-\frac{M}{n}}\rho} = 1+\rho\frac{e^{\frac{M}{n}}-e^{-\frac{M}{n}}}{1+e^{-\frac{M}{n}}\rho} = 1+\frac{2\rho M}{1+\rho}\frac{(1+c_n'')}{n} = e^{\frac{2\varrho M}{1+\varrho}\frac{(1+c_n^{(3)})}{n}}, \quad \underset{n\to\infty}{c_n''\to 0}, \; \underset{n\to\infty}{c_n^{(3)}\to 0},$$

$$\underset{|z|\leq\varrho}{|f(z)|} \leq e^{\frac{2\varrho M}{1+\varrho}(1+c_n^{(3)})} \to e^{\frac{2\varrho M}{1+\varrho}},$$

womit auch die erste Ungleichung (6) bewiesen ist.

Drittens aber folgt aus (8), daß das Argument von $\phi_n(z)$ für $|z|\leq\rho$ höchstens gleich $\arcsin\left(\left(e^{\frac{M}{n}}-e^{-\frac{M}{n}}\right)\frac{\rho}{1-\rho}\right) = \frac{2M\rho}{n(1-\rho)}(1+c_n^{(4)}), \; (\underset{n\to\infty}{c_n^{(4)}\to 0})$ ist.

Daher ist das Argument von $f(z)$ für $|z|\leq\rho$ höchstens gleich $\frac{2M\rho}{1-\rho}(1+c_n^{(4)}) \to \frac{2M\rho}{1-\rho}$,

womit die weitere, gleichfalls der Sache nach auf BOREL zurückgehende Tatsache bewiesen ist: Ist $f(z)$ für $|z|<1$ regulär, von 0 verschieden und absolut $\leq e^M$, ist ferner $f(0)=1$, so ist für $|z|\leq\rho<1$ das Argument von $f(z)$ bei stetiger Fortsetzung vom Nullwert im Nullpunkt höchstens gleich $\frac{2M\rho}{1-\rho}$.

Es ist noch von Interesse, die aus (6) folgenden Schranken für die Entwicklungskoeffizienten von $f(z)$ und $\frac{1}{f(z)}$, d. h. die Größen a_k, b_k, in

$$f(z) = 1+a_1z+a_2z^2+\cdots \quad , \quad \frac{1}{f(z)} = 1+b_1z+b_2z^2+\cdots$$

genauer abzuschätzen. Wir wenden für $M\leq k$ die CAUCHYschen Abschätzungen auf den Kreis $|z|=\rho=1-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{k}}$ an. Dann ergibt sich, wegen $-\lg(1-\alpha) \leq \alpha(1+\alpha)$ für $0<\alpha\leq\frac{1}{2}$, in leicht verständlicher Schreibweise

$$|a_k|, |b_k| \leq \left(1-\frac{1}{2\sqrt{\frac{k}{M}}}\right)^{-2\sqrt{\frac{k}{M}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{Mk}} e^{4\sqrt{Mk}\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{k}}\right)}$$

$$\leq e^{\left(\frac{1}{2\sqrt{\frac{k}{M}}}+\frac{1}{4\frac{k}{M}}\right)2\sqrt{\frac{k}{M}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{Mk}+4\sqrt{Mk}-2M} = e^{4\frac{1}{2}\sqrt{Mk}}\, e^{M\left(\frac{1}{4}-2\right)} < e^{5\sqrt{Mk}},$$

$$(10) \qquad |a_k|, |b_k| < e^{5\sqrt{Mk}}, \qquad (1\leq k,\; M\leq k).$$

Für $1\leq k\leq M$ dagegen wenden wir die CAUCHYschen Abschätzungen auf den Kreis $|z|=\rho=\frac{k}{4M}$ an. Dann ergibt sich

$$|a_k|, |b_k| \leq \left(\frac{4M}{k}\right)^k e^{\frac{k}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}}} = \left(\frac{M}{k}\right)^k \left(4e^{\frac{2}{3}}\right)^k < \left(\frac{10M}{k}\right)^k,$$

$$|a_k|, |b_k| < \left(\frac{10M}{k}\right)^k. \qquad (1 \leq k \leq M) \tag{11}$$

Für die Entwicklungskoeffizienten von $f(z)$ sind natürlich nur die letzten Abschätzungen von Interesse.

Da (10), (11) aus den Ungleichungen (6) folgen, gelten natürlich dieselben Abschätzungen auch für die Entwicklungskoeffizienten von $e^{\frac{2Mz}{1-z}}$. Wir zeigen nun, daß $|a_k|, |b_k|$ nicht größer als die entsprechenden Entwicklungskoeffizienten von $e^{\frac{2Mz}{1-z}}$ sind. Wir beweisen nämlich: Ist $f(z)$ für $|z| < 1$ regulär, von 0 verschieden und $|f(z)| \leq e^M$, $M > 0$, ist ferner $f(0) = 1$, so haben die Nullpunktsentwicklungen von $f(z)$, $\frac{1}{f(z)}$ die Entwicklung von $e^{\frac{2Mz}{1-z}}$ nach Potenzen von z zur Majorante, d. h. jeder Koeffizient von $f(z)$ bzw. $\frac{1}{f(z)}$ ist absolut nicht größer als der entsprechende Koeffizient in der Entwicklung von $e^{\frac{2Mz}{1-z}}$; in der Poincaréschen Bezeichnungsweise:

$$f(z) \ll e^{\frac{2Mz}{1-z}}, \quad \frac{1}{f(z)} \ll e^{\frac{2Mz}{1-z}}.$$

Wir setzen wiederum $\phi_n(z) = \sqrt[n]{f(z)}$ mit $\phi_n(0) = 1$, so daß $|\phi_n(z)| \leq e^{\frac{M}{n}}$ ist. Es sei nun $\phi_n(z) = 1 + a_1^{(n)} z + a_2^{(n)} z^2 + \cdots$; dann lassen sich die Koeffizienten von $\phi_n(z)$ auf folgendem (bekannten) Wege abschätzen: Ist ζ eine primitive m-te Einheitswurzel, so bilde man

$$\phi_{n,m}(z) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \phi_n(\zeta^k z) = 1 + a_m^{(n)} z^m + a_{2m}^{(n)} z^{2m} + \cdots, \quad \underset{|z| \leq 1}{|\phi_{n,m}(z)|} \leq e^{\frac{M}{n}},$$

$$\chi_{n,m}(z) = \frac{\phi_{n,m}(z)\, e^{-\frac{M}{n}} - e^{-\frac{M}{n}}}{1 - e^{-\frac{M}{n}}\phi_{n,m}(z)\, e^{-\frac{M}{n}}}.$$

Da $|\chi_{n,m}(z)| \leq 1$ für $|z| < 1$ ist, folgt durch m-malige Anwendung des Schwarzschen Lemmas auf $\chi_{n,m}(z)$ für $|z| < 1$ bzw. $z \to 0$:

$$\left|\frac{\chi_{n,m}(z)}{z^m}\right| \leq 1, \quad \left|\frac{e^{-\frac{M}{n}}\left(\frac{\phi_{n,m}(z) - 1}{z^m}\right)}{1 - e^{-\frac{M}{n}}\phi_{n,m}(z)\, e^{-\frac{M}{n}}}\right| \leq 1, \quad \frac{e^{-\frac{M}{n}}|a_m^{(n)}|}{1 - e^{-\frac{2M}{n}}} \leq 1,$$

$$|a_m^{(n)}| \leq e^{\frac{M}{n}} - e^{-\frac{M}{n}},$$

daher folgt für hinreichend große $n > n_0(z, M)$

$$\phi_n(z) \ll 1 + \left(e^{\frac{M}{n}} - e^{-\frac{M}{n}}\right)(z + z^2 + \cdots) = 1 + \frac{\left(e^{\frac{M}{n}} - e^{-\frac{M}{n}}\right)z}{1 - z}, \quad \frac{1}{\phi_n(z)} \ll \frac{1}{1 - \left(e^{\frac{M}{n}} - e^{-\frac{M}{n}}\right)\frac{z}{1-z}}$$

$$(12) \quad f(z) \ll \left(1 + \left(e^{\frac{M}{n}} - e^{-\frac{M}{n}}\right)\frac{z}{1-z}\right)^n, \quad \frac{1}{f(z)} \ll \left(\frac{1}{1 - \left(e^{\frac{M}{n}} - e^{-\frac{M}{n}}\right)\frac{z}{1-z}}\right)^n.$$

Die rechten Seiten sind hier aber gleich

$$\left(1 + \frac{2Mz}{1-z}\,\frac{(1 + c_n^{(5)})}{n}\right)^n = e^{\frac{2Mz}{1-z}(1+c_n^{(6)})} \text{ bzw. } \frac{1}{\left(1 - \frac{2Mz}{1-z}\,\frac{(1+c_n^{(7)})}{n}\right)^n} = e^{\frac{2Mz}{1-z}(1+c_n^{(8)})},$$

wo $c_n^{(5)}, c_n^{(6)}, c_n^{(7)}, c_n^{(8)}$ für $n \to \infty$ gleichmäßig in $|z| \leqq \frac{1}{2}$ gegen 0 konvergieren, und konvergieren daher für $n \to \infty$ gleichmäßig in $|z| \leqq \frac{1}{2}$ gegen $e^{\frac{2Mz}{1-z}}$. Daher konvergieren nach dem Weierstrassschen Doppelreihensatz die rechten Seiten von (12) für $n \to \infty$ koeffizientenweise gegen $e^{\frac{2Mz}{1-z}}$, womit die Relationen

$$(13) \qquad f(z) \ll e^{\frac{2Mz}{1-z}}, \quad \frac{1}{f(z)} \ll e^{\frac{2Mz}{1-z}}$$

bewiesen sind.

Setzt man $e^{\frac{2Mz}{1-z}} = 1 + A_1(M)z + A_2(M)z^2 + \cdots$, so folgt aus

$$e^{\frac{2Mz}{1-z}} = 1 + \frac{1}{1!}\left(\frac{2Mz}{1-z}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{2Mz}{1-z}\right)^2 + \cdots;$$

daß $A_k(M)$ ein Polynom k-ten Grades in M mit dem höchsten Koeffizienten $\frac{2^k}{k!}$ ist. Daraus folgt für $M \to \infty$

$$(14) \qquad \frac{A_k(M)}{M^k} \to \frac{2^k}{k!}, \qquad (M \to \infty).$$

4. Koeffizientenabschätzungen zum Schottkyschen Satz. Wir wollen endlich mit Hilfe der Abschätzungen (5) und (6) die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklungen von $f(z)$ in der Umgebung des Nullpunktes abschätzen, wenn $f(z)$ für $|z| < 1$ regulär und von 0 und 1 verschieden ist. Die Cauchysche Abschätzung liefert sofort nach (5)

$$(15) \qquad \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} < \frac{e^{200d\frac{\lg\frac{e}{\vartheta}}{\vartheta}}}{(1-\vartheta)^k}, \quad 0 < \vartheta < 1, \; |f(0)| = f_0, \; d = \operatorname{Max}(1, \lg f_0).$$

[1] Dabei benutzen wir, daß aus $g(z) \ll p(z)$, wo $p(z)$ positive Koeffizienten hat, auch $\frac{1}{1 - zg(z)} \ll \frac{1}{1 - zp(z)}$ folgt.

Setzen wir hier $\vartheta = \frac{1}{\sqrt{k}}$ für $k \geqq 4$, so folgt wegen $1 - \alpha > e^{-(\alpha+\alpha^2)}$ für $0 < \alpha \leqq \frac{1}{2}$, $1 - \frac{1}{\sqrt{k}} > e^{-\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{k}}$,

$$\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} < e^{200 d \sqrt{k} \lg (e\sqrt{k})} e^{1 + \frac{1}{\sqrt{k}}} < e^{400 d \sqrt{k} \lg (ek)},$$

$$\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} < e^{400 d \sqrt{k} \lg (ek)}. \tag{16}$$

Für $k = 1, 2, 3$ setzen wir aber $\vartheta = \frac{3}{4}$ und erhalten

$$\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} < 4^3 e^{300 d \lg \frac{4}{3} e} < e^{400 d \lg e} \leqq e^{400 d \sqrt{k} \lg (ek)},$$

so daß (16) also für alle $k \geq 1$ gilt. Die so sich ergebende Majorante liefert eine sehr günstige Abschätzung für große k und stellt eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius 1 dar. Übrigens läßt sich in ihr — ebenso wie in den weiter unten herzuleitenden Relationen (17), (19) — eventuell unter Änderung der numerischen Koeffizienten, $\sqrt{k} \lg (ek)$ durch $\sqrt{k}$ ersetzen, wenn man die genauere Abschätzung des Schottkyschen Satzes heranzieht, die aus der Theorie der elliptischen Modulfunktion folgt. Dagegen sind die durch (16) gelieferten Größenordnungen für große d sehr ungünstig.

Eine andere allgemeine Abschätzung erhalten wir folgendermaßen: Es sei $e^c \geqq |f(0)| \geqq e^{-c}$, $c \geqq 1$ und $[c] = \gamma$. Dann betrachten wir irgendeine Bestimmung $\phi(z)$ von $\sqrt[\gamma+1]{f(z)}$, für die offenbar $e^{-1} < |\phi(0)| < e$ ist. Für die Entwicklung von $\phi(z)$ in der Umgebung des Nullpunktes liefert (15) für $\vartheta = 1 - \frac{1}{30}$ die Majoranten

$$|\phi(0)| + \frac{e^{200 \frac{\lg \frac{e}{\vartheta}}{\vartheta}}}{1-\vartheta} \frac{z}{1 - \frac{z}{1-\vartheta}}, \quad |\phi(0)| + \frac{e^{225} z}{1 - 30z}.$$

Daher erhalten wir für $\frac{\phi(z)}{\phi(0)}$ als Majorante wegen $e^{-1} < |\phi(0)| < e$

$$\frac{\phi(z)}{\phi(0)} \ll 1 + \frac{e^{226} z}{1 - 30z} \ll \frac{1}{1 - e^{226} z}.$$

Hieraus folgt durch Erhebung in die $(\gamma+1)$-te Potenz (wegen $\gamma \leqq c$)

$$\frac{f(z)}{f(0)} \ll \left(\frac{1}{1 - e^{226} z}\right)^{\gamma+1} = (1 - e^{226} z)^{-(\gamma+1)} \ll (1 - e^{226} z)^{-(c+1)},$$

$$f(z) \ll f_0 (1 - e^{226} z)^{-(c+1)}, \qquad f_0 = |f(0)|,$$

$$\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \leqq f_0 e^{226 k} \binom{c+k}{k}$$

oder, wegen $\binom{c+k}{k} \leqq 2c^k$,

$$\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \leqq f_0 e^{230k} c^k, \quad f(z) \ll \frac{f_0}{1-e^{230}cz}.^{1}$$

Um eine günstigere Abschätzung zu erhalten, schätzen wir $\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!}$ für $k > d$ und $k \leqq d$ gesondert ab. Ist zuerst $d < k \leqq 4d$, so folgt aus (15) für $\vartheta = 1 - \frac{1}{30}$, wegen $k \leqq 2\sqrt{kd}$

$$\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} < \left(\frac{e^{200\frac{\lg\frac{e}{\vartheta}}{\vartheta}}}{1-\vartheta}\right)^k < (30e^{220})^k < e^{225k} \leqq e^{450\sqrt{kd}}, \quad (d < k \leqq 4d).$$

Für $k > 4d$ setzen wir aber in (15) $\vartheta = \sqrt{\frac{d}{k}}$ und erhalten wegen $1 - \alpha > e^{-(\alpha+\alpha^2)}$ für $0 < \alpha \leqq \frac{1}{2}$

$$\sqrt[\sqrt{dk}]{\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!}} \leqq \frac{e^{200\lg\left(e\sqrt{\frac{k}{d}}\right)}}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{d}}}\right)^{\sqrt{\frac{k}{d}}}} < e^{200\lg(ek)+1+\sqrt{\frac{d}{k}}} < e^{450\lg(ek)}$$

$$\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} < e^{450\sqrt{kd}\lg ek}, \quad (k > 4d).$$

Für $k \leqq d$ oder allgemeiner für $k \leqq 400c$ gehen wir aber so vor: Aus (3) folgt, daß $\frac{f\left(\left(1-\frac{1}{e}\right)z\right)}{f(0)}$ für $|z| \leqq 1$ absolut höchstens gleich e^{400c} ist. Daher folgt aus (11) für $k \leqq 400c$

$$\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \cdot \left(1-\frac{1}{e}\right)^k \leqq f_0 \left(\frac{4000c}{k}\right)^k, \quad \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \leqq \left(\frac{8000c}{k}\right)^k f_0 < \left(\frac{e^9 c}{k}\right)^k f_0.$$

Zusammenfassend erhalten wir als Endresultat:

Ist $f(z)$ für $|z| < 1$ regulär und von 0 und 1 verschieden, und wird $|f(0)| = f_0$, $d = \text{Max}(1, \lg f_0)$, $c = \text{Max}(1, |\lg f_0|)$ gesetzt, so gilt

$$(17) \qquad \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \leqq e^{400\sqrt{k}\lg(ek)} \qquad (f_0 \leqq e)$$

$$(18) \qquad f(z) \ll f_0(1-e^{226}z)^{-(c+1)} \ll \frac{f_0}{1-e^{230}cz}$$

[1] Für $k = 1$, $c \to \infty$ ist die Abschätzung $f'(0) = o(f_0 \lg f_0)$ bekannt und in einem Resultat von Landau enthalten (l. c. p. 298). Vgl. ferner Gronwall, C. R. 155 (1912), pp. 764 bis 766, sowie Bernays, Vierteljahrsschrift Zür. Nat. Ges. 58 (1913), pp. 229—230.

$$(19)\qquad \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \leqq e^{450\sqrt{kd}\,\lg(ek)} \quad (k > d); \qquad \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \leqq f_0\left(\frac{e^9 c}{k}\right)^k, \quad (k \leqq 400\,c).$$

Wir leiten zum Schluß noch genaue asymptotische Schranken für $\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!}$ für $f_0 \to 0$ bzw. $f_0 \to \infty$ her. Wir behaupten:

Es sei $\phi_k(\alpha)$ die obere Grenze von $\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!}$ für die Gesamtheit der Funktionen $f(z)$ mit $f(0) = \alpha$, die für $|z| < 1$ regulär und von 0 und 1 verschieden sind. Dann gilt für $\alpha \to 0$ bzw. $\alpha \to \infty$

$$(20)\qquad \frac{\phi_k(\alpha)}{|\alpha|\,|\lg|\alpha||^k} \to \frac{2^k}{k!}.$$ [1]

Denn es sei $f(z) = \alpha + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ für $|z| < 1$ regulär und von 0 und 1 verschieden, und es sei $|f(0)| = |\alpha| < \frac{1}{e}$. Dann ist $\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{\alpha} + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots$ eine Funktion mit analogen Eigenschaften und dem absoluten Betrag $\left|\frac{1}{\alpha}\right| > e$ im Nullpunkt, und zwar offenbar die allgemeine Funktion dieser Art, wenn $f(z)$ die allgemeine Funktion mit den obigen Eigenschaften ist. Wird $200\,\frac{\lg\frac{e}{1-r}}{1-r}$ für $0 < r < 1$ mit $\omega(r)$ bezeichnet, so folgt aus $\underset{|z|<1}{|f(rz)|} < e^{\omega(r)}$ nach (13), angewandt auf $\frac{f(z)}{f(0)}$:

$$f(rz) \ll |\alpha|\, e^{\frac{2(c+\omega(r))z}{1-z}}, \qquad \frac{1}{f(rz)} \ll \frac{1}{|\alpha|}\, e^{\frac{2(c+\omega(r))z}{1-z}}, \qquad c = -\lg|\alpha|.$$

Daraus folgt aber nach (14), da für jedes feste r mit $0 < r < 1$ $\frac{\omega(r)}{c} \to 0$ für $c \to \infty$ ist,

$$\overline{\lim_{\alpha\to 0}}\, \frac{\phi_k(\alpha)\, r^k}{|\alpha|\,|\lg|\alpha||^k} \leqq \frac{2^k}{k!}, \quad \overline{\lim_{\alpha\to \infty}}\, \frac{\phi_k(\alpha)\, r^k}{|\alpha|\,|\lg|\alpha||^k} \leqq \frac{2^k}{k!}$$

und daher für $r \to 1$

$$\overline{\lim_{\alpha\to 0}}\, \frac{\phi_k(\alpha)}{|\alpha|\,|\lg|\alpha||^k} \leqq \frac{2^k}{k!}, \quad \overline{\lim_{\alpha\to \infty}}\, \frac{\phi_k(\alpha)}{|\alpha|\,|\lg|\alpha||^k} \leqq \frac{2^k}{k!}.$$

Andererseits beachte man, daß die reelle Transformation $w = \frac{1-z}{1+z}$ das Innere des Einheitskreises in das Innere der rechten Halbebene $\Re w > 0$ überführt (da die Bildkurve des Einheitskreises durch 0 und ∞ hindurchgeht und auf der reellen Achse senkrecht steht und der Punkt $z = 0$ in $w = 1$ übergeführt wird), so daß für $|\alpha| = e^c$, $c \gtrless 0$, $f(z) = \frac{\alpha}{|\alpha|}\, e^{c\frac{1-z}{1+z}}$ für $|z| < 1$ re-

[1] Für $k = 1$ ist dies von Landau (l. c., p. 298) bewiesen worden; vgl. auch Bernays (l. c., pp. 225—228).

gulär und $\neq 0$, $\neq 1$, sowie $f(0) = \alpha$ ist. Nun gilt aber nach (14) für $|\lg|\alpha|| \to \infty$

$$f(z) = \alpha e^{-\frac{2cz}{1+z}}, \quad f(-z) = \alpha e^{\frac{2cz}{1-z}}, \quad \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} = |\alpha| A_k(|\lg|\alpha||),$$

$$\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!\,|\alpha|\,|\lg|\alpha||^k} \to \frac{2^k}{k!}, \quad \varliminf \frac{\phi_k(\alpha)}{|\alpha|\,|\lg|\alpha||^k} \geqq \frac{2^k}{k!}, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Man sieht, daß die oberen Grenzen $\phi_k(\alpha)$ für alle Koeffizienten simultan bei einer festen Funktionenschar $\frac{\alpha}{|\alpha|} e^{c\frac{1-z}{1+z}}$ »asymptotisch erreicht« werden.

Über das Extremum der Bogenlänge einer Raumkurve bei vorgeschriebenen Einschränkungen ihrer Krümmung.

Von Erhard Schmidt.

(Vorgetragen am 14. Mai 1925 [s. oben S. 300].)

Einleitung.

H. A. Schwarz hat bekanntlich die folgenden beiden Sätze entdeckt:

I. Jeder von einem Kreisbogen verschiedene Raumkurvenbogen mit der konstanten Krümmung $\frac{1}{R}$, welcher zwei Punkte von der Entfernung $d < 2R$ verbindet, ist entweder länger als der längere oder kürzer als der kürzere der beiden Kreisbögen, welche im Kreise vom Radius R zur Sehne d gehören.

II. Eine geschlossene Raumkurve mit höchstens einer Ecke und einer die Schranke $\frac{1}{R}$ nirgends überschreitenden Krümmung hat mindestens den Umfang $2\pi R$.

A. Schur hat dem Satz I folgende interessante Verallgemeinerung gegeben:

III. Ein ebener Kurvenbogen bilde mit seiner Sehne die Begrenzung eines konvexen Bereiches. Dann wird bei jeder Verwindung, d. h. bei jeder Transformation der Kurve unter Erhaltung der Bogenlängen und Krümmungen die Sehne länger. M. a. W.: Bezeichnet $\bar{l}$ die Länge der ebenen Kurve, $\bar{d}$ die Länge ihrer Sehne und $\frac{1}{\bar{\rho}(s)}$ die Krümmung als Funktion der vom Anfangspunkt gemessenen Bogenlänge und bezeichnen l, d, $\frac{1}{\rho(s)}$ die entsprechenden Größen für die transformierte Raumkurve, so folgt aus

$$l = \bar{l}, \quad (1) \qquad \frac{1}{\rho(s)} = \frac{1}{\bar{\rho}(s)}: \quad (2) \qquad d \geqq \bar{d}. \quad (3)$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur im Falle der Kongruenz.

Aus diesem Theorem fließt, wie A. Schur[1] gezeigt hat, unmittelbar der Satz I von Schwarz. Wir können nämlich voraussetzen, daß die Länge l des Raumkurvenbogens $< 2\pi R$ ist, da sonst die Aussage des Schwarzschen Theorems von vornherein erfüllt ist. Vergleicht man nun die Raumkurve mit einem Bogen von gleicher Länge auf dem Kreise mit dem Radius R, so sind die

[1] Mathem. Annalen 83 (1921) S. 143—148.

Voraussetzungen des Theorems von A. SCHUR erfüllt. Die Sehne dieses Kreisbogens $\bar{d}$ ist also $< d$, der Bogen mithin entweder größer als der größere oder kleiner als der kleinere der beiden zur Sehne d gehörigen Kreisbögen.

A. SCHUR stützt den Beweis seines schönen Satzes auf das Verfahren der Annäherung durch Polygone, dessen völlige Durchführung sich wohl etwas kompliziert gestalten dürfte.

BLASCHKE[1] hat elegante Beweise der Sätze von SCHWARZ und SCHUR gegeben. RADON[2] verdankt man ein Beweisverfahren unter Heranziehung des Begriffs der geodätischen Krümmung.

Im folgenden sollen diese Theoreme und einige verwandte Sätze in einer, wie mir scheint, sehr einfachen und durchsichtigen Weise bewiesen werden.

Im § 1 wird bewiesen:

IIIa. Das Theorem von A. SCHUR mit der naheliegenden Erweiterung, daß die Voraussetzung (2) durch die Voraussetzung

$$\frac{1}{\rho(s)} \leq \frac{1}{\bar{\rho}(s)} \tag{4}$$

ersetzt wird. Auch hier kann Gleichheit von d und $\bar{d}$ nur im Falle der Kongruenz eintreten.

Aus diesem Satze fließt nicht nur der Satz I mit der kleinen Erweiterung, daß die Voraussetzung der konstanten Krümmung durch die Voraussetzung einer $\frac{1}{R}$ nirgends überschreitenden Krümmung ersetzt wird, sondern ebenso unmittelbar auch der Satz II von SCHWARZ.

Wählt man nämlich im Falle des Vorhandenseins eines Eckpunktes diesen, sonst einen beliebigen Punkt als Anfangs- und Endpunkt des Raumkurvenbogens, so ist $d = 0$. Wäre nun die Länge des geschlossenen Raumkurvenbogens $< 2\pi R$, so wären beim Vergleiche mit dem Bogen von gleicher Länge auf dem Kreise mit dem Radius R die Voraussetzungen des Satzes IIIa erfüllt, während sich im Widerspruch zur Aussage des Satzes $d < \bar{d}$ ergäbe. Aber auch gleich $2\pi R$ kann die Länge der geschlossenen Raumkurve nur dann sein, wenn die Kurve ein Kreis mit dem Radius R ist; denn der Satz IIIa bleibt auch gültig, wenn $\bar{d} = 0$ ist, d. h. wenn Anfangs- und Endpunkt des ebenen Kurvenbogens zusammenfallen.

Den weiteren Sätzen schicken wir folgendes voraus:

Bezeichnet v die einzige zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ gelegene Wurzel der Gleichung

$$\operatorname{cotg} u - u = 0,$$

---

[1] Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburger Universität Bd. 1. Heft 1. S. 49—53. W. BLASCHKE, Vorlesungen über Differentialgeometrie I, Verlag Springer, Berlin 1921, S. 45—51.

[2] W. BLASCHKE, Vorlesungen über Differentialgeometrie I, Verlag Springer, Berlin 1921, S. 92—93.

so wächst die Funktion $u \cdot \cos u$, wenn das Argument u von 0 bis v wächst, monoton von 0 bis $m = v \cos v$ und nimmt, wenn das Argument u von v bis $\frac{\pi}{2}$ wächst, monoton von m bis 0 ab.

Wir definieren nun die Gesamtkrümmung k eines Kurvenbogens durch die Gleichung

$$k = \int_0^l \frac{1}{\rho(s)} ds \tag{5}$$

und die Durchschnittskrümmung durch den Quotienten $\frac{k}{l}$, wobei l die Länge des Bogens bedeutet und $\frac{1}{\rho(s)}$ natürlich positiv zu nehmen ist.

Dann ergibt sich folgendes Analogon zum Satze I:

IV. Jeder Raumkurvenbogen mit einer Durchschnittskrümmung $\leqq \frac{1}{R}$, welcher zwei Punkte von der Entfernung $d < 2mR$ verbindet, hat eine Länge, die entweder größer als $2u_2R$ oder kleiner als $2u_1R$ ist, wobei u_1 die zwischen 0 und v gelegene und u_2 die zwischen v und $\frac{\pi}{2}$ gelegene Wurzel der Gleichung

$$u \cdot \cos u = \frac{d}{2R}$$

bezeichnen.

V. Ein Raumkurvenbogen von der Länge l, welcher zwei Punkte von der Entfernung d verbindet, habe die Gesamtkrümmung $k \leqq \pi$.

Dann ist:

$$d \geqq l \cdot \cos \frac{k}{2}. \tag{6}$$

§ 1.

Beweis des Satzes IIIa.

Um die Aufmerksamkeit nicht abzulenken, setzen wir zunächst voraus, daß die Krümmung stetig und $\bar{d} > 0$ sei.

Es mögen der Punkt $\bar{P}$ die ebene Kurve $\bar{C}$ und der Punkt P die Raumkurve C — gleichzeitig von den Anfangspunkten ausgehend — mit der Geschwindigkeit 1 durchlaufen. Dann durchlaufen die Richtungspunkte $\bar{\mathfrak{P}}$ und $\mathfrak{P}$ ihrer Geschwindigkeiten auf der Einheitskugel ihre Bahnen mit den Geschwindigkeiten $\frac{1}{\bar{\rho}(s)}$ und $\frac{1}{\rho(s)}$.

Wegen (4) ist mithin, wenn $\bar{\mathfrak{P}}$ und $\bar{\mathfrak{P}}'$ zwei beliebige Lagen der von $\bar{\mathfrak{P}}$ beschriebenen Bahn bezeichnen und $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ die entsprechenden Punkte der von $\mathfrak{P}$ beschriebenen Bahn sind,

$$\text{Bogenlänge } \mathfrak{P}\mathfrak{P}' \leqq \text{Bogenlänge } \bar{\mathfrak{P}}\bar{\mathfrak{P}}'. \tag{7}$$

Es möge nun $(\overline{\mathfrak{P}}\,\overline{\mathfrak{P}}')$ den zwischen o und π liegenden Winkel zwischen den Richtungen bezeichnen, die den Punkten $\overline{\mathfrak{P}}$ und $\overline{\mathfrak{P}}'$ entsprechen; in gleicher Weise definiere man $(\mathfrak{P}\,\mathfrak{P}')$.

Da $\overline{C}$ eben und konvex ist, läuft $\overline{\mathfrak{P}}$ auf einem größten Kreise in einem Sinne. Wenn also

$$\text{Bogenlänge } \overline{\mathfrak{P}}\,\overline{\mathfrak{P}}' \leqq \pi \tag{8}$$

ist, so ist

$$\text{Bogenlänge } \overline{\mathfrak{P}}\,\overline{\mathfrak{P}}' = (\overline{\mathfrak{P}}\,\overline{\mathfrak{P}}'). \tag{9}$$

Wegen der geodätischen Eigenschaft der Großkreisbögen folgt ferner

$$(\mathfrak{P}\,\mathfrak{P}') \leqq \text{Bogenlänge } \mathfrak{P}\,\mathfrak{P}'. \tag{10}$$

Aus (7), (9), (10) folgt also, daß unter der Voraussetzung (8)

$$0 \leqq (\mathfrak{P}\,\mathfrak{P}') \leqq (\overline{\mathfrak{P}}\,\overline{\mathfrak{P}}') \leqq \pi \tag{11}$$

gilt.

Es bezeichne nun $\overline{P}'$ denjenigen Punkt der ebenen Kurve $\overline{C}$, in welchem die Tangente der Sehne parallel ist. Der Durchlaufungssinn der Tangente in $\overline{P}'$ stimmt dann mit der Richtung der vom Anfangspunkt zum Endpunkt gerichteten Sehne überein. Die dem Punkte $\overline{P}'$ auf der Raumkurve C und den Bahnen der Punkte $\overline{\mathfrak{P}}$ und $\mathfrak{P}$ entsprechenden Punkte seien P', $\overline{\mathfrak{P}}'$ und $\mathfrak{P}'$. Wegen der Voraussetzung der Konvexität des von der ebenen Kurve $\overline{C}$ und ihrer Sehne begrenzten Bereiches ist bei dieser Wahl von $\overline{P}'$ für alle Punkte $\overline{\mathfrak{P}}$ die Voraussetzung (8) gesichert. Mithin gilt die Ungleichung (11).

Nun ist $\overline{d}$ gleich der Projektion von $\overline{C}$ auf die $\overline{\mathfrak{P}}'$ entsprechende Richtung. Es ist also bei Berücksichtigung von (1):

$$\overline{d} = \int_0^l \cos(\overline{\mathfrak{P}}\,\overline{\mathfrak{P}}')\,ds. \tag{12}$$

Ferner ist die Projektion von d auf die $\mathfrak{P}'$ entsprechende Richtung gleich der Projektion von C auf diese Richtung. Da d nicht kleiner sein kann als eine Projektion von d, so ist mithin:

$$d \geqq \int_0^l \cos(\mathfrak{P}\,\mathfrak{P}')\,ds. \tag{13}$$

Aus (11), (12), (13) folgt die zu beweisende Behauptung.

Ist $\overline{d} = 0$, d. h. fallen Anfangs- und Endpunkt des einen konvexen Bereich begrenzenden ebenen Kurvenbogens $\overline{C}$ — etwa im Punkte $\overline{A}$ — zusammen, so wähle man als Punkt $\overline{P}'$ einen Punkt des Bogens, in welchem die Tangente einer Stützgeraden in $\overline{A}$ parallel wird; im übrigen verläuft der Beweis unverändert.

Besteht die Kurve $\overline{C}$ etwa aus einer endlichen Anzahl von stetig gekrümmten Kurvenstücken, die miteinander Ecken bilden dürfen, so darf die Kurve C an den diesen Ecken entsprechenden Punkten ebenfalls Ecken auf-

weisen; doch darf der absolute Betrag des Richtungssprunges in den Ecken von C denjenigen des Richtungssprunges in den entsprechenden Ecken von $\bar{C}$ nicht überschreiten. Den Ecken entsprechen dann in den Bahnen von $\mathfrak{P}$ und $\bar{\mathfrak{P}}$ Lücken. Diese fülle man durch Großkreisbögen $< \pi$ aus. Sind dann $\bar{E}$ und E zwei einander entsprechende Ecken von $\bar{C}$ und C, so ist der $\bar{E}$ entsprechende Großkreisbogen jedenfalls nicht kürzer als der E entsprechende. Man ordne die Bögen punktweise einander so zu, daß, wenn der eine mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen wird, das auch für den anderen gilt. Nunmehr durchlaufen wieder $\bar{\mathfrak{P}}$ und $\mathfrak{P}$ stetige Kurven dergestalt, daß die Ungleichung (7) bestehen bleibt. Wählt man nun als $\bar{\mathfrak{P}}'$ den Richtungspunkt der mit der vom Anfangs- zum Endpunkt gerichteten Sehne $\bar{d}$ gleichgerichteten Tangente oder Stützgeraden von $\bar{C}$, so fällt $\bar{\mathfrak{P}}'$ gewiß auf die ergänzte Bahn von $\bar{\mathfrak{P}}$, und der Beweis verläuft wie oben.

Aus dem Beweise ergibt sich endlich unmittelbar, daß das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn $\bar{C}$ und C kongruent sind.

§ 2.
Beweis der Sätze IV und V.

Beweis des Satzes V:

Wir setzen zunächst voraus, daß die Krümmung der Kurve stetig ist.

Es bedeute $\mathfrak{P}$ wie oben das Bild des laufenden Kurvenpunktes bei der Abbildung durch die Tangentenrichtung auf die Einheitskugel. Dann ist die Länge des von $\mathfrak{P}$ durchlaufenen Bogens gleich der Gesamtkrümmung k. Es sei $\mathfrak{P}'$ derjenige Punkt des von $\mathfrak{P}$ durchlaufenen Bogens, in welchem seine Länge halbiert wird. Dann ist für jeden Punkt $\mathfrak{P}$

$$(\mathfrak{P}\mathfrak{P}') \leqq \text{Bogenlänge } \mathfrak{P}\mathfrak{P}' \leqq \frac{k}{2} \leqq \frac{\pi}{2}. \tag{14}$$

Nun ist die Projektion von d auf die $\mathfrak{P}'$ entsprechende Richtung gleich der Projektion von C auf diese Richtung, d. h. gleich

$$\int_0^l \cos(\mathfrak{P}\mathfrak{P}')\, ds.$$

Wegen (14) ist dieses Integral $\geqq l \cdot \cos\frac{k}{2}$. Da d nicht kleiner sein kann als eine Projektion von d, so ergibt sich

$$d \geqq l \cdot \cos\frac{k}{2}, \tag{15}$$

w. z. b. w.

Besteht die Kurve aus einer endlichen Anzahl von Stücken mit stetiger Krümmung, und definiert man die Gesamtkrümmung k als Summe der Gesamtkrümmungen der einzelnen Stücke vermehrt um die Summe der Richtungssprünge in den Ecken, so bleibt der Satz unverändert bestehen; zum Beweise verfahre man wie am Schlusse des vorigen Paragraphen.

Aus dem Beweise folgt ferner unmittelbar, daß das Gleichheitszeichen in der Ungleichung (15) nur dann gilt, wenn die Kurve aus den beiden Schenkeln des über d als Grundlinie errichteten gleichschenkligen Dreiecks mit dem Winkel $\pi - k$ an der Spitze besteht.

Beweis des Satzes IV:

Gemäß Voraussetzung ist

$$\frac{k}{l} \leqq \frac{1}{R}$$

$$k \leqq \frac{l}{R}.$$

Wir können

$$k \leqq \pi$$

annehmen, da andernfalls die Ungleichung

$$l \geqq 2 u_2 R$$

wegen $u_2 \leqq \frac{\pi}{2}$ und $l \geqq kR$ erfüllt ist.

Dann ist gemäß V

$$d \geqq l \cdot \cos \frac{l}{2R}$$

$$\frac{d}{2R} \geqq \frac{l}{2R} \cos \left(\frac{l}{2R}\right).$$

Aus dieser letzten Ungleichung ergibt sich, wenn man $\frac{l}{2R} = u$ setzt, unmittelbar die zu beweisende Behauptung.

Ich habe mich bei der Verallgemeinerung der Voraussetzungen in diesem und im vorigen Paragraphen auf stückweise stetig gekrümmte Kurven beschränkt. Wie der Leser sieht, läßt sich die Verallgemeinerung ohne jede Änderung des Beweisganges sehr viel weiter treiben. Man setze etwa die Existenz und Stetigkeit der Tangente bis auf höchstens abzählbar unendlich viele Ecken sowie die Rektifizierbarkeit der Bahnkurve des Tangentenrichtungspunktes voraus, deren den Ecken entsprechende Lücken nach der Vorschrift am Schluß des § 1 auszufüllen sind. Dann kann auf die Voraussetzung der Existenz der Krümmung verzichtet werden, indem die Aussagen über die Krümmung offenbar durch Aussagen über die Bogenlänge der in den Lücken ergänzten Bahnkurve des Tangentenrichtungspunktes ersetzt werden können. Die Gesamtkrümmung k ist als Gesamtlänge dieser Bahnkurve zu definieren.

Ausgegeben am 22. September.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1925 XXVI

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

Library of Congress
MAY 10 1920
Smithsonian Deposit

BERLIN 1925

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang einer aufzunehmenden Mitteilung soll in der Regel in den Sitzungsberichten bei Mitgliedern 32, bei Nichtmitgliedern 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte, in den Abhandlungen 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Abhandlungen nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 200 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1925

Library of Congress MAY 10 1926 Smithsonian Deposit

XXVI. Gesamtsitzung. 22. Oktober.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Roethe.

*1. Hr. Roethe sprach über ʻden ersten Teil des Nibelungenliedesʼ.

Während ziemlich allgemein anerkannt ist, daß dem letzten Drittel des Nibelungenliedes ein älteres episches Gedicht von der Nibelunge Not (auch schon in Strophen, nicht in Reimpaaren) zugrunde liegt, gibt die Auffassung des ersten Teils als Aufschwellung wesentlich einer älteren Quelle (eines Brunhildliedes) Anlaß zu Zweifeln. Die deutschen Lieder waren nicht in der Art vieler nordischer Lieder Gesamt- und Übersichtslieder, sondern die bevorzugte Darstellung einzelner Hauptszenen, etwa mit Rück- und Ausblicken, herrschte vor. Namentlich der Wortschatz, aber auch andere Kriterien in Sprache und Kunst des Nibelungenliedes deuten für die größere erste Hälfte auf mindestens 4 Quellen. Verweilt wurde bei der Dichtung von Siegfrieds Tode (rheinischer Herkunft).

2. Hr. Zimmermann legte eine Fortsetzung seiner früheren Arbeit über den Begriff der Knickgrenze vor.

Es wird darin eingehender nachgewiesen, daß die Berechnung der Knickfestigkeit aus der Spannung nicht ausführbar ist, und daß die Berechnungsweise Eulers auch für solche Druckstäbe genügt, die an Biegestäbe angeschlossen sind.

3. Hr. Rubner überreichte seine Schriften: »Die Verwertung des Roggens in ernährungsphysiologischer und landwirtschaftlicher Hinsicht« (Berlin 1925) und »Die Ernährung des Menschen mit besonderer Berücksichtigung der Ernährung bei Leibesübungen« (Berlin 1925).

4. Hr. Eduard Meyer legte seine als Nachtrag zum I. Bande seiner Geschichte des Altertums erschienene Schrift über »Die ältere Chronologie Babyloniens, Assyriens und Ägyptens« (Stuttgart und Berlin 1925) vor.

5. Hr. Burdach überreichte den 2. Teil des I. Bandes seiner »Gesammelten Schriften zur Geschichte des deutschen Geistes«, »Vorspiel« (Halle a. S. 1925); ferner die 3. Lieferung des mit Unterstützung der Akademie herausgegebenen Werkes »Briefwechsel der Brüder Jacob und Wilhelm Grimm mit Karl Lachmann«, hrsg. von Albert Leitzmann (Jena 1925) und das im Zusammenhange mit seinen eigenen Arbeiten entstandene Buch von Paul Piur »Petrarcas ʻBuch ohne Namenʼ und die päpstliche Kurie« (Halle a. S. 1925); endlich seinen Aufsatz »Moderner Geschichtssubjektivismus und die Berliner Geschichtswissenschaft« (Sonderabdruck aus »Euphorion«) (Leipzig und Wien 1925).

6. Hr. Spranger überreichte die 5. Aufl. seines Buches »Lebensformen« (Halle a. S. 1925).

7. Hr. Guthnick legte den 4. Band der »Geschichte des Fixsternhimmels« (Karlsruhe 1925) vor.

8. Hr. Engler übersandte sein Buch »Die Pflanzenwelt Afrikas«, V. Band, 1. Heft, 1. Teil (Leipzig 1925),

9. das Ehrenmitglied Hr. Andreas Heusler in Basel seine »Deutsche Versgeschichte mit Einschluß des altenglischen und altnordischen Stabversreimes«, Band I (Berlin und Leipzig 1925),

10. das korrespondierende Mitglied Hr. W. Caland in Utrecht seine Schrift: »Eine dritte Mitteilung über das Vādhulāsutrā«.

11. Hr. Marcks legte vor: »Deutsches Biographisches Jahrbuch«, herausgegeben vom Verbande der Deutschen Akademien, Überleitungsband I: 1914 bis 1916 (Berlin und Leipzig 1925),

12. Vorgelegt wurden ferner der 33. Band des von der Hermann-und-Elise-geb.-Heckmann-Wentzel-Stiftung herausgegebenen Werkes »Die griechischen christlichen Schriftsteller der ersten drei Jahrhunderte«: »Origenes' Werke«, VIII. Band, hrsg. von W. A. Baehrens (Leipzig 1925),

13. »Deutsches Wörterbuch von Jacob Grimm und Wilhelm Grimm«, 14. Bd., 1. Abt., 6. Lief. und 15. Bd., 2. Lief. (Leipzig 1925) und »Rheinisches Wörterbuch«, herausgegeben von Josef Müller, 1. Band, 7. Lief. (Bonn und Leipzig 1925), und

14. endlich die mit Benutzung des Archivs der Akademie herausgegebene Schrift von Wilhelm Erman »Der tierische Magnetismus in Preußen vor und nach den Freiheitskriegen« (München und Berlin 1925).

15. Das ordentliche Mitglied der philosophisch-historischen Klasse Hr. Eduard Meyer feierte am 28. Juli, das ordentliche Mitglied der physikalisch-mathematischen Klasse Hr. Friedrich Schottky am 14. August und das ordentliche Mitglied derselben Klasse Hr. Gustav Hellmann am 18. August das fünfzigjährige Doktorjubiläum. Die Akademie hat den Jubilaren Adressen gewidmet, die in diesem Stücke abgedruckt sind.

16. Die Akademie hat zu wissenschaftlichen Zwecken bewilligt
durch ihre physikalisch-mathematische Klasse:

420 RM für den XIV. Band der Euler-Ausgabe,
1000 RM für die anatomisch-anthropologischen Arbeiten von Prof. Dr. Schiefferdecker in Bonn;

durch ihre philosophisch-historische Klasse:

3000 RM für das Rheinische Wörterbuch,
182 RM dem Hrn. Dr. Juncker in Leipzig für Photographien der Summa des Simon von Bisignano.

Die Akademie hat das korrespondierende Mitglied ihrer physikalisch-mathematischen Klasse Hrn. Hugo Hildebrand Hildebrandsson in Upsala am 29. Juli und die korrespondierenden Mitglieder ihrer philosophisch-historischen Klasse Hrn. Arthur Chuquet in Villemomble und Hrn. Wilhelm Fröhner in Paris durch den Tod verloren.

Der Begriff der Knickgrenze. II.

Von H. Zimmermann.

I. Allgemeines.

Für die Andeutung auf S. 374 des gegenwärtigen Jahrganges der Sitzungsberichte, daß das Reden über den Begriff der Knickgrenze nicht mehr zeitgemäß erscheinen könnte, darf es als Bestätigung gelten, daß die Schlüsse, zu denen ich dort gekommen bin, von urteilsfähiger Seite als beinahe selbstverständlich bezeichnet worden sind. Wie aber, wenn andere Kreise sie im Gegenteil als unrichtig ansehen? Die Meinung, daß die Knickfestigkeit eines Stabes nicht durch eine Formbedingung gegeben, sondern durch die Berechnung seiner Spannung zu bestimmen sei, ist zwar von allen, die mit der Anwendung der Elastizitätslehre zu tun haben, seit Jahrzehnten verlassen und wird in den Lehrbüchern, besonders auch in den beiden Hauptwerken über Knickfestigkeit von Elwitz und von Mayer abgelehnt. Es gibt aber doch noch Leute, die auf diesem Standpunkte stehen, und die sogar den Anspruch erheben, besser zu wissen was richtig ist, als die anderen[1]. Die in dem früheren Aufsatze S. 375 unten als »manche Schriftsteller« bezeichneten Personen sind also tatsächlich nicht nur vorhanden, sondern auch durch die dort vorgebrachten Gründe nicht von der Unbrauchbarkeit ihres Verfahrens überzeugt worden. Das dürfte es entschuldigen, daß ich noch einmal auf den Gegenstand zurückkomme.

In Fragen der vorliegenden Art spielen zwar sogenannte Autoritäten keine sehr wichtige Rolle. Da aber die Anhänger der Spannungsberechnung sich mir gegenüber auf Grashof berufen, so möge dem, was von seinen Aussprüchen schon auf S. 374 angeführt wurde, jetzt noch die nachstehende Schlußbemerkung im Wortlaut beigefügt werden. Nachdem er gezeigt hat, wie die Ausbiegung des auf Knicken beanspruchten Stabes mit dem genauen Krümmungshalbmesser der Biegelinie berechnet werden kann, schließt er die Betrachtung [in der ersten Auflage seiner Festigkeitslehre (1866) S. 116, in der zweiten Auflage (1878) S. 172] mit folgenden Worten: »Somit vermag auch die genaueste Analyse nicht zu hindern, daß die Theorie der Knickung insofern eine schwache Seite der praktischen Festigkeitslehre ist, als man darauf verzichten muß, der allgemeinen Forderung (Nr. 26) ent-

---

[1] Vgl. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, August 1925, S. 346. Besprechung von Zimmermann: »Die Knickfestigkeit von Stäben mit nicht gerader Achse.« Der ungenannte Kritiker hat diese Abhandlung nicht verstanden.

sprechend hier die Verhältnisse so zu wählen, daß die Maximalwerte der Spannungen σ' und σ'' durch die Biegung des Stabes gegebenen Werten k' und k'' gleich werden, weil dann eine äußerst geringe Vergrößerung von P schon hinreichen würde, um σ' und σ'' bis zur Gefahr der Zerknickung zu steigern. Es bleibt nur übrig, die Verhältnisse so zu wählen, daß erst durch das n-fache der gegebenen Kraft P die theoretische Möglichkeit irgendeiner Biegung eintreten und damit die Gefahr der Zerknickung naherücken würde.« (Der hier gesperrte Satz ist auch von Grashof in der zweiten Auflage durch Sperrdruck hervorgehoben.) Da aber, wie Grashof vorher gezeigt hat, für die Last P, bei der die theoretische Möglichkeit irgendeiner Biegung eintritt, der gleiche Wert gefunden wird, ob man nach Euler oder mit dem genauen Krümmungshalbmesser rechnet, so gibt er offenbar mit vorstehendem Ausspruch gerade das preis, was das letztere Verfahren von dem Eulers unterscheidet. Das heißt: er verläßt das »genaue« Verfahren wieder, weil es unbrauchbar ist, und greift auf die Näherungsformel Eulers zurück.

Gegenüber den in früheren Zeiten immer wieder auftauchenden Versuchen, die Knickfestigkeitsfragen nach dem gewohnten Verfahren der Spannungsberechnung (das sich bei gezogenen Stäben und Trägern so gut bewährt hatte) zu lösen, habe ich im Jahre 1886 in einem Schriftchen mit dem Titel »Über den Sicherheitsgrad der Baukonstruktionen, insbesondere der auf Knicken beanspruchten Körper«[2] in Anlehnung an Grashof ausführlich auf die Nutzlosigkeit eines solchen Beginnens hingewiesen. Das hat wohl mit dazu beigetragen, daß das unbrauchbare Spannungsverfahren in der Technik längst vollständig verlassen ist. In mathematische Kreise scheint die Warnung dagegen weniger gedrungen zu sein. Man könnte das durch folgendes Bild veranschaulichen. Ein fünf Meter langer, vollkommen gerader und überall gleich beschaffener Rundeisenstab von etwa drei Zentimeter Dicke wird an den Enden genau rechtwinklig abgeschnitten und eben geschliffen. Man stellt ihn senkrecht auf eine genau wagerechte Richtplatte. Dann kann der Mathematiker sagen, der Stab befinde sich in sicherem (stabilem) Gleichgewicht. Denn die Mittelkraft der auf die Teile des Stabes wirkenden Schwere geht ja durch den Schwerpunkt der Stützfläche. Der Techniker dagegen wird diesen Zustand als höchst unsicher ansehen und es als eine unerläßliche Aufgabe betrachten, besondere Vorkehrungen zum Verhüten des Umfallens zu treffen. Geschähe das nicht, so würde aber wohl auch der Mathematiker sich sehr ungern in der Nähe eines solchen stabilen Stabes aufhalten.

II. Berechnung der Ausbiegung nach der genauen Gleichung der Biegelinie.

Bei vorstehendem Scherz will ich es nicht bewenden lassen, sondern versuchen, den Sachverhalt in einer etwas strengeren Form aufzuklären, und auch in allgemeinerer Darstellung, als es bisher geschehen ist. Wir gehen

[2] Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin.

dabei von GRASHOFS Grundformel für die genauere Berechnung aus, jedoch mit einigen die Übersicht erleichternden Änderungen. Vor allem soll nicht ein an einem Ende eingespannter, am anderen freier, sondern ein an beiden Enden frei drehbar gelagerter Stab von der Länge a und mit der Achsenkraft S betrachtet und die unanschauliche Größe EJ dadurch aus der Formel herausgeschafft werden, daß wir die EULERsche Knickkraft K, also

$$K = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 EJ \tag{1}$$

einführen, womit

$$EJ = \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 K.$$

Danach ist in der auf Seite 172 der zweiten Auflage der Elastizitätslehre abgedruckten Formel

$$\frac{2l}{\pi}\sqrt{\frac{P}{EJ}} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{P}{EJ}\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \left(\frac{P}{EJ}\left(\frac{\delta}{2}\right)^2\right)^2 + \cdots \tag{290}$$

zu setzen $2l = a$, $P = S$ und

$$\frac{2l}{\pi}\sqrt{\frac{P}{EJ}} = \frac{a}{\pi}\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \frac{S}{K}} = \sqrt{\frac{S}{K}}.$$

Hiermit geht (290) in die folgende Form über:

$$\sqrt{\frac{S}{K}} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{S}{K}\left(\frac{\delta}{a}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{S}{K}\left(\frac{\delta}{a}\right)^2\right)^2 + \cdots. \tag{2}$$

Um diese Gleichung nach $\delta : a$ aufzulösen, setzen wir abkürzend

$$\left(\frac{\pi}{2}\frac{\delta}{a}\right)^2 \frac{S}{K} = x \tag{3}$$

und erhalten mit leicht ausführbarer Hinzufügung eines weiteren Gliedes

$$\sqrt{\frac{S}{K}} - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 x + \left(\frac{3}{8}\right)^2 x^2 + \left(\frac{5}{16}\right)^2 x^3 + \cdots = y. \tag{4}$$

Nach dem bekannten Verfahren der Reihenumkehrung ergibt sich hieraus

$$x = \left(\frac{\pi}{2}\frac{\delta}{a}\right)^2 \frac{S}{K} = 4y - 9y^2 + \frac{31}{2}y^3 - \cdots$$

und nunmehr durch Auflösung nach $(\delta : a)^2$:

$$\left(\frac{\delta}{a}\right)^2 = \frac{16}{\pi^2}\frac{K}{S}\left(y - \frac{9}{4}y^2 + \frac{31}{8}y^3 - \cdots\right).^{3} \tag{5}$$

[3] Übereinstimmend in der Reihe der y mit Gl. 13 auf Seite 22 von RUDOLF MAYERS Buch »Die Knickfestigkeit«. — Die Reihe konvergiert bei den möglichen Werten von y schnell.

Die Reihe der y hätte leicht weiter fortgesetzt werden können; doch liegt hierfür kein Bedarf vor. Da y nach (4) nur Funktion von $S:K$ ist, so zeigt sich, daß das Verhältnis $\delta:a$ der Ausbiegung δ zur Stablänge a nur von dem Verhältnis der Stabkraft S zur Eulerschen Knicklast K abhängt. Das war anscheinend bisher nicht bekannt. Die umständlichen und unübersichtlichen Untersuchungen, die Grashof mit verschiedenen Annahmen über die Stabform anstellt, um sich ein Bild von der Tragweite seiner Formel (290) zu verschaffen, werden bei der hier vorgenommenen Umformung entbehrlich.

Aus (4) und (5) ergibt sich, daß für

$$S<K; \quad S=K; \quad S>K$$

$$\frac{\delta}{a} \text{ imaginär}; \quad \frac{\delta}{a}=0; \quad \frac{\delta}{a} \text{ reell}$$

ist.

III. Verhalten des Stabes in der Nähe der Eulerschen Knickgrenze.

Von besonderem Interesse ist es nun, festzustellen wie sich der Stab unmittelbar beim Überschreiten der Eulerschen Knickgrenze verhält, also wenn S durch K geht und nur sehr wenig größer ist als K. Dann ist y nach (4) eine sehr kleine Größe und können in (5) alle höheren Potenzen von y gegen die erste vernachlässigt werden. Die Gleichung für $(\delta:a)^2$ lautet also bei geringer Überschreitung der Eulerschen Knickgrenze

$$\left(\frac{\delta}{a}\right)^2=\frac{16}{\pi^2}\frac{K}{S}\left(\sqrt{\frac{S}{K}}-1\right). \tag{6}$$

Um diesen Fall bequemer weiter prüfen zu können, setzen wir

$$\frac{S}{K}=1+u, \tag{7}$$

wo nun u die sehr klein gedachte verhältnismäßige Überschreitung des Eulerwertes bestimmt. Dann folgt

$$\frac{K}{S}=\frac{1}{1+u}=1-u \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{S}{K}}=1+\frac{1}{2}u, \tag{8}$$

womit (6) übergeht in

$$\left(\frac{\delta}{a}\right)^2=\frac{8}{\pi^2}u \quad \text{oder} \quad \frac{\delta}{a}=\frac{2}{\pi}\sqrt{2u}. \tag{9}$$

Das ist die Gleichung einer Parabel mit der u-Achse als Hauptachse und dem unveränderlichen Parameter $2p=8:\pi^2$.

Im beifolgenden Bild sind diese Ergebnisse veranschaulicht. Die Werte von $S:K$ sind auf der Achse A—B von A aus nach oben aufgetragen. Wie schon bemerkt, ist $\delta:a$ imaginär, solange $S:K<1$. Bei $S:K=1$ wird $\delta:a=0$ durch den Punkt B abgebildet. Die bei weiterem Anwachsen von

Ausbiegung δ als Funktion von $u = (S:K) - 1$.

$S:K$ über 1 oder von u über Null hinaus entstehenden, nunmehr reellen Werte von $\delta:a$ sind von der Verlängerung der Richtung A—B aus nach rechts aufgetragen. Die oberhalb der Achse B—C liegenden senkrechten Abschnitte stellen also die Werte u dar. Da wir nur den in der Nähe des Scheitels liegenden Teil der Parabel betrachten, können wir statt ihrer den Krümmungskreis für den Scheitel setzen, dessen Halbmesser ρ_0 bekanntlich $= p$ ist, also hier

$$(10) \qquad \rho_0 = p = \frac{4}{\pi^2} = 0.4053\,.$$

Er erscheint als reine Zahl, weil auch $\delta:a$ und u reine Zahlen sind. Der Zahlenwert dieses Halbmessers hängt weder von den Maßen des Stabes noch von der Stabkraft ab. Anders ist es mit seinem Bild. Denn die Zahlen $\delta:a$ und u konnten nur im Bild aufgetragen werden wie beschrieben, indem für ihre Einheiten bestimmte Längen angenommen wurden, d. h. nach Wahl eines Maßstabes. Und zwar je eines Maßstabes für die $\delta:a$, da dies Längenverhältnisse, und für die u, da dies Kraftverhältnisse sind. Um keine Zweifel aufkommen zu lassen, möge das in der folgenden allgemeinen Form geschehen.

Es sei die Einheit für die Auftragung der Längenzahlen λ cm; der Kraftzahlen $\varkappa$ cm. Dann hat im Bild

$$(11) \qquad \frac{\delta}{a} \text{ die Länge } \lambda\frac{\delta}{a} = l\text{ cm}; \quad u \text{ die Länge } \varkappa u = k \text{ cm}.$$

Die Gleichung der im Bild dargestellten, auf das cm als Längeneinheit des Bildmaßstabes bezogenen Kurve lautet also nach (9) und (11)

$$(12) \qquad \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 = \frac{8}{\pi^2}\frac{k}{\varkappa} \quad \text{oder} \quad l^2 = \frac{8}{\pi^2}\frac{\lambda^2}{\varkappa}k\,.$$

Damit wird der Parameter der im Bilde dargestellten Parabel $2p = 8\lambda^2 : \pi^2\varkappa$ cm, also eine Länge, wie es sein muß. Und für den Krümmungshalbmesser r im Scheitel erhält man jetzt ebenfalls eine Länge, nämlich

$$(13) \qquad r = p = \frac{4\lambda^2}{\pi^2\varkappa}\text{ cm}\,.$$

Natürlich ist r ebenso wie ρ unabhängig von den Maßen und von der Belastung des Stabes. Hiernach kann man sich leicht ein Bild der Abhängigkeit der Ausbiegung δ von der Größe der Stabkraft S verschaffen.

Meist wird es aber genügen, den Betrag von δ für einen beliebig angenommenen »Schwellenwert« von u aus (9) zu berechnen. Das könnte z. B.

in der Form geschehen, daß man fragt, wie groß die Ausbiegung δ sei, wenn die Eulerslast um ein Tausendstel überschritten wird. Man findet

$$\frac{\delta}{a} = 0.6366 \sqrt{0.002} = 0.0278 . \tag{14}$$

Hiermit für eine Stablänge a von

$$\begin{cases} a = 1\ ;\quad 2\ ;\quad 3\ ;\quad 4\ ;\quad 5\ \text{m}. \\ \delta = 27.8;\quad 55.6;\quad 83.4;\quad 111.2;\quad 139.0\ \text{mm}. \end{cases} \tag{15}$$

Daß die Knicklast K, an solchen Hebelarmen wirkend, hohe zusätzliche Biegespannungen hervorrufen muß, ist klar. Ihre Höhe hängt von den Querschnittsmaßen und dem Schlankheitsgrade der Stäbe ab. Grashof und andere haben Berechnungen darüber angestellt. Deren bedarf es aber gar nicht; denn auf die Spannungen kommt es nicht an. Ausbiegungen, wie sie vorstehende Reihe zeigt, sind eben unter allen Umständen unzulässig, die Spannungen mögen sein, welche sie wollen. Man denke sich eine Kolbenstange, die bei jedem Doppelhub um 28 mm ausgebogen und wieder gerade gestreckt wird, oder eine Säule mit 80 bis 140 mm Durchbiegung in der Mitte! Solche Formänderungen treten aber nach der genauen Berechnung unbedingt ein, wenn die Eulerlast auch nur um ein Tausendstel überschritten wird. Ob die Stäbe im verbogenen Zustande in »stabilem« Gleichgewicht sind oder nicht, tut nichts zur Sache — die Ausbiegung selber ist das Unzulässige. Zu vermeiden ist sie nur dadurch, daß man mit Grashof vorschreibt: »Die Verhältnisse sind so zu wählen, daß erst durch das n-fache der gegebenen Kraft S die theoretische Möglichkeit irgendeiner Biegung eintreten kann.« D. h. indem man nach dem Eulerverfahren rechnet. (Siehe Abschnitt I.)

IV. Schlußbetrachtungen.

Einfacher als hiermit geschehen, lassen sich die Folgen einer Überschreitung der Eulerschen Knicklast wohl kaum klarmachen. Es bietet aber ein theoretisches Interesse, die dabei mitspielenden Vorgänge noch etwas mehr in ihren Einzelheiten zu betrachten.

Wie das Bild zu Gleichung (9) zeigt, ergibt die genauere Berechnung für den Verlauf von $\delta : a$ als Funktion von $u = S : K - 1$ die Kurve $B-D$, während für die Rechnung nach Euler die wagerechte Gerade $B-C$ gilt. Man sieht aber auch, daß diese beiden Linien in B ein wagerechtes Element gemeinsam haben. Eine unendlich kleine Zunahme der Stabkraft S über K hinaus bewirkt hier eine endliche Zunahme von $\delta : a$. In analytischer Form zeigt sich das, wenn man den Differentialquotienten von $\delta : a$ nach u bildet. Aus (9) folgt allgemein

$$\frac{d\frac{\delta}{a}}{du} = \frac{\frac{2}{\pi}}{\sqrt{2u}} , \tag{16}$$

also für den Punkt B mit $u = 0$

(17) $$d\frac{\delta}{a} = \infty \cdot du.$$

Geht man zur Grenze $du = 0$ über, so ergibt sich schließlich

(18) $$d\frac{\delta}{a} = \infty \cdot 0,$$

also ein unbestimmter Wert für die Zunahme der Ausbiegung δ. Da nun, wie früher gezeigt, $\delta = 0$ ist für $S = K$, so stellt $d\delta$ die bei beginnender Überschreitung von K entstehende Gesamtausbiegung dar. Diese ist also unbestimmt. Das erklärt es, warum sich für die Knicklast derselbe Wert ergibt, wenn man sie einmal nach Euler mit $\delta = 0 : 0$, das andere Mal nach dem genaueren Verfahren mit $\delta = 0$ berechnet. Im letzteren Falle erstreckt sich die Unbestimmtheit von δ aber nur auf den unendlich kleinen Bereich von $d\delta$, während sich bei der näherungsweisen Berechnung nach Euler nicht nur der Anfangswert $d\delta$, sondern δ selbst in größerer (endlicher) Ausdehnung unbestimmt ergibt.

Dieses Verhalten leuchtet vollkommen ein, wenn man erwägt, daß es so lange, wie überhaupt keine Biegung eintritt, also bis die Last den Eulerwert erreicht, gleichgültig sein muß, ob man mit dem genauen oder mit dem Näherungswert für den Krümmungshalbmesser rechnet. Der Einfluß der Ungenauigkeit des letzteren kann also bei Beginn der Biegung nur verschwindend klein sein. Beide Fälle müssen an der Eulerschen Knickgrenze ineinander übergehen; in beiden tritt zunächst Unbestimmtheit der Größe der Ausbiegung ein, die aber bei der genaueren Rechnung wieder verschwindet, wenn der Stab sich zu krümmen anfängt.

Hieraus folgt, daß auch bei der genaueren Berechnung der Biegelinie die in der früheren Arbeit unter III aufgestellte neue Art der Festsetzung der Knickgrenze gültig bleibt, wenn man sie in der Form ausspricht: Ein Stab oder ein Stabzug befindet sich unter dem Einfluß von Druckkräften an der Knickgrenze, wenn er einer kleinen Verbiegung keinen Widerstand entgegensetzt. Im übrigen ist diese Änderung praktisch bedeutungslos, denn die Berechnung der Knickbedingung hängt von der Größe der Verbiegung nicht ab. Und daß die etwa beim Anschluß von Knickstäben an Biegestäbe entstehenden merklichen Verbiegungen der ersteren an der Knickgrenze nur sehr kleine Gegenwirkungen hervorrufen können, läßt sich schon aus dem auf Seite 375 gegebenen und hier unter (15) wiederholten Zahlenbeispiel schließen. Damit ein an der Eulerschen Knickgrenze befindlicher gerader Stab von einem Meter Länge in seiner Mitte die große Durchbiegung von 28 mm erleide, braucht man seine Knicklast nach der genauen Berechnung nur um ein Tausendstel zu erhöhen. Die Biegungsmomente, die an den Enden des Stabes statt des Lastzuwachses angebracht werden müssen, um die gleiche, alles was in der Praxis vorkommt weit überschreitende Ausbiegung zu erzeugen, sind jedenfalls fast verschwindend klein. Also ist das auch der Biegewiderstand, den ein solcher Stab leisten kann.

Was sagt die Erfahrung zu diesen theoretischen Ergebnissen? Heutzutage sind wohl alle Beobachter darin einig, daß die Eulerformel durch die Versuche um so besser bestätigt wird, je mehr Sorgfalt man darauf verwendet, daß die Versuchseinrichtung den theoretischen Voraussetzungen entspricht. Bei den zahlreichen Knickversuchen, die das staatliche Materialprüfungsamt in Berlin-Dahlem für den Deutschen Eisenbauverband ausgeführt hat und noch ausführt, ist man darin zu einem, soviel bekannt, anderwärts kaum erreichten, alles Bisherige übertreffenden Grade der Feinheit gekommen. Als Beweis dafür kann wohl gelten, daß die von einem Lastkraftwagen in etwa 50 m Entfernung von der Versuchspresse hervorgerufenen Erschütterungen wiederholt genügt haben, um einen nahe bis zur Eulerschen Knickgrenze belasteten Stab plötzlich zum Ausknicken zu bringen. Man pflegt bei Annäherung an diese Grenze die Feinmeßgeräte abzunehmen, um sie vor Beschädigung bei dem ruckweisen Nachgeben der Stäbe zu bewahren. Von einem stabilen Gleichgewichtszustand nach Überschreitung der Eulergrenze hat wohl noch nie ein Beobachter etwas bemerkt, und noch weniger wird jemand daran gedacht haben, die Ausbiegungen zu messen, die der Theorie nach dabei auftreten. Die Vorgänge liegen in einem so engen Bereich wie etwa die Standsicherheit eines Seiltänzers; und die Überschreitung dieses Bereiches birgt — wenigstens für die Meßgeräte — ähnliche Gefahren wie für jenen ein kleiner Fehltritt auf dem Seil.

Alle diese Betrachtungen zusammenfassend, darf man nun wohl als völlig außer Zweifel gestellt ansehen, daß die Knickfestigkeit eines Stabes nicht aus seiner Spannung berechnet werden kann; daß ferner die Rechnung mit dem genauen Krümmungshalbmesser der Biegelinie bei Ermittlung der Knickgrenze zwecklos ist, weil sie keine andere Knicklast ergibt als die einfache Eulerformel, und daß schließlich auch bei der Berechnung von Druckstäben, die an Biegestäbe angeschlossen sind, der Biegewiderstand der Druckstäbe vernachlässigt werden darf, sobald sie bis zur Eulergrenze belastet sind.

Adresse an Hrn. Eduard Meyer zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 28. Juli 1925.

Hochgeehrter Herr Kollege!

Die Akademie bringt Ihnen zu Ihrem goldenen Doktorjubiläum ihre herzlichsten Glückwünsche dar, voll Freude und Stolz, Sie zu den Ihrigen zählen zu dürfen; setzen Sie doch die Reihe der großen Historiker fort, die, mit Niebuhr beginnend, der Akademie einen besonderen Glanz verliehen hat. — Als Sie vor 50 Jahren den Doktoreid schworen, stand Ihnen die antike Universalgeschichte als Ihr Lebensziel schon fest vor Augen, und zielbewußt hatten Sie Ihre Studienjahre zur Erlernung der orientalischen Sprachen verwendet, um auch die Quellen des Orients wie die des Okzidents selbständig verwerten zu können. Von packender Kühnheit war Ihr Plan, die gesamte alte Welt, von Asien und Ägypten bis zum Atlantischen Ozean, in Forschung und Darstellung zusammenzufassen; stand doch damals die namentlich durch die epochemachenden Entdeckungen des vorigen Jahrhunderts nach Niebuhr notwendig gewordene Arbeitsteilung und Spezialisierung noch in voller Blüte. Wohl lag die Idee der Wiederzusammenfassung schon in der Luft, wie der unzureichende, weil nicht überall auf eigenster Forschung beruhende Versuch Max Dunckers zeigte. Aber wie im geschichtlichen Leben der Völker — nach Ihren eigenen Worten in Ihrer Rektoratsrede — die Ideen erst wirksam werden, wenn eine schöpferische Einzelpersönlichkeit den entscheidenden Schritt vom Gedanken zur Tat vollzieht, so sind Sie es erst gewesen, der jene Idee von der Einheit der alten Geschichte wieder lebendig gemacht hat.

Nur mit Bewunderung und Staunen kann man heute auf die Summe Ihrer Arbeit blicken, die Sie in diesen 50 Jahren geleistet haben. Neben den 5 Bänden Ihres Hauptwerkes, der »Geschichte des Altertums«, die allein schon Ihnen die Führerschaft in Ihrer Wissenschaft sicherten, haben Sie noch eine kaum übersehbare Fülle von Einzeluntersuchungen, in Aufsätzen wie in selbständigen Werken, geschaffen, die der Begründung des in jener »Geschichte« Darzustellenden dienen. Auch hier auf die souveräne Beherrschung aller Quellen und Methoden gestützt und immer den weiten Blick des Universalhistorikers bewährend, der auch das Kleine und Kleinste im großen Zusammenhang erschaut, haben Sie hier Muster exaktester Detailforschung gegeben, wobei es Ihnen nichts ausmachte, ob Sie es mit ägyptischen oder babylonischen, hethitischen oder israelitischen oder aber mit griechischen oder römischen Problemen zu tun hatten. Dank Ihren weiten Kenntnissen auch

auf dem Gebiet der mittleren und der neueren Geschichte haben Sie für das lebendige Verständnis des Altertums auch aus den Parallelen dieser späteren Zeit lernen können und haben in manchen Schriften Altertum und Gegenwart verknüpft. Haben Sie doch als eine der Früchte Ihrer Amerikafahrt gar ein Buch über »Ursprung und Geschichte der Mormonen« herausgegeben, zu dem Sie durch lehrreiche Parallelen zu gewissen religiösen Erscheinungen des Altertums angeregt worden sind. So hat Ihr Schaffen mehr und mehr einen durchaus universalen Charakter bekommen, und weit über die Kreise Ihrer Fachwissenschaft gehen die Wirkungen Ihrer Lebensarbeit hinaus.

Als wir vom Ausbruch des Weltkrieges überrascht wurden, wollten Sie gerade darangehen, Ihre »Geschichte des Altertums« weiterzuführen. Statt dessen trieb Sie Ihr warmes deutsches Herz, in dem uns aufgezwungenen Kampf um die Existenz unseres Volkes in Wort und Schrift als aufrechter Mann für Ihre Überzeugung einzutreten. Als Sie wieder zur wissenschaftlichen Arbeit zurückfanden, griffen Sie nach einem Problem, das Sie auch in dieser Kampfeszeit innerlich packen konnte, und so entstand Ihr großes Werk über »Cäsars Monarchie und das Prinzipat des Pompeius«, dem dann in kurzer Zeit zu allgemeiner Überraschung ein dreibändiges Werk über »Ursprung und Anfänge des Christentums« folgte. Daß solche Werke in der Zeit der höchsten Not unseres Vaterlandes entstehen konnten, erfüllt die Akademie mit ganz besonderer Freude und bestärkt sie in dem festen Glauben an die trotz allem unzerstörbare Wurzelkraft unserer deutschen Wissenschaft, auf deren schmähliche Boykottierung durch unsere Feinde sie zumal auf solche Leistungen hin mit Gelassenheit herabblicken kann.

Mit aufrichtigem Dank gedenkt die Akademie am heutigen Tage auch der mannigfachen Förderung, die Sie im besonderen als Leiter der Orientalischen Kommission, aber nicht nur als solcher, immer voll lebendigen Interesses für die Arbeiten und Aufgaben der Akademie, durch Rat und Tat ihr haben zuteil werden lassen.

Mit Freude hat sie vernommen, daß Sie jetzt an die Weiterführung Ihrer »Geschichte des Altertums« gehen wollen. Die Akademie wünscht Ihnen von Herzen, daß Ihre erstaunliche Arbeitskraft Ihnen noch lange Jahre erhalten bleibe, und daß es Ihnen beschieden sei, den gigantischen Plan Ihrer Jugend in Rankeschem Alter zu Ende zu führen.

Die Preußische Akademie der Wissenschaften.

Adresse an Hrn. Friedrich Schottky zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 14. August 1925.

Hochgeehrter Herr Kollege!

Als Sie vor fünfzig Jahren Ihren Eintritt ins wissenschaftliche Leben nahmen, erregte Ihre, für die Funktionentheorie der mehrfach zusammenhängenden ebenen Bereiche grundlegende Dissertation die freudige Anerkennung Ihres Lehrers Weierstrass. Er fand in der Arbeit eine ganze Reihe schöner und durchaus neuer Sätze. Er lobte Ihre Erfindungsgabe und Ihr inniges Verwachsensein mit den Problemen, das es Ihnen erlaubte, zuweilen auch rein instinktmäßig das Rechte zu treffen. Zwar konnte Weierstrass das prinzipiell Neue und die grundlegende Bedeutung Ihrer Arbeit noch nicht voll würdigen. Aber er bewies einen guten Blick für die Art Ihres Schaffens. Und er hat recht behalten; unbeirrt von den Meinungen des Tages, unbeeinflußt von den Wünschen, die von außen an die Pforten des mathematischen Hauses pochen, ist Ihr wissenschaftliches Werk rein aus der Konsequenz der eigenen Fragestellung erwachsen. Stets folgten Sie dem Drang, der Sie trieb, grübelnd die Wahrheit zu erforschen.

Die Theorie der zu den mehrfach zusammenhängenden ebenen Bereichen gehörigen algebraischen und Abelschen Funktionen in allen ihren Tiefen zu erforschen, war das selbstgesteckte Ziel. Was Sie erdachten und erfanden, nimmt seinen Ausgang von hier. Die damit zusammenhängenden Fragen verfolgen Sie seit fünfzig und mehr Jahren unablässig. So sind, um nur einiges wenige besonders zu erwähnen, Ihre Dissertation und Ihre sich unmittelbar an diese anschließenden Untersuchungen grundlegend für die Theorie der automorphen Funktionen. Es ist Ihnen gelungen, vom Gegenstand Ihrer Dissertation ausgehend, einen Zugang zu gewissen Klassen nicht-Riemannscher Thetafunktionen zu gewinnen. Wir gedenken Ihrer schönen Untersuchungen über die Abelschen Funktionen und die Thetafunktionen vom Range drei und vier, die auch in ihrer Einfachheit und Klarheit das Werk von Weierstrass würdig fortsetzen. Der Theorie der analytischen Funktionen, die in einem Bereiche regulär sind und dort die Werte Null und Eins auslassen, haben Sie eine Reihe von Arbeiten gewidmet und insbesondere den »Schottkyschen Satz« entdeckt, in dem man den Fundamentalsatz der Theorie zu erblicken hat. So hat Ihnen auch hier Ihr Streben nach Einfachheit und Klarheit die eigentliche Schlüsselstellung erobert. Ihre Arbeit über die Wertschwankungen har-

monischer Funktionen ist grundlegend für die Funktionen gegebener Randschwankung und hat bei vielen Fragestellungen ähnlicher Art als Muster gedient.

In den letzten Jahren haben Sie sich, gleichsam um aufs neue die innere Einheit Ihrer Arbeiten zu beweisen, bald dieser, bald jener Seite Ihres Schaffens wieder zugewandt, unermüdlich eine Arbeit an die andere fügend. Möge es Ihnen vergönnt sein, noch lange in Frische und Rüstigkeit die Wissenschaft zu fördern.

Die Preußische Akademie der Wissenschaften.

Adresse an Hrn. Gustav Hellmann zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 18. August 1925.

Indem Ihnen, hochverehrter Herr Kollege, die Berliner Akademie der Wissenschaften die herzlichsten Glückwünsche an dem Tage darbringt, an welchem Sie vor 50 Jahren die Doktorwürde erlangten, vergegenwärtigt sie sich die große Summe wissenschaftlicher Arbeit, welche Sie geleistet haben. Schon ehe Sie mit Ihren Untersuchungen über die täglichen Veränderungen der Temperatur der Atmosphäre 1875 promovierten, hatten Sie für Landwirte über die sogenannten Bauernregeln geschrieben, die Verbreitung des Hagels erörtert und die klimatischen Verhältnisse der Provinz Schlesien geschildert. Auch über den internationalen Meteorologenkongreß hatten Sie berichtet. Die großen Themata, zu denen Sie immer wieder zurückkehrten, sind bereits in Ihren ersten Veröffentlichungen angeschnitten.

Die Erforschung der Hydrometeore ist vielleicht Ihr Lieblingsgegenstand. Weite Verbreitung hat Ihr Regenmesser gewonnen. Sie entwarfen Regenkarten der Provinzen Preußens und vom Reiche. Sie untersuchten den Niederschlag in den einzelnen norddeutschen Flußgebieten und gingen den Ursachen der Hochwässer nach. In allen ihren Formen studierten Sie die atmosphärische Feuchtigkeit. Ihr System der Hydrometeore krönt alle diese Arbeiten.

Lockt den einen Meteorologen das Wechselspiel des Wetters, so fesseln Sie mehr die wiederkehrenden Züge des Klimas. Von der Würdigung des Klimas Ihrer engeren Heimat, und später von Berlin, schritten Sie systematisch zur Darstellung des Klimas unseres Vaterlandes. Vorträge in unserer Akademie legen davon beredtes Zeugnis ab und erscheinen als Herolde eines Meisterwerkes, Ihres Klima-Atlas des Deutschen Reiches, dessen Erscheinen in einer sehr schweren Zeit Sie ermöglichten.

Jede Klimaforschung hat zur Voraussetzung streng einheitlich durchgeführte Beobachtung. Als Leiter des Preußischen Meteorologischen Instituts, an dessen Spitze Sie nach dem Tode von Bezold's berufen worden sind, haben Sie sich durch systematische Ausgestaltung und strenge Überwachung von dessen Beobachtungsnetz ein hohes Verdienst erworben. Gleich am Beginn Ihrer wissenschaftlichen Laufbahn mühten Sie sich um Vereinheitlichung der meteorologischen Beobachtungen. Im Verein mit dem Schweden Hildebrandsson schufen Sie den internationalen meteorologischen Kodex.

Nicht bloß der Vereinheitlichung der Beobachtung, sondern auch der Vertiefung des Studiums galten Ihre Bestrebungen auf den internationalen Meteorologenkongressen. Ihre Anregung zu einer allgemeinen meteorologischen

Bibliographie verwirklichten Sie für Deutschland durch Schaffung Ihres Repertoriums der deutschen Meteorologie, worin Sie die Leistungen der Deutschen auf dem Gebiete der Meteorologie und des Erdmagnetismus in mustergültiger Weise zusammenstellten.

Wie kein zweiter haben Sie die Geschichte der Meteorologie gepflegt. Ihre Neudrucke von Schriften und Karten über Meteorologie und Erdmagnetismus bringen nicht bloß selten gewordene Werke älterer Zeit, sondern auch wichtige Einleitungen dazu von Ihrer Hand. Ihre Beiträge zur Geschichte der Meteorologie sind eine Fundgrube, welche im weitesten Umfange bis in das Altertum hinein die Entwicklung Ihrer Wissenschaft spiegelt. Dabei konnten Sie nicht haltmachen bei der Sammlung rein wissenschaftlicher Werke, sondern mußten naturgemäß wiederholt zurückkehren zu der Würdigung meteorologischer Volksbücher und zu den schüchternen Versuchen der Wettervorhersage in früheren Jahrhunderten.

So schreitet neben Ihrer Tätigkeit als Geophysiker die des Historikers, und Sie konnten gelegentlich in einer allgemeinen Sitzung unserer Akademie in einem Vortrage auf dem Feld der einen und im unmittelbar anschließenden auf dem der anderen Klasse Neues bieten. Das ist nicht der Ausdruck einer Zwiespältigkeit, sondern der einer festgefügten wissenschaftlichen Persönlichkeit, die sowohl Gewicht legt auf die sorgfältige Beobachtung der Erscheinungen wie auch auf deren gewissenhafte Darstellung im Sinne der historischen Treue. Mögen Ihre Arbeiten auf diesem oder jenem Gebiete liegen, stets trachten Sie aus der Geschichte der Geschehnisse zu lernen. Die dabei entfaltete Exaktheit und Gründlichkeit bringt Ihr inneres Wesen hell zur Geltung, durch das Sie der Akademie nicht minder wert sind wie durch Ihre wissenschaftlichen Leistungen, die, vom Gebiete der Geophysik hinüber in das der Geographie und der Geschichte der Wissenschaften reichend, von seltener Universalität zeugen.

Die Preußische Akademie der Wissenschaften.

Ausgegeben am 16. November.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1925 XXVII—XXIX

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

Library of Congress
MAY 10 1926
Smithsonian Deposit

BERLIN 1925

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang einer aufzunehmenden Mitteilung soll in der Regel in den Sitzungsberichten bei Mitgliedern 32, bei Nichtmitgliedern 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte, in den Abhandlungen 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Abhandlungen nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 200 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1925

XXVII. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 29. Oktober.

Vorsitzender Sekretar: i. V. Hr. Planck.

1. Hr. Johnsen sprach über Schlangenalabaster und Gekrösestein. (Ersch. später.)

Es werden die physikalischen Bedingungen der Umwandlung von Gips und Anhydrit nebst Wasser erörtert und auf die geologisch-petrographischen Verhältnisse angewandt. Daß nur die weißen Lagen des Schlangenalabasters, nicht auch die dunklen, bituminösen, gefaltet und gewunden sind, wird auf eine besondere Lockerheit der letzteren zurückgeführt, die sich aus bestimmten chemischen Vorgängen ergibt; diese Vorgänge haben ihren Ursprung in der reduzierenden Wirkung des Bitumens. Die Faltung der weißen Schichten kann ebensogut auf Schrumpfung wie auf Quellung oder auch auf einem Wechsel beider Vorgänge beruhen.

2. Hr. Schur legte eine gemeinsam mit Hrn. Prof. Dr. G. Szegö durchgeführte Untersuchung vor: Über die Abschnitte einer im Einheitskreise beschränkten Potenzreihe. (Ersch. später.)

Im Anschluß an einen neuen Satz von L. Fejér wird der größte Kreis um den Nullpunkt bestimmt, innerhalb dessen die Abschnitte einer im Einheitskreise beschränkten Potenzreihe von einem vorgeschriebenen Abschnitt angefangen die obere Grenze der Potenzreihe im ganzen Einheitskreis nicht übertreffen.

3. Vorgelegt wurde die mit Unterstützung der Akademie erschienene Arbeit von Karl Viets in Bremen »Beiträge zur Kenntnis der Hydracarinen aus Quellen Mitteleuropas« (Sonderabdr. aus »Zoologische Jahrbücher« Bd. 50, Jena 1925).

Library of Congress
MAY 10 1926
Smithsonian Deposit

Ausgegeben am 1. Dezember.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1925

XXVIII. Gesamtsitzung. 5. November.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Roethe.

1. Hr. Guthnick sprach über Kugelhaufen, insbesondere über gemeinsam mit Hrn. R. Prager begonnene Untersuchungen an M 3, M 13, M 15 und M 92. (Ersch. später.)

In M 3 wurden innerhalb 2' vom Zentrum 19, in M 13 3, in M 15 8 neue Veränderliche entdeckt; in dem bisher noch unerforschten M 92 wurden 13 Veränderliche gefunden. In M 3 wurde für Bailey Nr. 95 der von Bailey vermutete Bedeckungscharakter bestätigt. Wahrscheinlich Bedeckungsveränderliche sind in M 3 Zeipel Nr. 1052, in M 13 ein Stern mit den auf das Zentrum bezogenen Koordinaten $x = +22''$, $y = -6''$ (Ludendorff Nr. 610?), in M 92 ein Stern $x = +153''$, $y = -58''$. Die Aufnahmen mit dem 125 cm-Reflektor (Belichtungen bis 2 Stunden) zeigen unabweisbare Spuren ausgedehnter dunkler absorbierender Massen in M 13, die teilweise mit den »Kanälen« zusammenfallen. Die auffallendste Stelle liegt bei $x = +90''$, $y = -70''$. Die Spiralen in den Kugelhaufen sind im wesentlichen nicht auf Zufallsgruppierungen zurückzuführen.

2. Hr. von Wilamowitz-Moellendorff legte vor: Der Rhetor Aristeides.

Es wird im Anschluß an die Biographie eine Beurteilung der Person und der Kunst des Aristeides gegeben.

3. Hr. Abert überreichte sein Werk »W. A. Mozart«, neubearbeitete Ausgabe von Otto Jahns Mozart, 6. Aufl., 2 Bände (Leipzig 1923 und 1924).

4. Hr. Wiegand überreichte den 3. Band des von ihm herausgegebenen Werkes »Baalbek, Ergebnisse der Ausgrabungen und Untersuchungen in den Jahren 1898 bis 1905« (Berlin und Leipzig 1925).

5. Das korrespondierende Mitglied Hr. Wernle übersandte sein Werk »Der schweizerische Protestantismus im XVIII. Jahrhundert«, Bd. III (Tübingen 1925);

6. Das korrespondierende Mitglied Hr. Radlkofer drei Abhandlungen über »Sapindaceae« (Sonderabdr. 1921, 1922 und 1924).

7. Vorgelegt wurden endlich der I. Band des Werkes »Plutarchi moralia« rec. W. R. Paton † et J. Wegehaupt † (Leipzig 1925) und »Trobadorgedichte«, bearbeitet von Adolf Kolsen (Halle a. S. 1925).

Die Akademie hat den ordentlichen Professor an der Universität Breslau Hrn. Dr. Alfred Hillebrandt und den Präfekten der Vatikanischen Bibliothek in Rom, Msgr. Giovanni Mercati, zu korrespondierenden Mitgliedern ihrer philosophisch-historischen Klasse gewählt.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1925

XXIX. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 12. November.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Keibel sprach über Bulbus- und Arterienwülste der Petromyzonten.

Die Arterienwülste sind bei Petromyzonten viel verbreiteter als man bis dahin angenommen. Nach einem Bericht über ihr Vorkommen bespricht Hr. Keibel ihren Aufbau und ihre Beziehungen zur Arterienwand. Was die Funktion der Bulbus- und Arterienwülste anlangt, so haben sie nicht die Aufgabe, den Blutstrom zu hemmen, sondern die, ihn zu erleichtern.

2. Hr. Hellmann sprach »Über die Wetterlage bei guter Fernsicht von Bergeshöhen«. (Ersch. später.)

Die meteorologischen Beobachtungen von den Gipfeln der Schneekoppe und des Brocken zeigen, daß gute Fernsicht von diesen Höhen nur bei Temperaturumkehr mit der Höhe (Inversion) auftritt. Da diese an das Vorhandensein von barometrischen Hochdruckgebieten gebunden ist, die im Winter häufiger und zugleich stärker sind als im Sommer, so erklärt sich daraus die Erfahrungstatsache, daß die Fernsicht von Bergeshöhen im Winter bisweilen besonders gut ist.

3. Sodann sprach Hr. Hellmann über »Wasserhosen auf dem Atlantischen Ozean«. (Ersch. später.)

Aus den Logbuchaufzeichnungen von 1159 englischen Schiffen, die in 18 Jahren den Atlantischen Ozean zwischen 20° nördlicher und 10° südlicher Breite befahren haben, ergibt sich ein sehr bestimmtes Häufigkeitsmaximum von Wasserhosen mitten im Windstillengürtel (0°—10° N, 20°—30° W). Es wandert mit diesem nach Norden. Die Dauer einer Wasserhose in diesen Meeresteilen beträgt gewöhnlich 15 Minuten. Bezüglich der Entstehung der Wasserhosen sprechen die Logbuchnotierungen am meisten für eine Verknüpfung der mechanischen mit der thermodynamischen Theorie.

Über die Bulbus- und Arterienwülste der Petromyzonten.

Von F. Keibel.

Ich knüpfe an eine Mitteilung an, die ich hier am 31. Juli 1924 über die Gefäße der Petromyzonten gemacht habe. Zur Einleitung einige Bemerkungen über Vorkommen und Bedeutung der Klappen im Gefäßsystem der Wirbeltiere überhaupt. Wir haben bei ihnen 1. typische Taschenklappen im Bereich der Venen- und Lymphgefäße; 2. Taschen- und Segelklappen im Herzen der höheren Wirbeltiere; 3. eigentümliche Wülste, welche vielfach als Klappen bezeichnet werden, an den Abgangsstellen von Arterienästen aus größeren Arterien.

Die Taschenklappen der Venen sind 1547 von Cannani entdeckt worden. Die Entdeckung wurde von Fabrizio ab Aquapendente weiter verfolgt und ausgearbeitet. Sie soll seinem Schüler William Harvey, der 1599—1602 bei ihm in Padua studierte, den Anstoß zu der Entdeckung des Blutkreislaufes gegeben haben, die er 1628 in seiner Exercitatio anatomica de motu cordis et sanguinis in animalibus niederlegte.

Die Venenklappen spielen eine wichtige Rolle beim Kreislauf. Die Kraft des Herzens reicht nicht aus, das Blut bis wieder zum Herzen hinzupumpen. Da treten die Venenklappen ein und helfen, das Blut wieder bis zum Herzen zu bringen. Bei höheren, mit Lungen atmenden Tieren hilft auch die Atmung, doch will ich auf diese Verhältnisse hier nicht weiter eingehen. Solche Venenklappen sollen nach manchen Angaben bei den ausgewachsenen Petromyzonten nur spärlich zu finden sein oder ganz fehlen. Ich habe sie auch bei den ausgewachsenen Petromyzonten stets in großer Zahl angetroffen.

Die Klappen des Herzens sind bei den Petromyzonten noch alle Taschenklappen. Wir finden bei ihnen 3 solcher Taschenklappenpaare.

a) Klappen zwischen dem Sinus venosus, in dem sich das Venenblut des Körpers ansammelt, und dem Vorhof, dem Atrium;

b) Klappen zwischen dem Atrium und dem Ventrikel;

c) Klappen zwischen dem Ventrikel und dem Bulbus arteriosus.

Die komplizierteren Segelklappen, die bei höheren Tieren zwischen den Vorhöfen und den Ventrikeln liegen, kommen im Herzen der Petromyzonten noch nicht zur Ausbildung.

Die Wülste an den Abzweigungsstellen von Arterien, die vielfach nicht sehr glücklich auch Klappen genannt worden sind, hat Dragendorff in einem Aufsatze »Über die Formen der Abzweigungsstellen von Arterien bei den Wirbeltieren« (Anat. Hefte Bd. 42, 1911) im gesamten Bereich der Wirbel-

tiere behandelt, doch wird durch seine Präparationsmethode das Bild der Wülste beeinträchtigt. Er öffnet die Arterien und steckt die Arterienwand mittels Nadeln auf. So sind Zerrungen und damit eine Veränderung der natürlichen Form nicht zu vermeiden. Auch kommt Dragendorff auf die besonderen Verhältnisse bei den Petromyzonten kaum zu sprechen. Er selbst hat Petromyzon nicht untersucht.

Auch sonst sind die Angaben der Autoren über die Petromyzonten dürftig und unvollständig, ja zum Teil falsch.

Wir begreifen in unsere Betrachtung auch die Wülste im Bulbus arteriosus ein; man hat sie auch als »Pelotten« bezeichnet. Diese Pelotten liegen an der rechten und der linken Wand des Bulbus arteriosus, dicht kranial von den Taschenklappen. Sie dehnen sich nach kranial genau so weit aus als der Herzbeutel, dessen Wand hier sehr dünn ist. Ihr Kern wird von einem besonderen Gewebe gebildet, auf das ich noch zurückkomme.

Wir besprechen jetzt zunächst das weitere Vorkommen von Wülsten im Arteriensystem bei den Petromyzonten.

Die Arterienwülste sind viel verbreiteter, als man bis dahin angenommen hat. Sie finden sich zunächst an den Ursprungsstellen der Segmentalarterien aus der Aorta. Hier sind sie, wenn man von den Pelotten der Bulbi arteriosi absieht, am stärksten entwickelt und können bei Petromyzon marinus schon mit bloßem Auge wahrgenommen werden, bei Petromyzon fluviatilis wenigstens mit einer Lupe. An den Ursprungsstellen der Segmentalarterien erreichen die Wülste auch ihre eigenartigste Ausgestaltung, doch finden sie sich nicht nur an diesen Ursprungsstellen der Segmentalarterien, sondern auch an deren Verästelungsstellen. In diesem Gebiet hat sie bis dahin nur Favaro, und zwar bei den Arteriae longitudinales dorsales des Petromyzonschwanzes beschrieben; die Arteriae caudales pares, bei denen sie Favaro auch beschreibt, sind nichts anderes als die kaudalen Enden der Aorta.

Dann finden sich Arterienwülste in kleinen, zum Teil sehr kleinen Arterien des Darms und der Leber, während merkwürdigerweise die mächtige A. coeliaca an ihrem Ursprunge aus der Aorta keine Wülste aufweist. Bei den Darm- und Leberarterien zeichnen sich die Wülste durch ihre verhältnismäßige Größe und ihre, man kann fast sagen, Plumpheit aus.

Auch an Arterien, die ventral von den Ursprüngen der A. segmentales aus der Aorta entstehen, kommen Arterienwülste vor. Hier waren sie bis dahin ebenso wie im Darm und der Leber ganz unbekannt, ja ihr Vorkommen wurde ausdrücklich geleugnet. Als besonders merkwürdig ist mir da der Befund an einer ganz kleinen Arterie aufgefallen, die sich nicht über das Gebiet der Aortenwand verfolgen läßt und die man dementsprechend als ein Vas vasorum wird bezeichnen müssen.

Ich komme nun, nachdem das Vorkommen besprochen ist, zum Aufbau der verschiedenen Wülste.

In den Wülsten der Bulbi arteriosi, wie übrigens bei allen größeren Arterienwülsten, ist eine Art Skelett nachzuweisen. Bei Boraxkarminfärbung sehen wir im Inneren der Wülste einen helleren Kern, der aus großen blasigen Zellen besteht. Diese Zellen erscheinen ausgesprochen vakuolisiert. Sie er-

innern etwas an die Knorpelzellen der Verknöcherungsgrenzen. Im ganzen ähnelt das Gewebe dem, welches Josef Schaffer als chondroides Gewebe beschrieben hat. Auch die ersten Spuren einer mit Hämatoxylin, Bismarckbraun und Azur färbbaren, also basophilen Grundsubstanz lassen sich erkennen.

Ganz allgemein kann man an den Arterien der Petromyzonten die drei Schichten unterscheiden, welche bei den Arterien der übrigen Wirbeltiere angenommen werden: eine Intima, eine Media und eine Aventitia. Auch im Bulbus arteriosus ist das möglich. An dem Aufbau der Wülste beteiligt sich nicht nur die Intima der Arterien, wie man das bis jetzt allgemein annahm, sondern auch die Media. Bemerkenswert ist, daß die Arterien im gleichen Querschnitt sehr verschiedene Wanddicke und sehr verschiedenen Wandaufbau zeigen können. Ich habe das bereits in meiner früheren Mitteilung für die Aorta der Petromyzonten erwähnt, und Argaud (1908; 1909) hat es ausführlich für die Aorta der Selachier behauptet und begründet. Die Ausbildung der Wand wird durch die Umgebung bedingt. Bildet diese eine kräftige Stütze für die Arterienwand, so ist diese Wand dünn, im übrigen je nach der Stütze, die sie findet, verschieden dick und auch verschieden gebaut. Auch elastisches Gewebe kommt, und das ist besonders zu betonen, in der Arterienwand der Petromyzonten vor und läßt sich auch in die Wülste hinein verfolgen. Argaud (1908—1909) leugnet dieses elastische Gewebe für die Arterien der Mollusken und Petromyzonten. Er stützt seine Ansicht durch die Feststellung, daß kein Gewebe vorkomme, das die Kresofuchsin- und Orceinreaktionen gäbe. Dieser Beweis ist nicht zureichend, denn die histologischen Färbungen sind keine chemischen Reaktionen. Die Elastica interna der Gefäße färbt sich übrigens nach Chromessigosmiumsäure- Vorbehandlung mit Safranin ganz scharf. Merkwürdigerweise fehlt diese Färbung einer Elastica interna im Gebiet der Wülste.

Wir kommen nun zur Funktion der Bulbus- und Arterienwülste. Ich sagte mit Absicht Funktion und nicht Zweck, trotzdem ich den Zweck als heuretisches Prinzip durchaus anerkenne. Spricht man vom Zweck, so schleicht sich aber gar zu leicht etwas Methaphysisches ein und wirkt sich als Entelechie oder sonstwie aus.

Weder die Bulbuswülste noch die Arterienwülste haben, trotzdem man das jetzt allgemein annimmt, die Funktion, den Blutstrom zu hemmen. Ganz im Gegenteil, sie erleichtern ihn. Das muß allen früheren Autoren gegenüber betont werden. Die Bulbuswülste sind aufzufassen als Wandverstärkungen im Gebiet des Herzbeutels, in dessen Bereich die Bulbuswand keinerlei Stütze findet. Bei der Systole des Ventrikels springen sie kaum merklich in das Lumen des Bulbus vor, von einer Hemmung des Blutstromes kann keine Rede sein. Würden sie fehlen, so würde der Blutstrom behindert sein, weil sich bei der Systole die Bulbuswand hernienartig vorwölben würde.

Die Arterienwülste sind alle gegen den Blutstrom gerichtet. Wollte man annehmen — wie das allgemein geschehen —, sie schlössen die Arterien gegen das anströmende Blut, so würde der Blutstrom in großen Gebieten ganz unterbrochen sein; ganze Bezirke würden dauernd überhaupt kein Blut bekommen können. Auch findet man vielfach die sogenannten »Klappen-

taschen« voll von Blut und doch das Lumen zwischen den Wülsten weit klaffend. Das Blut zwischen den Wülsten und der Arterienwand bringt die Wülste nicht dazu, sich aneinanderzulegen. Die Wülste dürften also die Funktion haben, den Ausfluß aus den größeren Arterien in kleinere frei zu halten. Zur Begründung des weiten Hervorragens der Wülste in das Ursprungsgefäß kann noch eine andere Überlegung dienen. Die Schnelligkeit des Blutstromes an der Wand der Arterien ist gleich Null. Je weiter gegen das Innere der Arterie, desto schneller wird der Blutstrom. Durch die in das Lumen hervorragenden Wülste erhalten die Arterien schneller strömendes Blut, und dadurch wird der Blutstrom in den Arterien und überhaupt begünstigt. Mit der Rouxschen Theorie über die Formung der Arterien durch den Blutstrom lassen sich die Verhältnisse der Arterien bei den Petromyzonten wohl kaum in Einklang bringen. Gerade die mehr oder weniger weit in das Lumen hereinreichenden Wülste scheinen mir gegen sie zu sprechen. Natürlich kann es aber keinem Zweifel unterliegen, daß auch diese Verhältnisse mechanisch bedingt sind, nur liegen die Dinge so kompliziert, daß sie sich in dieser Hinsicht noch nicht überblicken lassen.

Eine rein morphologische Erklärung hat Vialleton versucht (Etude sur le cœur des lamprois, Archives d'anatomie microscopique T. VI, 1903/1904). Er stützt sich dabei auf Angaben von Ant. Dohrn (1890), Raffaele (1892) und Ranvier (1892). Die Segmentalarterien sollen nach dieser Erklärung nicht etwa aus den Aortenanlagen vorwachsen, sondern sich selbständig anlegen und gegen die Aorten wachsen; dabei sollen sie die Aortenwand vor sich einstülpen und so die Wülste hervorrufen. Nun finden sich aber die Arterienwülste nicht nur an der Aorta, für die diese Erklärung allein gelten könnte, und Vialletons Theorie ist daher schon hierdurch widerlegt; aber auch an der Aorta habe ich nichts Derartiges beobachten können, trotzdem ich auch viele jüngere Entwicklungsstadien untersucht habe; ich muß also die Vialletonsche Hypothese ablehnen.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, daß sich die Arterienwülste, entgegen anders lautenden Angaben, auch schon bei den Larven von Petromyzon planeri, den Querdern, nachweisen lassen.

Eine größere Abhandlung über die hier besprochenen Fragen wird mit Tafeln mit farbigen Figuren und mit Textfiguren in der Zeitschrift für mikroskopisch-anatomische Forschung erscheinen. In ihr findet auch die Literatur eingehende Berücksichtigung.

Über die Muskelfaserlänge des Armmuskels (m. brachialis) und seiner Abart (Speichenansatz).

Von R. Fick.

(Aus der Anatomischen Anstalt der Universität Berlin.)

(Vorgelesen am 11. Juni 1925 [s. oben S. 399].)

Zur Zeit meiner Versuche über künstliche Gelenkumformung[1], bei denen ich auch die Anpassung der Muskelfaserlänge an den Gebrauch beim Hund verfolgte[2], stieß ich im Präpariersaal zufällig auf 2 menschliche Krüppelbeine mit Muskelschrumpfungen und auf 2 Arme, an denen der Armmuskel (m. Brachialis) statt nur an der Elle auch an der Speiche ansetzte. Diese Präparate boten mir Gelegenheit, nunmehr auch an Menschenmuskeln eigene Anpassungsmessungen vorzunehmen. Über die Untersuchung der Muskeln der Krüppelbeine berichtete ich, unter Eingehen auf die Muskelschrumpfung bei Lähmungen, in der Festschrift für Herrn Kollegen R. v. Jaksch[3], während ich hier meine Befunde am Armmuskel und seiner Abart mitteilen will.

Muskelfaserlänge des gesunden Armmuskels (m. brachialis).

Um ein eigenes Urteil über die Längenverhältnisse beim regelrecht gestalteten Armmuskel im Vergleich zu der von mir gefundenen Abart zu gewinnen, untersuchte ich an 6 Armen die Muskelfaserlänge an 3 verschiedenen Stellen des Muskels, nämlich an seinem lateralen und medialen Rand und in der Mitte. An jeder Stelle maß ich eine größere Anzahl von Fasern, und zwar bei gestreckter Stellung des Ellbogengelenkes und dann bei gebeugter Stellung in der von mir a. a. O. angegebenen Weise.

---

[1] Siehe R. Fick, Über die Entstehung der Gelenkformen. Mit Tierversuchen. Preuß. Akad. d. Wiss. Abhdlg. d. phys.-math. Kl. 1921 Nr. 2.

[2] Derselbe, Tätigkeitsanpassung der Gelenke und Muskeln nach Versuchen beim Hund. Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 1922 Heft 24.

[3] Messungen und Betrachtungen über die Muskelfaserlänge bei Muskelschrumpfung. In: Wiener Archiv für Innere Medizin 1925, Festband für R. Ritter v. Jaksch-Wartenhorst.

Um die Maße untereinander besser vergleichen zu können, berechnete ich, wie seinerzeit beim Hund (vgl. R. Fick, Über die Fleischfaserlänge beim Hund und Bemerkungen über einige Gelenke des Hundes. Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 1920—1921), die »Vergleichslänge« der Fasern, d. h. ihre Länge im Vergleich zur Länge des ganzen Armes (ohne Hand). Die Mittelmaße für die 3 Bündel bei den 6 Armen waren folgende:

I. Lateralste Bündel.

			Gedehnte Faserlänge (Dl.)	Länge im Vergleich zur Armlänge
Fall 1	Oberarm 34 cm Unterarm 24.5 »	Arm 58.5 cm	6.4	10.9%
» 2	Oberarm 30 » Unterarm 21.6 »	» 51.6 »	11.0	21.3 »
» 3	Oberarm 29 » Unterarm 20.9 »	» 49.9 »	3.2	6.4 »
» 4	Oberarm 27.5 » Unterarm 19.5 »	» 47 »	8.3	17.6 »
» 5	Oberarm 26 » Unterarm 18.7 »	» 44.7 »	3.0	6.7 »
» 6	Oberarm 26 » Unterarm 18.6 »	» 44.6 »	2.8	6.3 »

Mittel = 6 : 69.2 = 11.5%.

Die große Längenverschiedenheit erklärt sich daraus, daß der laterale Muskelursprung bei manchen Armen bis dicht an den lateralen Armknorren herunterreicht, bei anderen aber schon höher oben aufhört.

II. Mittlere Bündel.

	Gedehnte Faserlänge (Dl.)	Länge im Vergleich zur Armlänge
Fall 1	16.0	27.3%
» 2	12.7	24.6 »
» 3	11.6	22.2 »
» 4	12.3	26.0 »
» 5	10.5	23.5 »
» 6	9.4	21.8 »

Mittel = 6 : 145.4 = 24.2%.

III. Medialste Bündel.

	Gedehnte Faserlänge (Dl.)	Länge im Vergleich zur Armlänge
Fall 1	8.0	13.7%
» 2	5.5	15.5 »
» 3	6.6	13.2 »
» 4	5.7	12.1 »
» 5	5.8	12.9 »
» 6	5.6	12.5 »

Mittel = 6 : 79.9 = 13.3%.

Verkürzungsverhältnis der Bündel beim gewöhnlichen Armmuskel.

Die gedehnte Länge (Dl.) verhält sich zur Verkürzungsstrecke bei der Beugung (V.) folgendermaßen: Verkürzungsverhältnis $\left(\frac{\text{Dl.}}{\text{V.}}\right)$.

	I. Laterale Bündel im Mittel			II. Mittlere Bündel im Mittel			III. Mediale Bündel im Mittel		
	Dl.	V.	Dl./V.	Dl.	V.	Dl./V.	Dl.	V.	Dl./V.
bei Fall 1	64	32	= 2.00	160	75	= 2.13	80	40	= 2.00
» » 2	110	60	= 1.83	127	62	= 2.05	55	33	= 1.67
» » 3	32	17	= 1.88	130	54	= 2.40	66	36	= 1.83
» » 4	83	46	= 1.80	123	61	= 2.02	57	32	= 1.78
» » 5	30	15	= 2.00	94	39	= 2.40	58	32	= 1.81
» » 6	28	15	= 1.87	105	50	= 2.10	56	32	= 1.72
	Dl. : V. = 6 : 11.38 = 1.89 im Mittel.			6 : 13.10 = 2.18 im Mittel.			6 : 10.81 = 1.80 im Mittel.		

Man sieht aus den Messungen, daß die mittleren Bündel des Muskels eine nicht ganz unbeträchtlich größere Faserlänge im Verhältnis zu der von mir festgestellten Beugungsverkürzung haben. Ich möchte jedoch glauben, daß in Wirklichkeit beim Lebenden das Verhältnis doch auch bei den dem Rand des Muskels benachbarten Bündeln ein ähnlicheres dem bei den mittleren Bündeln ist, da man am Präparat die Verkürzungsgröße der Randbündel vielleicht überschätzt. Vielleicht können sich nämlich die Randbündel beim Lebenden infolge der dortigen größeren Straffheit der Armbinde und der strafferen Befestigung der Haut weniger weit zusammenziehen, als es am Präparat scheint. Jedenfalls ist aber das Verhältnis bei allen Bündeln ungefähr = 2, wie es nach dem Ed. Weber-A. Fickschen Anpassungsgesetz die Regel sein soll. Denn das Gesamtmittel für das Verkürzungsverhältnis aller 3 Bündelgruppen des Armmuskels beträgt

$$1.89 + 2.18 + 1.80 = \frac{5.87}{3} = \mathbf{1.96}.$$

Armmuskel (Brachialis) mit Ansatz an der Speiche.

Die eingangs erwähnte Armmuskelabart bestand darin, daß von der lateralen Seite des Armmuskels sich ein kräftiges Bündel nicht wie sonst nur an der Elle ansetzte, sondern mit einer 2 cm langen strangförmigen Ansatzsehne sich an der Speiche unterhalb des Speichenhöckers befestigte. Der Hauptansatz des Muskels war, wie gewöhnlich, an der Elle und zeigte eine etwa 6 cm lange Ansatzsehnenhaut an der Oberfläche (vgl. Abb. 1 a. f. S., die ich meinem Assistenten, Hrn. Dr. Friedel, verdanke).

In Berlin fand ich dann noch 4 solche Fälle, die ich auch untersuchte. Der Augenschein zeigte bei allen sofort, daß die an der Speiche ansetzenden Fleischbündel wesentlich länger waren als die Ellenbündel, offenbar als Zeichen von Anpassung an die größere Verkürzungsmöglichkeit. Diese Bündel konnten sich ja nicht bloß bei der Beugung des Armes, sondern auch beim Übergang aus der »vorgewendeten« (pronierten) Stellung der Hand in die »Rückwendung« (Supination) zusammenziehen und hatten namentlich auch bei der Beugung, infolge des größeren Achsenabstandes des Speichenansatzes, eine größere Verkürzungsmöglichkeit.

I. Fall. Der Oberarm war 28 cm, der Unterarm 19.2 cm, der ganze Arm demnach 47.2 cm lang. Von den an der **Elle** ansetzenden Bündeln hatten

die lateralen Bündel im Mittel bei Dehnung eine Länge von 4.0 cm. Ihre Länge betrug **8.5%** der Armlänge. Diese Bündel entsprechen natürlich nicht den »lateralen« Bündeln des gewöhnlichen Armmuskels, sondern liegen näher der Armmitte; die Bündel sind bei diesem Präparat entschieden kürzer als beim gewöhnlichen Armmuskel, der sich nur an der Elle ansetzt. Die mittleren Bündel waren im Mittel bei Dehnung 10.8 cm lang, d. i. **22.9%** der Armlänge, die medialen Bündel waren bei Dehnung im Mittel 7.0 cm lang, d. i. 14.8% der Armlänge. Man sieht, daß also auch bei dieser Abart die mittleren Bündel bei weitem die längsten sind, während die medialen und lateralen in weitem Abstand folgen, wobei auch bei der Abart die medialen Bündel im Mittel die lateralen an Länge überwiegen.

Gez. Dr. Friedel.

Abb. 1. Abart des Armmuskels (m. Brachialis) mit Ansatz an der Elle und der Speiche.

Von den an der **Speiche** ansetzenden Bündeln zeigten die ellenwärts liegenden Bündel eine Länge von **15.5** cm, d. i. **32.8%** der Armlänge. Die speichenwärts, weiter hinten entspringenden Bündel waren 16.0 cm, d. i. 33.7% der Armlänge lang. Die Messung ergab also, wie der Augenschein schon hatte vermuten lassen, und wie es nach dem Anpassungsgesetz auch nicht anders zu erwarten ist, daß die Speichenbündel bedeutend länger sind im Vergleich zur Armlänge sowohl als die Bündel beim gewöhnlichen Armmuskel, als auch gegenüber den Ellenbündeln der Abart.

II. Fall. Der Oberarm war 29.6 cm, der Unterarm 20.4 cm, der ganze Arm (ohne Hand) daher 50 cm. Die Ursprungs- und Ansatzverhältnisse glichen durchaus denen des vorigen Falles. Die lateralen an der Elle ansetzenden Bündel hatten im Mittel bei Dehnung (Streckung) eine Länge von 6.1 cm. Ihre Länge betrug also 12.2% von der »Armlänge«. Die mittleren Ellenbündel waren bei Streckung 12.3 cm lang, d. i. 24.5% der Armlänge. Die medialen Ellenbündel maßen bei Streckung 7.0 cm, d. i. 14.0% der Armlänge. Auch in diesem Fall sind die vordersten Ellenbündel des dicken mittleren Teiles des Muskels bei weitem länger wie die seitlichen, offenbar wegen der erheblich größeren Länge des Hebelarmes bei der Bewegung infolge des größeren Abstandes von der Ellenbogenachse. Die tiefen mittleren Bündel, die also der Achse näherliegen, sind in der Tat wesentlich kürzer.

Von den Speichenbündeln hatten die hintersten, lateralsten Bündel eine Länge von 10.1 cm, d. i. 20.2% der Armlänge, die vordersten, medialsten im gedehnten Zustand eine Länge von 13.7 cm, d. i. 27.4% der Armlänge.

III. Fall. Der Oberarm war 32 cm lang, der Unterarm 22.5 cm, der ganze Arm (ohne Hand) 54.5 cm. Bei Fall III war das Speichenbündel mit dem Ellenbündel am Ansatz durch einen Sehnenbogen verbunden, der

den Hals der Speiche überbrückte. Der Sehnenbogen war vom oberen, vordersten Teil der Ellenrauhigkeit (tuberositas ulnae) durch einen Schleimbeutel getrennt. Der unterste Ansatz der Bündel ist auf eine Strecke von 1 cm ganz kurzsehnig. Er reicht vom unteren Ende des Ellenhöckers auf den Anfang der vom Ellenhöcker ausgehenden Leiste nach abwärts, bis in die Höhe des Ansatzes der »Schrägsaite« (chorda obliqua) an der Speiche. Bei Vorwendung der Hand stellt das Speichenbündel ein 12 mm breites Band mit einem ulnaren und einem radialen Rand dar. Der ulnare Rand entspringt viel höher oben als der radiale und wird oben von lateral her durch den Arm-Speichenmuskel (m. brachioradialis), von ulnar her durch den Hauptbauch des Armmuskels (m. brachialis) vorne verdeckt. Die lateralen, an der Elle ansetzenden Bündel hatten im Mittel bei Dehnung (Ellenstreckung) eine Länge von 6.1 cm, d. i. 11.2% der Armlänge. Die mittleren Ellenbündel waren bei Streckung 11.3 cm lang, d. i. 20.7% der Armlänge. Die medialen Ellenbündel maßen bei Streckung 6.0 cm, d. i. 11.0% der Armlänge.

Die vorderen, medialen Speichenbündel waren 10.5 cm, d. h. 19.3% der Armlänge lang, die hinteren, lateralen Speichenbündel 9.4 cm = 17.2% der Armlänge.

IV. Fall. Das Speichenbündel entspringt hier bis zum Deltamuskelansatz hinauf. Es wird von dessen Fasern sogar noch zum Teil bedeckt. Außerdem geht der Ursprung aber an der lateralen Oberarmkante bis daumenbreit über den lateralen Knorren hinunter. Der Ursprung des Speichenbündels ist daher etwa 9 cm lang. Der Oberarm war 29.6 cm, der Unterarm 20.6 cm, der ganze Arm (ohne Hand) also 50.2 cm lang. Die Länge der Ellenbündel bei gestrecktem Ellbogengelenk war

bei den lateralsten	Bündeln	5.6 cm	=	11.1%	der	Armlänge,
» » mittleren	»	11.0 »	=	23.0 »	»	» ,
» » medialsten	»	4.4 »	=	8.0 »	»	» .

Die Länge der Speichenbündel war bei vorgewendeter (pronierter) Hand und gestrecktem Ellbogengelenk

bei den hinteren, lateralen	11.2 cm	=	22.3%	der	Armlänge,
» » vorderen, medialen	12.2 »	=	24.3 »	»	» .

V. Fall. Das Speichenbündel war nur ganz künstlich von der breiten Ansatzsehne des Hauptmuskels zu trennen. Oben entspringt es ganz dicht von dem lateralen Feld des Deltamuskelansatzes, dann zeigt es eine Rinne für die Einlagerung des Arm-Speichenmuskels (m. brachioradialis). Dadurch wird ein tiefliegender, lateraler, flacher Teil abgegrenzt von dem dicken medialen. Der Ursprung ist auch $9^1/_2$ cm lang. Beide Teile laufen zusammen in einen schmalen, fast spitz zu nennenden Sehnenstrang, der sich an der lateralen Leiste abwärts vom Speichenhöcker (tuberositas radii) festsetzt. Es besteht auch ein Sehnenbogen, über den oberen Rand des Speichenhöckers hinweg, zwischen Speichen- und Ellenansatz des Muskels. Aber an diesem Sehnenbogen setzen sich nur wenige Fasern unmittelbar an, die meisten gehen eben doch entweder zur Speiche oder zur Elle selbst. Die Oberarmlänge

beträgt 32.2 cm, die des Unterarmes 23 cm, die ganze Armlänge 55.2 cm. Die Länge der Ellenbündel mißt bei gestrecktem Ellbogengelenk

bei den lateralen Bündeln 7.2 cm = 13.1% der Armlänge,
» » mittleren » 12.7 » = 23.0 » » » ,
» » medialen » 4.4 » = 8.0 » » » .

Die Länge der gedehnten Speichenbündel war

bei den hinteren, lateralen Bündeln 11.4 cm = 26.5% der Armlänge,
» » vorderen, medialen » 11.1 » = 20.1 » » » .

VI. Fall. Das Speichenbündel ist in Höhe des Ellbogengelenkes fast rundlich. Es entspringt nicht sehr ausgedehnt, nur in einer »Breite« oder besser »Höhe« von $3\frac{1}{2}$ cm. Es reicht längst nicht bis zum Deltamuskelansatz hinauf und hat gar nichts mit der breiten Ellenansatzsehne zu tun. Der Sehnenbogen am Ansatz ist dünn. Die Form dieser Abart steht daher in verschiedener Hinsicht im Gegensatz zu den vorhergehenden Fällen.

Die Oberarmlänge ist 31.5 cm, die Unterarmlänge 22.5 cm, die ganze Armlänge (ohne Hand) 54 cm.

Die Länge der Ellenbündel im gedehnten Zustand war

bei den lateralsten Bündeln 5.0 cm = 9.3% der Armlänge,
» » mittleren » 13.3 » = 24.6 » » » ,
» » medialsten » 6.8 » = 12.6 » » » .

Die Speichenbündel maßen im gedehnten Zustand:

die hinteren lateralen, Bündel 6.8 cm = 12.6% der Armlänge,
» vorderen medialen, » 10.3 » = 20.9 » » » .

Die Untersuchung der Verkürzungsverhältnisse bei den 6 Fällen der Armmuskelabart ergab folgendes:

A. Ellenbündel.

1. Bei äußerster Beugung verkürzten sich die lateralsten Ellenbündel

beim Präparat I um 1.7 cm = 3.6% der Armlänge,
» » II » 3.5 » = 7.0 » » » ,
» » III » 3.0 » = 5.5 » » » ,
» » IV » 3.3 » = 6.5 » » » ,
» » V » 3.5 » = 6.3 » » » ,
» » IV » 3.0 » = 5.6 » » » .

Für das Längenverhältnis der lateralen Ellenbündel ergibt die Berechnung des Verhältnisses der Dehnungslänge (Dl.) (vgl. S. 515) zur Verkürzung (V.) folgendes:

$\frac{\text{Dl.}}{\text{V.}}$ bei Präparat I 2.35,
» » » II 1.74,
» » » III 2.03,
» » » IV 1.70,
» » » V 2.06,
» » » VI 1.66.

11.54.

Daraus ergibt sich im Mittel $\frac{11.54}{6} = 1.92$.

2. Die mittleren Ellenbündel verkürzten sich bei äußerster Beugung

beim Präparat	I	um	4.5 cm	=	9.5%	der Armlänge,	
»	»	II	» 6.1 »	=	12.2 »	»	» ,
»	»	III	» 5.5 »	=	10.1 »	»	» ,
»	»	IV	» 4.8 »	=	9.5 »	»	» ,
»	»	V	» 6.3 »	=	11.4 »	»	» ,
»	»	VI	» 5.9 »	=	10.9 »	»	» .

Das Verhältnis der gedehnten Länge (Dl.) zur Verkürzung (V.) beträgt

$\frac{\text{Dl.}}{\text{V.}}$ bei Präparat I = 2.40,
» » » II = 2.01,
» » » III = 2.03,
» » » IV = 2.30,
» » » V = 2.01,
» » » VI = 2.25,

im Mittel $= \frac{13.00}{6} = 2.17$.

3. Die medialsten Ellenbündel verkürzten sich bei äußerster Beugung

bei Präparat	I	um	3.0 cm	=	6.3%	der Armlänge,	
»	»	II	» 3.3 »	=	6.6 »	»	» ,
»	»	III	» 3.0 »	=	5.5 »	»	» ,
»	»	IV	» 3.0 »	=	5.9 »	»	» ,
»	»	V	» 2.4 »	=	4.4 »	»	» ,
»	»	VI	» 3.3 »	=	6.0 »	»	» .

Das Verkürzungsverhältnis der gedehnten Länge (Dl.) zur Verkürzung (V.)

$\frac{\text{Dl.}}{\text{V.}}$ bei Präparat I = 2.33,
» » » II = 2.12,
» » » III = 2.00,
» » » IV = 2.00,
» » » V = 1.83,
» » » VI = 2.06.

Das Mittel berechnet sich auf $\frac{12.34}{6} = 2.06$.

B. Speichenbündel.

Die Verkürzung der Speichenbündel verhielt sich in den 6 Fällen folgendermaßen:

Bei reiner »Rückwendung« (Supination) und »Vorwendung« (Pronation) der Hand bzw. der Speiche veränderte sich die Länge der Muskel-

bündel eigentlich auffällig wenig, obwohl bei der »Vorwendung« der Speichenansatz des Muskels sichtlich etwas um die Speiche herumgewickelt wurde und sich bei »Rückwendung« »abwickelte«. Der Längenunterschied betrug dabei aber bei allen 6 Präparaten nur wenige, bis höchstens 10 Millimeter.

I. Verkürzung bei reiner Beugung.

Bei der reinen Beugung erfuhren die Speichenbündel aber sehr ausgiebige Verkürzungen, wie aus den folgenden Zahlen hervorgeht. Daß die Verkürzung wesentlich größer ist als die der Ellenbündel, namentlich die der »seitlichen« (d. h. der lateralen und der medialen), beruht vor allem darauf, daß der Speichenansatz wesentlich tiefer unten (distalwärts) liegt wie der Ellenansatz. Dadurch hat er bei Beugung einen viel längeren, »idealen Hebelarm«, d. h. Achsenabstand wie der Ellenansatz (s. »*i*« in Abb. 2a und b).

Abb. 2a.
Hebelarm »*i*« für den Ellenansatz.

Abb. 2b.
Hebelarm »*i*« für den Speichenansatz.

Die starke Zunahme des Hebelarmes bei der Beugung ist ja bereits von A. E. Fick (Würzburger Verhdlg. 1877) und später durch O. Fischer zahlenmäßig für den Zweiköpfer verfolgt worden.

Überdies besitzt das Speichenbündel auch schon in der Streckstellung des Ellbogengelenkes einen größeren Abstand von der Ellbogengelenkachse, wenigstens als die tiefen, d. h. dem Knochen naheliegenden Ellenteile des Armmuskels, weil die Speiche nicht eigentlich neben, sondern zugleich vor, d. h. weiter vorn liegt wie die Seelenachse der Elle.

1. Mediale, vordere Speichenbündel.

Bei äußerster Beugung in »vorgewendeter« (pronierter) Stellung der Speiche war die Verkürzung der medialen, vorderen Speichenbündel bei reiner Beugung

bei	Präparat	I	7.90 cm	=	14.6%	der	Armlänge,	
»	»	II	8.25 »	=	16.5 »	»	»	,
»	»	III	5.50 »	=	10.1 »	»	»	,
»	»	IV	7.90 »	=	15.7 »	»	»	,
»	»	V	6.50 »	=	11.8 »	»	»	,
»	»	VI	5.90 »	=	10.9 »	»	»	.

Das Verkürzungsverhältnis der Dehnungslänge (Dl.) zur Verkürzung (V.) bei diesen Bündeln ergab sich

$\frac{\text{Dl.}}{\text{V.}}$ bei Präparat	I =	1.96,
» » »	II =	1.70,
» » »	III =	1.90,
» » »	IV =	1.54,
» » »	V =	1.70,
» » »	VI =	1.74.

Das Mittel berechnet sich auf $\frac{10.55}{6} = 1.76$.

2. Lateralste, unterste Speichenbündel.

Die Verkürzung der lateralsten, untersten Speichenbündel bei reiner Beugung war

bei Präparat	I	9.2 cm	= 19.9%	der Armlänge,
» »	II	5.0 »	= 10.0 »	» » ,
» »	III	4.7 »	= 8.6 »	» » ,
» »	IV	6.1 »	= 12.2 »	» » ,
» »	V	7.8 »	= 14.1 »	» » ,
» »	VI	4.0 »	= 7.4 »	» » .

Das Verhältnis der Länge der gedehnten Bündel (Dl.) zur Verkürzung (V.) ergab sich

$\frac{\text{Dl.}}{\text{V.}}$ bei Präparat	I =	1.74,
» » »	II =	2.00,
» » »	III =	2.00,
» » »	IV =	1.84,
» » »	V =	1.46,
» » »	VI =	1.70.

Daraus ergibt sich als Mittel $\frac{10.74}{6} = \mathbf{1.79}$.

II. Verkürzung bei Beugung und Rückwendung (Supination).

1. Vordere, mediale Speichenbündel.

Bei vereinter äußerster Beugung und äußerster Rückwendung, die im Leben freilich nicht gar zu häufig vorkommen wird, betrug die Verkürzung der medialen, vorderen Speichenbündel

bei Präparat	I	9.9 cm	= 20.9%	der Armlänge,
» »	II	9.5 »	= 19.0 »	» » ,
» »	III	6.0 »	= 11.0 »	» » ,
» »	IV	8.5 »	= 16.9 »	» » ,
» »	V	7.1 »	= 12.9 »	» » ,
» »	VI	7.0 »	= 13.0 »	» » .

Das Verkürzungsverhältnis der Länge der Bündel bei Streckung und Vorwendung (Dl.) gegenüber der Verkürzung (V.), die die Länge bei vereinter Beugung und Rückwendung erfährt, war

$\frac{\text{Dl.}}{\text{V.}}$ bei Präparat I = 1.56,
» » » II = 1.40,
» » » III = 1.75,
» » » IV = 1.44,
» » » V = 1.56,
» » » VI = 1.47.

Daraus ergibt das Mittel $\frac{9.18}{6}$ = **1.53**.

2. Hinterste, lateralste Speichenbündel.

Bei den hintersten, untersten, lateralsten Speichenbündeln erfuhr die Länge bei vereinter äußerster Beugung und äußerster Rückwendung eine Verkürzung

bei	Präparat	I	um	11.0 cm	= 23.1%	der	Armlänge,	
»	»	II	»	6.9 »	= 13.8 »	»	»	,
»	»	III	»	5.2 »	= 9.5 »	»	»	,
»	»	IV	»	7.6 »	= 15.1 »	»	»	,
»	»	V	»	7.9 »	= 14.3 »	»	»	,
»	»	VI	»	4.7 »	= 8.7 »	»	»	.

Das Verkürzungsverhältnis $\frac{\text{Dl.}}{\text{V.}}$ berechnet sich aus den Angaben auf S. 516—519 über die gedehnte Länge (Dl.) und den jetzt mitgeteilten Verkürzungen (V.) auf

$\frac{\text{Dl.}}{\text{V.}}$ beim Fall I = 1.45,
» » » II = 1.50,
» » » III = 1.81,
» » » IV = 1.47,
» » » V = 1.44,
» » » VI = 1.45.

Als Mittel ergibt sich dabei $\frac{9.12}{6}$ = 1.52, was mit dem beim vorderen, medialen Speichenbündel gefundenen Verhältnismittel von 1.53 trotz der recht verschiedenen Faserlänge im einzelnen sehr gut übereinstimmt. Die Zahlen (1.52 und 1.53) zeigen, daß das Verhältnis bei beiden Speichenbündelteilen erheblich kleiner ist als das gewöhnliche Verhältnis, das annähernd 2.0 beträgt (s. S. 516).

Es ist aber gar nicht zu erwarten, daß wir den Muskel für den äußersten Grenzfall, d. h. die äußerste Doppelbewegung (äußerste Beugung und

äußerste Rückwendung) angepaßt finden, weil die Armknochen wohl nicht häufig gerade in diese Grenzstellung geführt sein werden. Die Muskelfaserlänge ist vielmehr offenbar einem mittleren Grad von Beugung und Umwendung angepaßt. Bei der Doppelbewegung muß natürlich die Verkürzung sehr groß werden, weil die Sehne (durch die bei der Rückwendung eintretende Abwickelung der Sehne von der Speiche) sich bei der Bewegung besonders stark von der Ellbogenachse abheben kann. Deshalb ist auch die Verkürzung, die die Bündel bei der Doppelbewegung erfahren, wesentlich größer als die Summe der Verkürzung bei der alleinigen Beugung und der alleinigen Rückwendung.

Ausgegeben am 1. Dezember.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei

1925 XXX

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

Library of Congress MAY 10 1926 Smithsonian Deposit

BERLIN 1925

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang einer aufzunehmenden Mitteilung soll in der Regel in den Sitzungsberichten bei Mitgliedern 32, bei Nichtmitgliedern 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte, in den Abhandlungen 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Abhandlungen nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 200 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

Library of Congress
MAY 10 1926
Smithsonian Deposit

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1925

XXX. Gesamtsitzung. 19. November.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Roethe.

1. Hr. Brandl sprach über dichterisches Schaffen nach Walter Scotts selbstbeschreibenden Angaben.

Wie der Erzähler die Spannung der Leser weckt und frisch erhält, wie er seine Gestalten durch charakteristische Umgebungsdinge mit äußerem Leben umkleidet und durch Hineinfühlung in ihr Empfinden ihr inneres Leben entfaltet, hat der große Erzähler nicht systematisch, aber mit Erfahrungswahrheit beschrieben, der tiefer grabenden Literaturgeschichte zu vielfacher Förderung.

2. Hr. Hellmann legte eine Abhandlung von Hrn. Prof. Dr. H. v. Ficker in Berlin vor: »Temperaturgradienten bei Föhn«.

In einer früheren Untersuchung wurde der Nachweis geführt, daß auch bei voll entwickeltem Föhn in der freien Atmosphäre die vertikalen Temperaturgradienten stets unter dem Wert des trocken-adiabatischen Gradienten bleiben. Letzterer Wert wird bei dynamisch erzwungenen Vertikalbewegungen eines Ballons nur dann gefunden, wenn die Messungen sich auf die gleiche Stromlinie beziehen. In vorliegender Arbeit wird die Gradientgröße untersucht, die aus Ballonmessungen sich ergibt, wenn im Gebirge auf einen durch dynamische Kräfte vertikal bewegten Ballon gleichzeitig statische Kräfte einwirken. Je nach der Kombination dynamischer und statischer Kräfte ergeben sich dann sowohl unter- wie überadiabatische Gradienten, was für die Interpretierung der Ballonmessungen von einiger Bedeutung ist, wie an praktischen Beispielen gezeigt wird.

Die Akademie hat den Direktor des botanischen Gartens in Lund, Hrn. Prof. Dr. Svante Murbeck, den ordentlichen Professor der Botanik an der Universität Heidelberg Hrn. Dr. Ludwig Jost und den ordentlichen Professor der Botanik an der Universität Uppsala Hrn. Dr. Hans Oscar Juel zu korrespondierenden Mitgliedern ihrer physikalisch-mathematischen Klasse gewählt.

Temperaturgradienten bei Föhn.

Von H. v. Ficker.

(Vorgelegt von Hrn. Hellmann.)

In früheren Untersuchungen[1], die an Ballonaufstiege im Gebirge anknüpften, wurde bereits die Frage erörtert, warum auch bei voll entwickeltem, von den Alpen zur vorgelagerten Ebene absteigendem Föhn die Größe der vertikalen Temperaturgradienten in der Regel erheblich unter dem trocken-adiabatischem Wert bleibt, während gleichzeitig die Beobachtungen an verschieden hoch, längs eines föhnbestrichenen Berghanges liegenden Bodenstationen eine vertikale Temperaturabnahme von etwa $1°/_{100}$ m ergeben. Die Erklärung für diesen Unterschied zwischen freier Atmosphäre liegt darin, daß Temperaturmessungen, die sich auf verschiedene Höhen beziehen, gewöhnlich nur dann einen Temperaturgradienten von $1°/_{100}$ m ergeben, wenn die Messungen in verschiedenen Höhen der gleichen Strömungslinie ausgeführt werden. Dieser Bedingung genügen angenähert Bodenstationen in verschiedenen Höhen eines Berghanges oder eines seiner Länge nach von der Föhnströmung durchflossenen Tales, da in diesem Fall die Messungen sich annäherungsweise auf die gleiche, nämlich die unterste Strömungslinie beziehen. Die Bedingung ist aber nicht erfüllt, wenn auf einen, unter dem dynamischen Einfluß vertikal bewegter Luftmassen sich senkenden oder hebenden Ballon gleichzeitig statische Kräfte (Auf- oder Abtrieb) einwirken; in diesem Falle tritt der Ballon andauernd auf andere, höher oder tiefer gelegene Stromlinien über. Dabei ergeben die Ballonbeobachtungen je nach der Kombination dynamischer und statischer Kräfte unter- oder überadiabatische Gradienten, über deren Entstehung später eingehender zu sprechen ist; fehlen hingegen statisch wirksame Kräfte oder können sie gegenüber den dynamisch wirksamen vernachläßigt werden, so driftet der Ballon in der gleichen Stromlinie, deren Höhenschwankungen er passiv mitmacht. Es ergeben dann auch zeitlich aufeinanderfolgende Temperaturmessungen im Ballon den trocken-adiabatischen Gradienten, solange keine Kondensationsvorgänge vorhanden sind, d. h. es bleibt längs der gleichen Stromlinie die potentielle Temperatur konstant[2].

[1] Föhnuntersuchungen im Ballon. Wiener Sitzungsberichte 1912. Temperatur und Feuchtigkeit bei Föhn in der freien Atmosphäre. Wiener Sitzungsberichte 1912.

[2] Der bereits seit langem bekannte Satz, das längs einer Stromlinie die potentielle Temperatur konstant bleibt, erklärt auch die Tatsache, daß Gleitflächen zwischen Luftmassen verschiedener Temperatur, die im Aufbau der Depressionen eine große Rolle spielen, wenigstens angenähert als Flächen konstanter, potentieller Natur zu behandeln sind, solange der Wasserdampf aufgleitender Luftmassen nicht kondensiert.

Zunächst werden im Anschlusse und in Ergänzung an eine frühere Untersuchung die Temperaturgradienten in einer von der Kammhöhe eines Gebirges zur Ebene absinkenden Luftströmung behandelt.

1. Größe der Gradienten im Gebirge und über der Ebene.

Der zahlenmäßige Zusammenhang zwischen der Gradientgröße längs des Hanges, oberhalb des Gebirgskammes und in der freien Atmosphäre auf der Leeseite des Gebirges ergibt sich aus folgender Betrachtung: In Fig. 1 schmiegt sich Stromlinie I des absinkenden Luftstromes als unterste, am stärksten deformierte Stromlinie dem Gebirgshange an und senkt sich um h_1 Hektometer; längs dieser Stromlinien erwärmt sich die sinkende Luft um 1°/100 m $= \alpha$; es ist somit $T_2 = T_1 + \alpha h_1$. Stromlinie II geht von einer Höhe h_2 oberhalb des Kammes aus und senkt sich über der Ebene um h_2, also bis in Kammhöhe des Gebirges; man findet $t_2 = t_1 + \alpha h_2$. h_1 ist immer größer als h_2, da die Deformation der Stromlinien durch das Gebirge mit zunehmender Höhe immer schwächer wird. Oberhalb der Kammhöhe ist der vertikale Temperaturgradient β, so daß $T_1 = t_1 + \beta h_2$ ist; β ist in Wirklichkeit immer kleiner als α, so daß $\beta = \alpha - n$ gesetzt werden kann, wobei n häufig den halben Betrag von α erreicht, also durchaus nicht vernachlässigt werden darf. — Ein in der Ebene, über der die Stromlinien wieder horizontal verlaufen, hochgehender Ballon ergibt am Boden eine Temperatur T_2, in der Höhe h_1 eine Temperatur t_2, so daß $T_2 = t_2 + \gamma h$ ist, wenn γ den vertikalen Temperaturgradienten über der Ebene bezeichnet. Man erhält somit für T_2 die zwei Ausdrücke:

Fig. 1.

$$T_2 = T_1 + \alpha h_1 = t_1 + \beta h_2 + \alpha h_1 = t_1 + \alpha h_2 + \alpha h_1 - n h_2$$
$$T_2 = t_2 + \gamma h_1 \qquad\qquad = t_1 + \alpha h_2 + \gamma h_1 .$$

Die Beziehungen zwischen den Gradientwerten α_1, β, γ ist somit durch folgende Ausdrücke gegeben:

$$\beta = \alpha - n^1$$
$$\gamma = \alpha - n \frac{h_2}{h_1}.$$

Nur für den in Wirklichkeit nie vorkommenden Fall, daß innerhalb des Luftstromes oberhalb der Kammhöhe der Temperaturgradient des indifferenten Gleichgewichts gefunden wird ($n = 0$), wird $\beta = \gamma = \alpha$. Da β in Wirklichkeit aber immer kleiner als α ist, wird auch γ immer kleiner

[1] Da β kleiner als α, ist bei Existenz einer derartigen Strömung grundsätzlich $t_2 > T_1$, d. h. in Kammhöhe wird in der freien Atmosphäre eine höhere Temperatur gefunden als im Gebirge, was durch viele Beobachtungen belegt ist.

als α, jedoch größer als β gefunden werden, letzteres deshalb weil die Deformation der untersten Strömungslinie immer am größten, somit h_1 immer größer als h_2 ist. Die Vergrößerung des γ gegenüber α kann beträchtlich sein. Setzt man, was durchaus nicht extremen Annahmen entspricht, $\beta = 0.5\,^\circ/_{100}$ m, $h_1 = 10$, $h_2 = 5$ Hektometer, so wird $\gamma = 0.75\,^\circ/_{100}$ m, da immer $\alpha = 1^\circ/_{100}$ m.

Die Temperatur t_2 über der Ebene kann nur mit aerologischen Behelfen ermittelt werden. Erfolgt der Aufstieg in so großer Entfernung vom Gebirge, daß die Stromlinien bereits wieder horizontal gerichtet sind, so ist es gleichgültig, ob der Ballon rasch oder langsam aufsteigt, wenn sekundäre Einflüsse auf die Lufttemperatur (Strahlung, Luftmischung usw.) nicht vorhanden sind. Über der Ebene stimmen die aus Ballonbeobachtungen abgeleiteten Gradientwerte mit jenen überein, die aus gleichzeitigen, in der gleichen Vertikalen ausgeführten Temperaturmessungen sich ergeben würden. Im Gebirge, im Gebiete sich hebender oder senkender Stromlinien besteht diese Übereinstimmung nicht und außerdem wird hier die Aufstiegsgeschwindigkeit des Ballons von Einfluß.

2. Berechnung von Gradienten aus Ballonmessungen im Gebirge.

Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf die Tatsache, daß bei Ballonaufstiegen im Gebirge bei dynamisch erzwungener Vertikalbewegung des Ballons häufig aus den Messungen sich teils über-, teils unteradiabatische Gradienten ergeben, was nur möglich ist, wenn der Ballon während der Vertikalbewegung sich nicht in der gleichen Strömungslinie hält. Der Ballon tritt auf höhere oder niedrigere Stromlinien über, und es ist der Einfluß derartiger Vorgänge auf die Größe der Temperaturgradienten zu untersuchen; Kondensationsvorgänge werden dabei nicht berücksichtigt, spielen bei Föhn auf der Föhnseite des Gebirges auch keine Rolle.

Liefern die Ballonbeobachtungen während Fallens und Steigens des Ballons den trocken-adiabatischen Temperaturgradienten α, so ist der Schluß gerechtfertigt, daß der Ballon sich in der gleichen Strömungslinie gehalten hat. In einer früheren Untersuchung[1] wurde nachgewiesen, daß der fallende oder steigende Ballon in der Regel auf andere Strömungslinien übertritt; es sind vier verschiedene Fälle möglich, deren Einfluß auf die Gradientgröße kurz zu untersuchen ist.

a. Der sinkende Ballon tritt auf höhere Stromlinien über.

Dieser Fall ist häufig, weil ein im sinkenden Luftstrom mitgerissener Ballon gewöhnlich unter seine statische Gleichgewichtslage herabgedrückt wird, so daß während des Falles statischer Auftrieb wirksam ist. In Fig. 2 sind die Verhältnisse schematisch dargestellt. In einem gegebenen Zeitmoment befindet sich der Ballon auf Stromlinie I in der Höhe H; im Ballon wird die Temperatur t_1 gemessen. Nach Ablauf einer bestimmten Zeit befinden sich die Luftmassen, die den Ballon im Ausgangstadium umgeben und die sich längs Stromlinie I gesenkt haben, in einer um $(h_1 + h_2)$ Hektometer geringeren Höhe und ihre Temperatur ist adiabatisch auf $t_2 = t_1 + \alpha(h_1 + h_2)$

[1] Bemerkungen über den Verlauf von Stromlinien im Gebirge. Tätigkeitsbericht des Preuß. Meteorolog. Instituts 1925.

Fig. 2.

gestiegen. Der Ballon hat sich in der gleichen Zeit nur um die Höhenstrecke h_I gesenkt[1] und befindet sich nun auf der höher gelegenen Stromlinie II; Temperatur, im Ballon gemessen, T. Der vertikale Temperaturgradient γ wird aus den Temperaturen t_I und T berechnet, obwohl die Messungen nicht gleichzeitig und nicht in der gleichen Vertikalen vorgenommen worden sind. Bezeichnet man mit β den tatsächlichen, vertikalen Temperaturgradienten zwischen beiden Stromlinien längs der Höhenstrecke h_2 und berücksichtigt man, daß β immer kleiner als α, mithin $\beta = \alpha - n$ ist, so berechnet sich γ wie folgt:

$$T = t_I + \gamma h_I$$

$$T = t_2 - \beta h_2 = t_I + \alpha(h_I + h_2) - (\alpha - n) h_2$$

$$\gamma = \alpha + n \frac{h_2}{h_I}.$$

Obwohl also der Ballon langsamer sinkt als die Luftmassen und obwohl letztere stabil geschichtet sind ($\beta < \alpha$), ergeben die Ballonbeobachtungen einen Temperaturgradienten, der um so stärker den adiabatischen Gradienten überschreitet, je geringer im Verhältnis zur ursprünglich zugehörigen Stromlinie die Senkung des Ballons ist. Der unter solchen Verhältnissen aus Ballonbeobachtungen berechnete Temperaturgradient sagt nichts aus über die tatsächlich vorhandene Temperaturschichtung. Kann in die Beziehung für γ ein wahrscheinlicher Wert für n eingeführt werden, so kann zunächst das Verhältnis $\frac{h_2}{h_I}$ ermittelt werden, außerdem aber, da h_I unmittelbar durch Luftdruckmessungen oder durch einen Höhenschreiber gegeben ist, auch h_2 und damit die gesamte Höhenstrecke, um die sich die Stromlinie I gesenkt hat, da die Senkung der letzteren $(h_I + h_2)$ Hektometer beträgt.

b. Der sinkende Ballon tritt auf niedrigere Stromlinien über.

Der Fall, daß ein sinkender Ballon auf niedrigere Stromlinien übertritt, ist seltener und tritt meistens nur im ersten Abschnitt einer Gebirgsfahrt dann ein, wenn der Ballon auf der Luvseite einer Gebirgskette durch einen aufsteigenden Luftstrom über seine statische Gleichgewichtslage hinaufgehoben worden ist. Auf der Leeseite der Kette sinkt dann der Ballon im absteigenden Ast der Strömung rascher als die Luftmassen, die ihn beim Überfliegen der Kammhöhe umgeben haben. Da hierbei immer die Gefahr besteht,

[1] Der Einfachheit halber ist angenommen, daß die horizontale Verschiebung des Ballons gleich groß ist wie die einer gleichzeitig längs Stromlinie I absinkenden Luftmasse.

daß der überlastete Ballon im abfallenden Berggehänge zur Strandung kommt, greift der Ballonführer gewöhnlich rasch mit Ballastabgabe ein, woraus sich die relative Seltenheit des Vorganges erklärt. Es läßt sich leicht zeigen, daß die Temperaturmessungen, die in einem, unter den geschilderten Verhältnissen ungewöhnlich rasch sinkenden Ballon ausgeführt werden, unteradiabatische Temperaturgradienten ergeben müssen.

In Höhe H auf Stromlinie I — Fig. 3 — wird die Temperatur t_1 gemessen. Während des Fallens tritt der Ballon auf Stromlinie II über. Nach einer Gesamtsenkung um $(h_1 + h_2)$ wird im Ballon die Temperatur T abgelesen. Die ursprünglich zugehörige Stromlinie I hat sich nur um h_1 gesenkt; hätte sich der Ballon in ihr gehalten, so wäre nach einer Senkung um h_1 die Tem-

Fig. 3.

Fig. 4.

peratur $t_2 = t_1 + \alpha h_1$ gemessen worden. Die tatsächliche, vertikale Temperaturabnahme zwischen Stromlinien I und II zur Zeit der zweiten Messung ist durch T und t_2 gegeben; Gradient β, mithin $T = t_2 + \beta h_2$, worin $\beta = \alpha - n$ zu setzen ist. Aus den gemessenen Temperaturen T und t_1 berechnet sich hingegen der Gradient zu $\gamma = \alpha - n \frac{h_2}{h_1 + h_2}$. Man erhält also trotz des rapiden Falles einen unteradiabatischen Gradienten, es sei denn, daß $\beta = \alpha$ ist; von diesem wohl nie realisierten Spezialfall abgesehen, wird außerdem γ immer größer wie β gefunden werden.

c. Der steigende Ballon geht auf höhere Stromlinien über.

Da der Wiederaufstieg eines zuerst dynamisch unter seine Gleichgewichtslage (Prallhöhe) herabgedrückten Ballons unter Mitwirkung statischen Auftriebes vor sich geht, ist es sehr häufig, daß der hochgehende Ballon dabei auf höhere Stromlinien übergeht (Fig. 4). In diesem Falle ergeben die im Ballon gemessenen Temperaturen t_1 und T einen unteradiabatischen Gradienten

$$\gamma = \alpha - n \frac{h_2}{h_1 + h_2}.$$

d. Der steigende Ballon geht auf niedrigere Stromlinien über.

Dieser Fall ist, wie Fall b, verhältnismäßig selten, weil ein vorsichtiger Ballonführer bei Anfliegen der ersten Bergkette die Hebung des Ballons hinauf zur Kammhöhe in der Regel nicht allein der dynamischen Einwirkung des aufsteigenden Luftstromes überlassen, sondern trachten wird, den Ballon durch gleichzeitige, entsprechende Ballastabgabe statisch ausbalanciert zur Kammhöhe der ersten Kette zu bringen. Erfolgt — was bei Führern, die mit der Technik von Gebirgsaufstiegen noch nicht ausreichend vertraut sind, mitunter vorkommt — diese Ballastabgabe nicht oder nicht in genügendem Ausmaß, so tritt der Ballon, dessen statische Gleichgewichtslage unterhalb der Kammhöhe liegt, während des Aufstieges auf niedrigere Stromlinien über.

Fig. 5.

Temperaturmessungen ergeben in diesem Falle (Fig. 5; t_1 und T sind die im Ballon gemessenen Temperaturen) einen überadiabatischen Gradienten

$$\gamma = \alpha + n \frac{h_1}{h_2}.$$

Schließt man den Fall, daß die in Betracht kommenden Luftmassen in sich indifferent ($\beta = \alpha$) oder instabil ($\beta > \alpha$), geschichtet sind, aus, so ergibt sich: Bei dynamisch eingeleiteten Vertikalbewegungen des Ballons ergeben Temperaturmessungen einen überadiabatischen Gradienten ($\gamma > \alpha$), wenn entweder der fallende Ballon auf höhere oder der steigende Ballon auf niedrigere Stromlinien übertritt. Unteradiabatische Gradienten ergeben sich aus der Berechnung der Messungen dann, wenn der fallende Ballon auf niedrigere, der steigende Ballon auf höhere Stromlinien übergeht. Den adiabatischen Gradienten ergeben Ballonmessungen nur, wenn der fallende oder steigende Ballon auf der gleichen Stomlinie bleibt. Alle diese Gradienten sind nicht reell und sagen nichts aus über die tatsächlich bestehende vertikale Temperaturschichtung.

e. Beispiele.

Betrachtungen der geschilderten Art sind geeignet, Beobachtungsergebnisse von Ballonfahrten im Gebirge, denen man zunächst ziemlich ratlos gegenübersteht, zu erklären, wofür einige Beispiele folgen.

Ballonfahrt am 6. Oktober 1911.

Von Innsbruck aus wurden bei Föhn die vier Parallketten des Karwendelgebirges überflogen. Die Vertikalbewegung der Luftmassen in den drei Tälern war sehr heftig. Während des Aufstieges zur ersten Kette wurde von einer Höhe von 1700 m an — statische Gleichgewichtslage des Ballons — die Hebung des Ballons bis zur Kammhöhe 2400 m dem aufsteigenden Luftstrom

überlassen. Der überbelastete Ballon trat auf niedrigere Stromlinien über. Nach Überfliegen der ersten Kette wurde der Ballon zuerst zur Sohle des ersten Tales um 900 m hinabgerissen, um dann längs der Felswände der zweiten Kette um 1100 m bis zur Kammhöhe aufzusteigen. Fahrtdauer von der ersten zur zweiten Kette (in Luftlinie 6 km) fünf Minuten; also sehr intensive Vertikal- und Horizontalbewegung. Mittlerer Temperaturgradient während dieser Vertikalbewegung etwa 0.5°/100 m — ein auffallend kleiner Wert, der nur erklärlich ist, wenn man annimmt, daß der überbelastete Ballon fallend auf immer niedrigere Stromlinien übertrat, während er bei Aufstieg zur zweiten Kette infolge starker Ballastabgabe höhere Stromlinien aufsuchte. — Durch Ballastabgabe in Höhe der zweiten Kette fast ausbalanciert, fiel der Ballon zwischen zweiter und dritter Kette um 700 m und stieg dann wieder um 900 m an; der Temperaturgradient von 0.87° während des Falles beweist, daß der Ballon im großen und ganzen in der gleichen Stromlinie sich hielt, wenn auch noch mit einer leichten Tendenz, auf niedrigere Stromlinien überzutreten. Neuerliche Ballastabgabe brachte sodann den Ballon während des folgenden Aufstieges wieder auf höhere Stromlinien (Gradient nur 0.7°/100 m). Über dem dritten Tal trat nur mehr eine geringe, erzwungene Vertikalbewegung ein; der Ballon fiel um 150 m, aber zwei Messungen ergaben einen Gradienten von 1.9°/100 m, also einen stark überadiabatischen Wert, der anzeigt, daß trotz starker Senkung der Stromlinien der Ballon wegen starken statischen Auftriebes (Ballastabgabe in Luv der dritten Kette) nur wenig sank, d. h. fallend auf immer höhere Stromlinien übertrat. Aus der Beziehung $\gamma = \alpha + n\frac{h_2}{h_1}$ kann das Verhältnis $\frac{h_2}{h_1}$ und, da h_1 (Fall des Ballons) bekannt ist, auch $(h_1 + h_2)$ — Senkung der ursprünglich oberhalb der dritten Kette zugehörigen Stromlinie — ermittelt werden, wenn für n ein wahrscheinlicher Wert eingesetzt werden kann. $\beta = \alpha - n$ kann bei Föhn zu etwa 0.7 veranschlagt werden, so daß $n = 0.3$ wird. Da $\gamma = 1.9$, findet man $\frac{h_2}{h_1} = 3$. Da $h_1 = 150$ m ist, erhält man $h_2 = 450$ m und $h_1 + h_2 = 600$ m. Während also der Ballon im fallenden Luftstrom wegen starken statischen Auftriebes sich nur um 150 m gesenkt hat, haben sich die Luftmassen, die ihn bei Beginn des Fallens oberhalb der dritten Kette umgeben haben, um ungefähr 600 m gesenkt.

Ballonfahrt am 13. Dezember 1910.

Die Fahrt führte bei beginnendem Föhn über Karwendelgebirge, Achental, Schliersee in die Ebene. Über dem Achental wurde der Ballon durch die absteigende Strömung um 600 m herabgedrückt (Gradient 1.16°/100 m) und stieg dann wieder empor (Gradient 0.83°/100 m). Der Ballon, unter seiner Prallhöhe sich bewegend, trat sinkend und steigend auf höhere Stromlinien über, was im Fallen einen überadiabatischen, im Steigen einen unteradiabatischen Gradienten lieferte.

Über die Wetterlage bei guter Fernsicht von Bergeshöhen.

Von G. Hellmann.

(Vorgetragen am 12. November 1925 [s. oben S. 509].)

Bei Durchsicht der meteorologischen Beobachtungen, die seit einigen Jahrzehnten auf dem Gipfel der Schneekoppe (1602 m) und des Brocken (1142 m) angestellt werden und die auch Angaben über die Sichtigkeit enthalten, fiel mir auf, daß gute Fernsicht von diesen Bergeshöhen an eine ganz bestimmte Wetterlage gebunden ist, nämlich an Temperaturumkehr mit der Höhe (Inversion). Einen besonders markanten Fall dieser Art habe ich bereits in meiner Abhandlung über den Nebel in Deutschland (diese Sitzungsberichte 1921 S. 918) kurz erwähnt, und ich will nun diese Frage hier etwas eingehender behandeln, nachdem inzwischen W. Peppler dieselbe bzw. eine sehr ähnliche Frage beim Schwarzwald untersucht hat (»Das Wetter« 1925).

Der kausale Zusammenhang ist offenbar folgender. Temperaturumkehr mit der Höhe tritt in den unteren Schichten der Atmosphäre in Begleitung von barometrischen Hochdruckgebieten auf. In diesen sinkt die Luft herab, wird dadurch wärmer und trockener und löst die Wolken auf, so daß auf den Höhen der Gebirge heiterer Himmel herrscht, während in der Tiefe, bis wohin die dynamische Erwärmung nicht dringt, infolge der starken Ausstrahlung der Erdoberfläche kalte Luft und meist auch Nebel lagert. Bei dieser Temperaturschichtung gibt es keine aufsteigenden Luftströme, die Staub in die Höhe führen und dadurch die Sichtigkeit verringern könnten. Im Gegenteil muß die absinkende Luft die in den höheren Schichten schwebenden Staubteilchen, Sporen usw. nach unten bringen und damit die gute Fernsicht ermöglichen. Diese besteht also nur in den höheren Regionen, von Höhe zu Höhe, während die Sicht von der Höhe ins Tal meist nicht gut ist bzw. durch das unten lagernde Nebelmeer ganz genommen wird. Aber über das Nebelmeer hinweg kann man weit entfernte Objekte gut erkennen.

Temperaturumkehr mit der Höhe kommt in allen Jahreszeiten vor, kräftige und etwas länger andauernde aber nur in der kalten Jahreshälfte, zumeist vom November bis Februar. Das stimmt überein mit der von Bergsteigern und Schneesportlern aus eigener Erfahrung gewonnenen Kenntnis, daß die Fernsicht von Bergeshöhen im Sommer niemals so gut ist, wie sie im Winter bisweilen sein kann. Bei der Reinheit der Luft sind alsdann die Dämmerungserscheinungen (Gegendämmerung, Dämmerung, oft auch Purpurlicht) besonders scharf ausgeprägt, und der farbig umsäumte Schatten des Schneekoppenkegels, weniger deutlich der der flachen Brockenkuppe, hebt sich bei tiefem Sonnenstand am Horizont scharf ab. Auch das Zodiakallicht wird an solchen Tagen

vom Koppenbeobachter nicht selten wahrgenommen. Die mit der Temperaturumkehr häufig verbundene Ruhe der Luft und der von morgens bis abends anhaltende Sonnenschein gestatten sogar einen längeren Aufenthalt im Freien. Für die Bewohner der Berggipfel sind das herrliche Tage, die für die langen Perioden schlechten Wetters etwas entschädigen.

Ein Zeichen besonders guter Sicht von der Schneekoppe ist das vom Beobachter öfters vermerkte Erscheinen von Kuppen des Erzgebirges (Entfernung etwa 160 km) oder gar des Böhmer Waldes[1] (etwa 250 km) im Westen und im Südwesten, vom Altvater (etwa 130 km) im Südosten, während in der Richtung nach Süden zu merkwürdig oft das auf steiler Anhöhe liegende Tabor (450 m), die alte Hussitenstadt und Festung (135 km), gesichtet wird. Das in der Tiefe liegende Prag dagegen bleibt meistens unsichtbar. Auf der Nordseite sind die einzigen vorhandenen Berggipfel Grüditzberg (50 km) und Zobtenberg (75 km) natürlich sehr häufig zu sehen, und im Tagebuch des Beobachters findet sich dann fast regelmäßig die Eintragung: »Lichter aller entfernten Städte, außer von Breslau«. Der Dunst der Stadt absorbiert offenbar das Licht.

Vom Brocken erscheint bei mäßiger Sicht der Kyffhäuser in 58 km Entfernung, bei guter der Thüringer Wald (etwa 110 km) und der Meißner (95 km), während nach Norden hin solche Objekte zur Prüfung der Fernsicht nicht vorhanden sind.

Es mögen nun ein paar Beispiele von Temperaturumkehr mit der Höhe das eben Gesagte näher beleuchten.

Als Basisstation zur Schneekoppe dient anfangs Eichberg am Bober in 18 km Enfernung, später das am Fuß des Gebirges liegende Arnsdorf, das nur 2 Bogenminuten nördlich von der Koppe gelegen ist. Beim Brocken ist Basisstation die Zuckerfabrik von Wasserleben, die 17.5 km nordöstlich schon ganz im norddeutschen Flachland liegt.

Eine ungewöhnlich lange Periode hohen Luftdrucks und damit verbundener Temperaturumkehr stellte sich im letzten Drittel des Novembers 1921 ein und dauerte zwölf Tage bis zum 5. Dezember. Die Schneekoppe hatte in dieser Zeit heiteren Himmel, der auch in der auf der Nordseite gelegenen Station Arnsdorf vorherrschte, während auf der Südseite, über Böhmen, ein Nebelmeer lag, über das hinweg eine sehr gute Fernsicht war. Der azimutale Umfang dieser Fernsicht wechselte etwas, aber an mehreren Tagen hintereinander, namentlich vom 24. bis 26. November, war sie rundum gleich gut. Die Temperaturdifferenz zwischen Gipfel und Basisstation war am größten am 1. Dezember um 7 Uhr morgens; zu dieser Zeit war es auf der Koppe um 9.8° wärmer als in Arnsdorf. Die relative Feuchtigkeit war auf dem Gipfel durchweg[2] niedriger als unten und sank bis auf 12, ja 7 Prozent herab. Diese niedrigen Werte drücken indessen nur die ungefähre Größenordnung aus; denn die hygro-

---

[1] Da die Aussichtsweite vom Gipfel der Schneekoppe 153 km beträgt, ist das Auftauchen am Horizont von Kuppen des Böhmerwaldes, die allerdings bis zu 1450 m aufragen, sehr bemerkenswert.

[2] Außer am 5. Dezember um 2 Uhr, wo leichter Nebel von Böhmen her über die Koppe hinwegstrich.

metrischen Methoden sind bei tiefen Temperaturen noch sehr unsicher. Auf der Schneekoppe wehten frische Winde, während es im Tal ruhiger war.

Die hier in Betracht kommenden Einzelwerte der meteorologischen Elemente Temperatur, relative Feuchtigkeit, Bewölkung, Wind für die Tage vom 24. November bis 5. Dezember folgen in Tabelle 1.

Tabelle 1.

Temperaturumkehr mit der Höhe zwischen Schneekoppe (1602 m) und Arnsdorf (437 m)

		Temperatur					Rel. Feuchtigkeit			Bewölkung			Wind		
1921		7^a	2^p	9^p	Max.	Min.	7^a	2^p	9^p	7^a	2^p	9^p	7^a	2^p	9^p
Novemb. 24	Sch.	− 3.1	− 1.9	− 1.8	− 1.1	− 4.8	25	22	10	0	$0_{\odot}$	0	S_6	S_5	S_5
	Arn.	− 5.8	7.1	− 5.4	8.9	− 7.2	76	32	93	0	$0_{\odot}$	0	N_1	N_1	E_1
» 25	Sch.	− 2.0	− 3.1	− 4.8	− 1.1	− 4.8	17	31	30	0	$0_{\odot}$	0	S_5	SSW_5	S_5
	Arn.	− 6.4	6.8	− 1.5	8.0	− 8.6	72	28	56	0	$0_{\odot}$	0	W_1	N_2	SE_2
» 26	Sch.	− 4.6	− 4.5	− 3.5	− 3.5	− 6.5	32	24	22	2^0	$1^0_{\odot}$	0	S_5	S_4	SSE_3
	Arn.	− 7.2	7.3	− 8.6	7.9	− 8.6	86	23	84	0	$0_{\odot}$	0	C	SW_1	NW_1
» 27	Sch.	− 3.7	− 3.4	− 4.3	− 3.4	− 5.5	7	14	46	1^0	$1^0_{\odot}$	1^0	SE_3	SE_4	ESE_3
	Arn.	−10.4	1.0	− 9.9	2.1	−11.3	72	72	88	0	$0_{\odot}$	0	C	N_2	E_1
» 28	Sch.	− 3.3	− 1.2	− 3.4	0.5	− 4.6	36	22	12	2^0	$1^0_{\odot}$	1^0	ENE_3	NE_3	N_4
	Arn.	−11.0	− 0.6	− 6.1	0.5	−11.7	90	58	82	0	$0_{\odot}$	0	NE_2	N_1	N_2
» 29	Sch.	− 2.4	0.8	− 1.6	2.3	− 3.4	12	34	20	2^0	$1^0_{\odot}$	1^0	N_5	N_3	N_2
	Arn.	−10.7	2.3	− 8.5	3.1	−12.5	62	47	84	1^1	$0_{\odot}$	0	E_1	W_2	E_1
» 30	Sch.	− 1.2	− 0.7	− 2.7	0.5	− 3.4	12	24	21	3^0	$1^0_{\odot}$	1^0	NW_2	SW_2	N_3
	Arn.	− 9.6	4.4	−10.2	6.7	−11.6	56	37	78	1^0	$0_{\odot}$	0	N_1	SW_1	E_1
Dezember 1	Sch.	− 4.0	− 1.3	− 6.3	0.4	− 6.3	58	30	36	1^0	$1^0_{\odot}$	1^0	N_2	NE_3	ESE_3
	Arn.	−13.8	− 3.6	− 2.0	− 2.0	−14.7	96	52	56	$10^2_{\equiv}$	$0_{\odot}$	0	E_2	N_2	NW_3
» 2	Sch.	− 3.1	− 5.2	− 7.4	− 0.6	− 9.4	25	35	56	4^0	$2^0_{\odot}$	1^0	SE_5	SSE_6	S_6
	Arn.	− 8.3	− 3.4	− 7.0	− 1.4	−10.0	85	75	83	2^2	$3^2_{\odot}$	0	SE_2	E_4	E_3
» 3	Sch.	− 4.3	− 5.3	− 8.3	− 3.9	− 8.4	39	44	14	1^0	$1^0_{\odot}$	1^0	SE_4	ESE_3	E_5
	Arn.	−13.2	− 3.8	− 8.3	− 2.9	−14.7	88	75	93	0	$0_{\odot}$	0	SE_2	N_2	N_1
» 4	Sch.	−11.2	− 6.1	− 4.6	− 4.2	−11.5	84	24	17	2^0	$1^0_{\odot}$	1^0	SE_6	E_5	SE_6
	Arn.	−13.8	− 3.8	−10.6	− 2.9	−15.1	84	62	91	0	$1^2_{\odot}$	0	E_2	N_2	N_3
» 5	Sch.	− 5.9	− 5.3	− 4.7	− 2.9	− 8.5	20	89	76	2^0	$1^0_{\equiv}$	2^2	S_5	SW_2	NE_2
	Arn.	−15.4	− 0.3	− 9.2	0.4	−16.1	91	45	92	1^0	$0_{\odot}$	0	C	SE_2	C

Schneekoppe. Fast alle Tage Talnebel im E, S, W, d. h. über Böhmen; Koppenschatten und Purpurlicht bei der Morgen- bzw. Abenddämmerung oder bei beiden, an einigen Tagen (25., 26., 30. Nov.) auch das Zodiakallicht sichtbar. An den meisten Tagen gute Fernsicht, auch über den Talnebel hinweg, bis zum Altvater, Erzgebirge und Böhmerwald.

Arnsdorf. Fast jeden Tag starke Reif- bzw. Rauhreifbildung.

Fast genau an denselben Tagen gab es auch Temperaturumkehr und gute Fernsicht auf dem Brocken. Ich bringe die entsprechenden Zahlenbelege hier nicht zum Abdruck, sondern will lieber für Schneekoppe und Brocken zu-

gleich ein Beispiel wählen, das durch eine ganz besonders große Temperaturumkehr ausgezeichnet ist und das auch einige andere der obenerwähnten Verhältnisse deutlich zum Ausdruck bringt.

Tabelle 2.

Temperaturumkehr mit der Höhe zwischen Schneekoppe (1602 m) und Eichberg (349 m), Brocken (1142 m) und Wasserleben (155 m).

a) Schneekoppe-Eichberg, 15.—19. Januar 1901.

1901		Temperatur 7ª	2ᵖ	9ᵖ	Max.	Min.	Rel. Feuchtigkeit 7ª	2ᵖ	9ᵖ	Bewölkung 7ª	2ᵖ	9ᵖ	Wind 7ª	2ᵖ	9ᵖ
Jan. 15	Sch.	− 3.6	− 3.6	− 0.8	− 0.5	− 6.1	31	35	20	3	$0_{\odot}$	1	N_3	S_1	S_1
	Eich.	−14.0	− 4.5	−11.7	− 4.1	−15.5	100	88	97	0	$0_{\odot}$	0	C	C	C
» 16	Sch.	1.0	2.2	2.9	3.1	− 2.9	15	10	4	1	$0_{\odot}$	1	S_1	SE_1	SE_2
	Eich.	−15.2	− 3.0	−12.1	− 2.6	−16.3	100	79	96	0	$0_{\odot}$	0	C	C	C
» 17	Sch.	3.1	4.3	3.5	4.8	2.5	3	7	3	4	$1_{\odot}$	0	S_1	S_1	S_1
	Eich.	−15.8	− 0.6	−12.4	− 0.1	−16.8	100	58	92	2	$3_{\odot}$	0	C	C	C
» 18	Sch.	3.9	5.1	2.1	5.4	1.9	5	5	10	1	$1_{\odot}$	1	S_1	S_1	S_1
	Eich.	−15.4	− 1.4	−10.8	− 0.6	−16.6	100	77	97	0	$0_{\odot}$	0	E_1	NW_1	E_2
» 19	Sch.	0 5	− 1.8	− 4.1	3.8	− 4.9	26	55	35	4	$2_{\odot}$	2	NW_2	SW_2	SW_3
	Eich.	−11.8	1.5	− 3.0	1.9	−14.1	93	68	75	3	$0_{\odot}$	1	C	C	E_2

b) Brocken-Wasserleben, 10.—18. Januar 1901.

1901		Temperatur 7ª	2ᵖ	9ᵖ	Max.	Min.	Rel. Feuchtigkeit 7ª	2ᵖ	9ᵖ	Bewölkung 7ª	2ᵖ	9ᵖ	Wind 7ª	2ᵖ	9ᵖ
Jan. 10	Br.	− 0.5	1.6	− 1.0	3.6	− 1,8	35	33	46	0	$0_{\odot}$	0	SSW_1	SE_1	SSE_3
	Wa.	−12.6	− 1.8	− 8.1	− 0.3	−13.2	100	84	94	$2_{\equiv}$	$2_{\equiv\odot}$	$2_{\equiv}$	SE_2	S_2	S_2
» 11	Br.	− 2.3	0.4	− 0.3	0.4	− 3.2	52	50	24	0	$0_{\odot}$	0	SSE_2	SSE_1	ESE_3
	Wa.	−12.0	− 4.8	−13.0	− 3.9	−13.5	100	86	100	$2_{\equiv}$	$6_{\equiv}$	$2_{\equiv}$	S_1	S_2	C
» 12	Br.	0.0	0 6	0.4	1.1	− 1.0	24	29	20	0	$0_{\odot}$	0	SSE_3	E_2	ENE_1
	Wa.	−13.6	− 8.4	−14.0	− 7.9	−15.5	100	100	100	$3_{\equiv}$	$4_{\equiv}$	$3_{\equiv}$	SE_2	SW_2	C
» 13	Br.	− 2.6	− 1.4	− 3.1	0.5	− 3.8	63	72	63	0	$0_{\odot}$	0	E_3	ESE_1	SE_2
	Wa.	−17.0	− 9.4	− 9.0	− 8.5	−17.3	100	100	100	$10_{\equiv}$	$7_{\equiv}$	$10_{\equiv}$	SE_4	SE_4	SE_2
» 14	Br.	− 2.0	1.8	− 1.3	1.8	− 4.4	34	23	10	0	$0_{\odot}$	0	E_3	SSE_2	SSE_3
	Wa.	−10.4	− 9.2	−11.6	− 8.8	−12.3	100	100	100	$10_{\equiv}$	$10_{\equiv}$	$10_{\equiv}$	SE_2	SE_4	SE_4
» 15	Br.	− 1.7	− 0.6	− 2.4	0.0	− 2.5	32	29	36	0	$0_{\odot}$	0	SSE_4	SSE_5	SE_5
	Wa.	−13.8	− 9.1	− 8.2	− 7.9	−16.5	100	100	100	$7_{\equiv}$	$5_{\equiv\odot}$	$10_{\equiv}$	SE_5	SE_6	SE_5
» 16	Br.	1.1	3.9	1.8	4.3	− 4.0	21	23	46	0	$0_{\odot}$	0	SSE_6	S_4	SSE_3
	Wa.	−13.2	− 4.6	−13.0	− 4.0	−13.3	100	90	100	$5_{\equiv}$	$5_{\equiv\odot}$	$1_{\equiv}$	SE_5	SE_2	SE_2
» 17	Br.	3.6	3.0	2.1	5.7	1.3	17	23	19	0	$0_{\odot}$	0	N_1	C	E_2
	Wa.	−10.6	1.5	− 8.7	3.5	−13.5	90	80	97	4	$4_{-\odot}$	0	SW_4	SW_2	C
» 18	Br.	1.3	2.1	− 1.4	3.0	− 2.3	21	22	75	0	$3_{\odot}$	0	SSW_2	SSW_3	WNW_5
	Wa.	−12.3	1.4	− 7.8	3.8	−13.5	100	80	94	2	$4_{-\odot}$	2	SW_1	SW_1	S_2

Während in dem zuerst besprochenen Beispiel (November/Dezember 1921) nur am Morgen- und meist auch am Abendtermin Temperaturumkehr mit der Höhe besteht, ist im zweiten Beispiel (Januar 1901) den ganzen Tag und

die Nacht hindurch die Temperatur auf den Gipfeln höher als unten im Tal. Am 18. Januar 1901 um 7 Uhr morgens liegt die Temperatur auf der Schneekoppe 19.3° über der von Eichberg, und beim Brocken beträgt diese Maximaldifferenz an drei Terminen mehr als 14° (14.8°, 14.4°, 14.3°). Das dürften die stärksten Temperaturumkehrungen sein, die bei beiden Bergen vorgekommen sind[1].

Der Brocken hat acht Tage hintereinander (10. bis 17. Januar 1901) von morgens bis abends Sonnenschein, während in Wasserleben häufig Nebel herrscht und die Luft meist dampfgesättigt ist. Auf der Schneekoppe sinkt die relative Feuchtigkeit wieder zu sehr niedrigen Werten (3, 5, 7 Prozent) herab; der Wind ist auf der Koppe schwach und im Hirschberger Tal ganz eingeschlafen.

So könnten noch viele andere Beispiele von Temperaturumkehr mit der Höhe gegeben werden, mit der gute Fernsicht verbunden ist. Die beiden näher besprochenen werden aber genügen, um die oben angeführten Grundsätze zu rechtfertigen.

Um noch ein Urteil über die Häufigkeit der Perioden mit guter Fernsicht zu gewinnen, habe ich die zehn Jahre von 1901 bis 1910 daraufhin systematisch durchgesehen und folgende gefunden. Es gab gute Sicht bei Temperaturumkehr:

1901: Januar 15—19, Schneekoppe; Januar 10—18, Brocken; Februar 22, Schneekoppe.

1902: Dezember 9—14, Brocken.

1903: Januar 16—22, Schneekoppe.

1904: Januar 6—8, 25—29, Schneekoppe und Brocken.

1905: Anfang Januar, Brocken; Januar 23—24, Schneekoppe.

1906: Januar 2 und Dezember 21—22, Schneekoppe.

1907: November 5—8, Schneekoppe.

1908: Januar 3, 14—15, 24—25; November 8—12; Dezember 6—7, Schneekoppe.

1909: Januar 19—21, 24—29; Dezember 13—15, 16—19, Schneekoppe und Brocken.

1910: keine.

Die näheren Einzelheiten über die Witterungsverhältnisse der vorstehend genannten Perioden findet man in den Veröffentlichungen des Preußischen Meteorologischen Instituts, in denen die Beobachtungen von der Schneekoppe und vom Brocken ausführlich abgedruckt sind. Man wird an ihnen feststellen können, daß die Temperaturumkehr immer am Morgentermin (7 Uhr) am stärksten ist, was schon vor vielen Jahren von Hann mit Recht als ein Beweis dafür angesehen wurde, daß nicht der Sonnenschein die hohe Temperatur auf den Berggipfeln erzeugt, sondern daß es die herabsinkende und sich dabei dynamisch erwärmende Luft ist. Die starke Ausstrahlung an der Basisstation

[1] Die reguläre Temperaturabnahme von der unteren zur oberen Station beträgt im Dezember/Januar bei der Schneekoppe 5.5° bzw. 5.0°, wenn die untere Station Arnsdorf ist, beim Brocken 4.4°. Um diese Beträge muß also die Temperaturdifferenz Gipfel weniger Basisstation erhöht werden, um die wahre Temperaturanomalie der Gipfelstation zu erhalten; sie betrug demnach am 18. Januar 1901 um 7 Uhr morgens bei der Schneekoppe 19.3+5.5 = 24.8°, usw.

hilft den Temperaturunterschied zwischen oben und unten natürlich stark vergrößern.

Wenn in der obigen Zusammenstellung von Perioden mit Temperaturumkehr die Schneekoppe öfters erscheint als der Brocken, so hängt das wahrscheinlich mit der häufigen Lage des Hochdruckgebietes in Osteuropa zusammen. Die östlicher als der Brocken gelegene Schneekoppe kommt leichter und gewöhnlich etwas später unter den Einfluß dieser Barometermaxima.

Ich habe in den synoptischen Wetterkarten nachgesehen, wo sich das Zentrum des Hochdruckgebiets während der oben aufgezählten Perioden der Temperaturumkehr befand und habe gefunden, daß es nur zweimal zentral über Mitteleuropa bzw. Deutschland lag. In den meisten Fällen lag es im Nordosten oder Osten von Europa bzw. wanderte nach diesen Richtungen. Daher erfolgt der Eintritt des höchsten Luftdrucks auf den Gipfel- und Basisstationen gewöhnlich etwas vor der Ausbildung der Temperaturumkehr. Das Absinken der Luft aus der Höhe geht also am besten auf der West- oder Südwestseite eines Barometermaximums vor sich. Wenn einmal ein solches westlich von den beiden Berggipfeln lag, ist es nie zur Ausbildung einer kräftigen Inversion gekommen. Aus diesem Grunde gab es z. B. im Winter 1909/10 keine Temperaturumkehr von einiger Bedeutung.

Die vorstehenden Ausführungen gelten zunächst nur für diejenigen Gebirge (Riesengebirge und Harz), aus denen die der Untersuchung zugrunde liegenden Beobachtungen stammen. Da aber für den Schwarzwald und die Alpen sehr ähnliche Ergebnisse gefunden worden sind, darf man sie wohl verallgemeinern und annehmen, daß bei kräftiger und etwas länger andauernder Temperaturumkehr mit der Höhe überall die Fernsicht von Bergeshöhen gut ist. Dieser Zusammenhang ist so eng, daß man auch in Fällen, in denen Inversion bestand, die Notierung der Sicht aber unterblieb — was bei dem alten Brockenbeobachter gar nicht selten vorkam — hinterher auf das Vorhandensein guter Fernsicht schließen kann.

Wasserhosen auf dem Atlantischen Ozean.

Von G. Hellmann.

(Vorgetragen am 12. November 1925 [s. oben S. 509].)

Als im Zeitalter der Entdeckungen neue Länder und »vorher nie befahrene Meere«[1] bekannt wurden, bot sich die Gelegenheit, Naturerscheinungen kennenzulernen, die zuvor selten oder gar nicht beobachtet worden waren. Zeugnis davon geben das von Columbus auf der esten Fahrt nach Westindien geführte Tagebuch und das Nationalepos der Portugiesen »Os Lusiadas«, in dem der Dichter Luiz de Camões die Fahrten seiner Landsleute um das Kap der Guten Hoffnung nach Ostindien begeistert schildert und die von ihm selbst auf einer solchen Reise gemachten Erfahrungen und Beobachtungen mit hineinflicht. So besingt er im fünften Canto die Fahrt längs der Westküste von Afrika nach Süden und schaltet gerade da, wo er den Äquator passiert, die Schilderung einer Wasserhose ein, welche als die erste gute Beschreibung dieser gewaltigen Naturerscheinung angesehen werden muß; denn die von Lukrez (VI, 423—442) gegebene, die beste des Altertums, ist nicht so treffend. Nachdem Camões vom Elmsfeuer gesprochen (»o lume vivo, Que a maritima gente tem por santo . .«) beschreibt er die Wasserhose, wie folgt:

XVIII

Não menos foi a todos excessivo
Milagre, e cousa certo de alto espanto,
Ver as nuvens do mar com largo cano
Sorver as altas aguas do Oceano.

Übersetzung von Donner.

Und wie da ziehn des Ozeans hohe Wellen
Die Wolken säulengleich zum Himmelszelt:
Das war ein Wunder schrecklich anzuschauen,
Und alles Volk durchbebt unheimlich Grauen.

XIX

Eu o vi certamente (e não presumo
Que a vista me enganava) levantar-se
No ar hum vaporzinho, e subtil fumo,
E, do vento trazido, rodear-se:
De aqui levado hum cano ao polo summo
Se via, tão delgado, que enxergar-se
Dos olhos facilmente não podia;
Da materia das nuvens parecia.

Ich sah ganz deutlich seinen Rauch sich heben
(Und nicht getäuschet hat mich mein Gesicht)
Hoch in den Lüften, und als Wölkchen schweben
Das, windgetrieben, sich zum Kreise flicht.
Zum höchsten Punkt darauf schaut man es streben
Als dünnes Rohr, doch gänzlich konnte nicht
Das Aug' ihm folgen, als es zieht nach oben,
So zart erschien's, wie wolkendunstgewoben.

XX

Hia-se pouco e pouco accrescentando,
E mais, que hum largo mastro, se engrossava:
Aqui se estreita, aqui se alarga, quando
Os golpes grandes de agua em si chupava:
Estava-se co' as ondas ondeando,
Em cima delle hũa nuvem se espessava
Fazendo-se maior, mais carregada
Co' o cargo grande d'agua em si tomada.

Und immer wachsend kommt's herangezogen,
Dem stärksten Mastbaum gleicht's bald überall
Hier enger, weiter dort, wie es gesogen
In sich nun hat der Fluten großen Schwall;
Hoch mit den Wogen siehet man es wogen,
Und drüber hängt sich einer Wolke Wall,
Die stets an Größe zunimmt und an Schwere,
Je mehr sie Wasser schlürfet aus dem Meere.

[1] »Por mares nunca de antes navegados«, Os Lusiadas, canto primeiro I, 3.

XXI

Qual rôxa sanguesuga se veria
Nos beiços da alimaria (que imprudente
Bebendo a recolheo na fonte fria)
Fartar co' o sangue alheio a sêde ardente:
Chupando mais e mais se engrossa, e cria,
Alli se enche, e se alarga grandemente:
Tal a grande columna, enchendo augmenta
A si, e a nuvem negra, que sustenta.

Blutegeln gleich den roten, welche fühlet
Das Rind am Mund (wenn blindlings mit der Flut
Aus frischer Quelle seinen Durst es kühlet)
Die Gierde löschen so an seinem Blut;
Dort wachsen sie. Je mehr ihr Stachel wühlet,
Je größer werden sie in Blutrunstwut, —
So schwillt die große Säule, sich vermehrend,
Die schwarze Wolke, die sie trägt, ernährend.

XXII

Mas, despois que de todo se fartou,
O pé, que tem no mar, a si recolhe,
E pelo ceo chovendo em fim voou,
Porque co' a agua a jacente agua molhe:
A's ondas torna as ondas, que tomou;
Mas o sabor do sal lhe tira, e tolhe.
Vejam agora os sabios na escriptura
Que segredos são estes de natura.

Doch wie sie satt ist, ziehet ihre Glieder,
Die untr'en, aus dem Meere sie zuletzt;
Als Regen fliegt sie aus dem Himmel nieder,
Indem sie so des Wassers Ebne netzt,
Und gibt den Wellen ihre Wogen wieder,
Doch nimmt den Salzgeschmack sie ihnen jetzt.
So mögen nun die Schriftgelehrten sehen,
Was für Naturgeheimnisse bestehen.

Mit Recht hat schon A. von Humboldt (Kosmos II, 59) die Größe und Wahrheit der Naturbilder von Camões rühmend hervorgehoben, der nach ihm »im eigentlichen Sinne des Wortes ein großer Seemaler ist«. Bemerkenswert früh ist die wohl aus eigener Erfahrung gewonnene Kenntnis, daß aus einer auf dem Meere sich bildenden Wasserhose auch nichtgesalzenes Wasser herabfällt.

Es liegt nahe zu vermuten, daß Luiz de Camões gerade im äquatorialen Gebiet des Atlantischen Ozeans eine oder mehrere Wasserhosen beobachtet hat. In der Tat wird dieser Meeresteil in den maritim-meteorologischen Werken als besonders reich an Wasserhosen hingestellt, aber wirklich vergleichbare Angaben über deren Häufigkeit fehlen überall. Es schien mir daher besonders erwünscht, solche zahlenmäßige Belege zu geben und dabei zugleich einiges neue Material zur Kenntnis der Wasserhosen beizubringen. Dazu dient, bislang noch unbenützt, das in zwei Veröffentlichungen des Meteorological Office in London bekannt gegebene Beobachtungsmaterial über die Meteorologie der neun Zehngradfelder zwischen 20° N und 10° S, 10° W und 40° W, die nach der von Marsden eingeführten Zählung die Nummern tragen: 38, 39, 40; 2, 3, 4; 301, 302, 303. Das Grenzgebiet von 38 und 39 sowie von 2 und 3 wird Camões befahren haben, da sich die Schiffahrt damals nicht weit vom Festland entfernte und das richtige Schneiden des Äquators noch unbekannt war.

Die zahlreichen Auszüge aus den Logbüchern von 1159 englischen Schiffen, die in den Jahren 1854—1871 diese Meeresteile passiert haben, sind monatweise mitgeteilt in

1. Remarks to accompany the Monthly Charts of Meteorological Data for Square 3; extending from the Equator to 10° N. Lat., and from 20° to 30° W. Long. London 1874. 4°. IV, 310 S.

2. Remarks to accompany the Monthly Charts of Meteorological Data for the nine 10° Squares of the Atlantic which lie between 20° N. and 10° S.

Lat., and extend from 10° to 40° W. Long. ending with the best routes across the Equator. London 1876. 4°. VI, 568 S., 1 Tafel[1].

Aus den »Remarks on Weather« ließen sich die folgenden Auszüge machen:

1. Zunächst wurde die Gesamtzahl der in den neun Zehngradfeldern beobachteten Wasserhosen ermittelt; sie betrug in

38	39	40	2	3	4	301	302	303	Summe
—	5	2	13	39	—	6	5	3	73

Diese Zahlen sind unter sich natürlich nicht streng vergleichbar, da die Anzahl der Schiffe, welche die einzelnen Felder befahren haben, ungleich groß ist, immerhin lassen sie einige wichtige Schlußfolgerungen zu.

Daß in [38], dessen größerer östlicher Teil afrikanisches Festland enthält, keine einzige Wasserhose beobachtet wurde, ist leicht verständlich, da die

Neun Zehngradfelder im Atlantischen Ozean.

Schiffe jetzt gewöhnlich einen westlicheren Kurs einhalten. Man darf aber annehmen, daß die Felder [39] und [3] nahezu gleich häufig von (englischen) Schiffen befahren wurden. Dann kommt man zu dem Schluß, daß die meisten Wasserhosen im Atlantischen Ozean im Zehngradfelde [3], d. h. zwischen 0—10° nördlicher Breite und 20—30° westlicher Länge, vorkommen. Im anstoßenden nördlichen Feld [39] und im anstoßenden südlichen [302] ist ihre Häufigkeit ungefähr achtmal kleiner als in [3]. Daß ferner nördlich von 20° N die Zahl der Wasserhosen sehr stark abnimmt, geht aus den Veröffentlichungen der Deutschen Seewarte »Resultate meteorologischer Beobachtungen von deutschen und holländischen Schiffen für Eingradfelder des Atlantischen Ozeans (20—50° N)« deutlich hervor. Ebenso wahrscheinlich ist ein gleiches

[1] Vgl. das Kärtchen zu meiner in den Monatsber. der Kgl. Akad. d. Wiss. zu Berlin, 1878 S. 364—402, abgedruckten Abhandlung: Über die auf dem Atlantischen Ozean in der Höhe der Capverdischen Inseln häufig vorkommenden Staubfälle, bei der die gleichen Veröffentlichungen benutzt wurden.

Verhalten im südatlantischen Ozean, südlich von 10° S, der noch keine Bearbeitung gefunden hat. Während östlich von [3] im Feld [2], das auch ein Stück afrikanischen Festlandes umschließt, der dritte Teil (13 gegen 39) der in [3] festgestellten Wasserhosen beobachtet wurde, kam westlich von [3] im Feld [4] keine einzige zur Wahrnehmung. Das rührt nicht bloß von der offenbar kleineren Zahl von Schiffen her, die dieses Feld passieren — es befindet sich auf dem Wege nach der Nordostküste von Brasilien —, sondern es liegt hier eine wirkliche starke Abnahme im Auftreten von Wasserhosen vor. Wir gelangen somit zu dem Ergebnis, daß es im mittleren Teil des Breitenstreifen 0—10° N, d. h. im Zentrum des atlantischen Windstillengürtels, am häufigsten zur Bildung von Wasserhosen kommt. Das führt zu der Vermutung, daß die drei Haupteigenschaften des Windstillengürtels, nämlich die hohe Temperatur von Luft und Wasser, die geringe horizontale Bewegung der Luft und der Auftrieb der wasserdampfreichen Luft die Entstehung von Wasserhosen sehr begünstigen.

2. Die Jahreszeit ist nicht ohne Einfluß: von den insgesamt 73 verzeichneten Wasserhosen entfallen 55, also rund drei Viertel, auf die Monate Oktober bis März und nur 28 oder rund ein Viertel auf April bis September. Die jahreszeitlichen Änderungen der Temperatur sowohl von Wasser wie von Luft sind in diesem Gebiet so geringfügig, daß sie auf die Frequenz der Wasserhosen keinen nennenswerten Einfluß haben können. Vielmehr wird die jahreszeitliche Verschiebung des Windstillengürtels und seine Einengung, einerseits durch den Südostpassat, andererseits durch den sich im Sommer ausbreitenden Südwestmonsun, eine jährliche Periode bzw. eine jahreszeitliche Verschiebung des Gebietes größter Häufigkeit zur Folge haben. Trägt man nämlich im Zehngradfeld [3] die 39 in ihm vorgekommenen Wasserhosen in die einzelnen Eingradfelder[1] ein, in denen sie wahrgenommen wurden, so zeigt sich sehr deutlich, daß sie in den ersten drei Monaten des Jahres (Januar bis März) in dem an den Äquator grenzenden südlichen Teil von [3] und von Juli ab vorzugsweise im nördlichen Teil auftreten, d. h. mit der Verschiebung des Windstillengürtels nach Norden verschiebt sich auch das Gebiet größter Häufigkeit der Wasserhosen. Daraus folgt auch, daß die Ableitung der jährlichen Periode im Auftreten der Wasserhosen in einem ganzen Zehngradfeld nicht recht zweckmäßig ist. Gleichwohl seien die entsprechenden Zahlen für [2] und [3] hier wiedergegeben:

	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
[2]	4	1	2	2	—	—	—	—	2	—	2	—
[3]	6	3	4	1	1	2	3	1	1	4	8	6

3. Von 34 Wasserhosen wird die Tagesstunde ihres Auftretens mitgeteilt, so daß sich die tägliche Periode ableiten läßt:

	h 0/1	h 1/2	h 2/3	h 3/4	h 4/5	h 5/6	h 6/7	h 7/8	h 8/9	h 9/10	h 10/11	h 11/12
a. m.	—	1	—	2	—	2	5	2	1	2	2	4
p. m.	—	—	1	3	2	2	1	3	1	—	—	—

[1] Jedes Zehngradfeld hat 100 1°-Felder, die von 00 bis 99 gezählt werden, und zwar von rechts unten nach links oben.

Sie ist ziemlich unbestimmt. Wenn die größte Zahl auf die Morgenstunde von 6 bis 7 Uhr fällt, so hängt das vermutlich damit zusammen, daß die alsdann einsetzende Strahlung der Sonne, direkte wie diffuse, kleine lokale Temperaturverschiedenheiten in der Oberfläche des Wassers hervorruft und den Auftrieb der Luft begünstigt. Daß nämlich solche Verschiedenheiten der Wassertemperatur gelegentlich vorkommen, geht aus den Notierungen in den Logbüchern (Rubrik »Remarks on Sea«) sicher hervor. Aus verschiedenen Eingradfeldern von [3] werden plötzliche Änderungen der Wassertemperatur von ±4 bis 5° F gemeldet. Meeresströmungen und Auftriebwasser werden dabei beteiligt sein.

4. Über die Lebensdauer der Wasserhosen werden in 18 Fällen zahlenmäßige Angaben gemacht. Es hatten eine Dauer von

3	5	7	8	10	15	17	30	45	Minuten
1	2	2	1	2	6	1	2	1	Wasserhosen

Die durchschnittliche Dauer beträgt 15 Minuten, die zugleich die am häufigsten vorkommende ist.

Ich lasse nun einige kurze Beschreibungen von Wasserhosen folgen, die Angaben über ihre Größe, Zuggeschwindigkeit, Drehrichtung usw. enthalten. Die Originalfassung in englischer Sprache wird der Genauigkeit wegen absichtlich beibehalten.

[3], 1° Feld 13, January. An immense waterspout formed to Nd. about half-a-mile off. It moved very slowly to Sd. and lasted about 15 minutes, revolving from right to left.

[3], 1° Feld 00, 10ª, February 11, 1871. A waterspout had suddenly formed within 20 yards of the ship's stern, though its formation was not noticed. It reached the water at an angle of about 30° from the perpendicular, inclining with the wind, though it seemed almost stationary. There was a clear well defined inside space, like the bore of a canon about 18 inches in diameter, very smooth and apparently even. Within it the water revolved rapidly, having an upward spiral motion, and looking very much like dark smoke. The revolution was contrary to that of the hands of a watch. Its diameter seemed to be about 4 feet. There was but little commotion on the surface of the water, but much in the cloud where the spout joined it. It became disconnected near the water, and rapidly receding upwards into the cloud, it soon vanished, but for some time after its disappearance much commotion and disturbance could be seen in the cloud.

[3], 1° Feld 62, June 3, 1863. A very large waterspout about 2 miles off, it formed very suddenly from a dense cloud in the N.N.E., and continued about 15 minutes. The sea was one mass of foam at its base to about 1° altitude. Water distinctly visible rushing up the column until it entered the opaque part near the cloud.

[2], 1° Feld 66, 6.45ª, September 4, 1856. Observed two waterspouts to leeward moving in a circle, evidently influenced by a whirlwind, at 7ʰ a. m. they suddenly disappeared; no wind recorded.

[2], 1° Feld 75, 11.30ª, November 22, 1863. A very large waterspout formed about 4 miles to the Nd. of the ship, the largest the Captain had ever seen. The smallest part of the column subtended an angle of 54', and the largest 10°, as measured by a quadrant. By its varied appearance water was plainly seen rushing up at a tremendous rate; the column burst about 7 miles astern; a sharp shower of rain, lasting only five minutes, fell on board, the wind never shifting a point. (The wind was N.N.W. 3 at 4 a. m., and N.W. at noon.). There was no change in the temperature of the air, but when the ship was nearest the column the sea water was 84.2°, being 1.2° higher than the rest of the ocean. During the 17 minutes which elapsed between the forming and bursting of the column, several patches of light and very bright blue water were observed, and fish were seen jumping in all directions, as though they were very much alarmed.

[3], 1° Feld 94, October. A waterspout on lee beam, revolving as the hands of a watch; when first seen it bore W. b. S., ship's head S. b. E., wind E.

[3], 1° Feld 95, October. A waterspout in the S.W., lasting about seven minutes; it was apparently stationary, and began to disperse at the foot, the dispersion progressing upwards.

[3], 1° Feld 74, October. A small waterspout formed about a quarter of a mile to windward, and came very close; with the glass we could distincıly observe the wind and water whirling round against the sun or opposite to the motion of the hands of a watch; wind S.

[3], 1° Feld 57, November. A waterspout to the N.Ed., distant about 1 1/2 miles, it was beautifully distinct; cannot say which way it gyrated, it appeared first to lean to the right, then to the left, and again to the right; it lasted nearly eight minutes, making a tremendous vapour where it touched the sea. The ship was becalmed at the time.

[3], 1° Feld 47, November. A large waterspout in the S.E. passing to the westward about 4 miles ahead of the ship; could not see in which way it revolved, but could distinctly see the water rushing from the sea and meeting the jet from above; apparent diameter 4 feet, apparent height of clouds from sea, 180 feet; wind Ely.; it lasted three quarters of an hour.

[3], 1° Feld 41, December. Three attempts to form waterspouts in the E.N.E., the tube acquiring perfect form and getting half down between the cloud and sea, and then gradually dissolving without lifting any water or vapour.

Die im vorstehenden mitgeteilten Beobachtungen und die aus dem gesamten Material abgeleiteten Ergebnisse sprechen für folgende Auffassung von der Entstehung der Wasserhosen.

In der Region der Wolken — die im Doldrum fast nie fehlen — bildet sich unter der Einwirkung entgegengesetzter oberer Luftströmungen eine Wirbelbewegung aus, die auf die Oberfläche des Meeres saugend wirkt und eine Luftverdünnung hervorruft, so daß hier die warmfeuchte Luft verstärkten Auftrieb erhält, Wasser mit fortreißt und dabei gleichfalls in drehende Bewegung gerät. Der von oben aus der Wolkendecke herabhängende rotierende Schlauch reicht bald so weit herab, daß er sich mit dem unten gebildeten Wirbel vereinigt — voll ausgebildete Wasserhose —, bald zieht er sich nach oben zurück, so daß die Verbindung unterbrochen ist oder scheint und das Ganze das Aussehen eines Stundenglases (Sanduhr) erhält, bald kommt es überhaupt nicht zur Bildung eines Wirbels auf der Meeresoberfläche, und der herabhängende Wolkenschlauch endet frei in der Luft in wechselnder Höhe über dem Meere.

Das Primäre ist also das obere Gebilde in und unterhalb der Wolke. Daher scheint mir eine Verknüpfung der sogenannten mechanischen Theorie mit der thermodynamischen die Entstehung der Wasserhosen am besten zu erklären. Hann hat in der Darstellung der Meteorologie, die er für Müller-Pouillets Lehrbuch der Physik (10. Aufl., 1907) geschrieben hat, schon ähnliche Anschauungen vertreten, während A. Wegener (Wind- und Wasserhosen in Europa, 1917) die mechanische Theorie allein als die wahrscheinlichste ansieht.

Über die Abschnitte einer im Einheitskreise beschränkten Potenzreihe.

Von I. Schur und G. Szegö.

(Vorgelegt am 29. Oktober 1925 [s. oben S. 507].)

Ist
$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$
eine für $|z| < 1$ konvergente Potenzreihe, die der Bedingung

$$(1) \qquad |f(z)| \leq 1 \qquad (|z| < 1)$$

genügt, so brauchen bekanntlich die Abschnitte

$$s_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

keineswegs im ganzen Einheitskreis beschränkt zu sein[1]. Um so bemerkenswerter ist die vor kurzem von Hrn. L. Fejér[2] hervorgehobene Tatsache, daß die $s_n(z)$ bei jeder Potenzreihe der betrachteten Art im Kreise $|z| \leq \frac{1}{2}$ der Bedingung

$$(2) \qquad |s_\nu(z)| \leq 1$$

für alle ν genügen. Man überlegt sich auch leicht, daß die Zahl $\frac{1}{2}$ hier durch keine größere Zahl ersetzt werden kann.

Es liegt nun nahe, folgende Frage weiter zu verfolgen. Welches ist der **größte** Kreis $|z| \leq \rho_n$, in dem für jede Potenzreihe vom Typus (1) sämtliche Abschnitte

$$s_n(z),\ s_{n+1}(z),\ s_{n+2}(z),\ \cdots$$

dem absoluten Betrage nach den Wert 1 nicht übertreffen[3].

---

[1] L. Fejér, Über gewisse Potenzreihen an der Konvergenzgrenze, Sitzungsber. d. math.-phys. Klasse d. Bayer. Akad. d. Wiss. 1910, Nr. 3. Vgl. auch E. Landau, Abschätzung der Koeffizientensumme einer Potenzreihe, Archiv der Mathematik und Physik, Serie 3, Bd. 21 (1913), S. 42—50, S. 250—255; Serie 3, Bd. 24 (1916), S. 250—260 (vgl. S. 255).

[2] Über die Positivität von Summen, die nach trigonometrischen oder Legendreschen Funktionen fortschreiten (Erste Mitteilung), Acta litterarum ac scientiarum regiae universitatis hungaricae Francisco-Josephinae, sectio scientiarum mathematicarum, Bd. 2 (1925), S. 75—86. Ferner: E. Landau, Über einen Fejérschen Satz, Nachrichten der Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Klasse 1925. Vgl. hierzu W. Rogosinski, Über Bildschranken bei Potenzreihen und ihren Abschnitten, Mathematische Zeitschrift, Bd. 17 (1923), S. 260—276 (vgl. § 3).

[3] Man erkennt ohne Mühe, daß eine solche Maximalzahl $\rho_n \geq 0$ existiert und daß sie nicht größer als 1 sein kann.

In § 1 zeigen wir mit elementaren Hilfsmitteln, daß die Zahlen ρ_n mit wachsendem n (monoton) gegen 1 konvergieren. Die genaue Bestimmung der ρ_n beruht auf dem Studium der bereits von Rogosinski und Fejér herangezogenen Ausdrücke

$$(3) \qquad T_n(r, \phi) = \frac{1}{2} + r\cos\phi + r^2\cos 2\phi + \cdots + r^n \cos n\phi .$$

Man verstehe unter r_n die größte Zahl r, für die $T_n(r, \phi)$ als Funktion der reellen Winkelgröße ϕ niemals negativ wird. Die Existenz einer solchen Zahl r_n liegt auf der Hand. Unser Hauptsatz lautet:

I. *Für jedes n ist $\rho_n = r_n$.*

Der Beweis ergibt sich auf Grund der folgenden beiden Sätze:

II. *Damit eine lineare Verbindung*

$$(4) \qquad L_n = a_0 + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n$$

mit reellen λ_ν für alle Potenzreihen vom Typus (1) *der Bedingung*

$$(5) \qquad |L_n| \leq 1$$

genüge, ist notwendig und hinreichend, daß das Kosinuspolynom

$$(6) \qquad T(\phi) = \frac{1}{2} + \lambda_1 \cos\phi + \lambda_2 \cos 2\phi + \cdots + \lambda_n \cos n\phi$$

niemals negativ wird.

III. *Die Zahlen*

$$r_1, r_2, r_3, \cdots, r_n, \cdots$$

nehmen monoton zu.

Der Satz II wird in § 2 in einer etwas verallgemeinerten Fassung bewiesen. Für Satz III werden in § 3 zwei Beweise angegeben. Die §§ 4 und 5 behandeln das asymptotische Verhalten der $\rho_n = r_n$ für große Werte von n und die zahlenmäßige Berechnung dieser Größen. Insbesondere ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log n}(1 - \rho_n) = 1 .$$

Vom Interesse ist noch die für alle n geltende Ungleichung

$$\rho_n > 1 - \frac{\log 2n}{n} .$$

Im Schlußparagraphen werden einige Fragen besprochen, die in ähnlicher Richtung liegen wie unsere Hauptaufgabe.

§ 1. Elementare Vorbemerkungen. Der Fall $n = 2$.

1. Daß ein Ausdruck der Form (4), wenn $f(z)$ vom Typus (1) ist, der Bedingung (5) genügt, sobald das Kosinuspolynom (6) niemals negativ ist, ist bekannt und folgt unmittelbar aus der Integraldarstellung

$$L_n = \lim_{\rho\to 1} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\phi})\, T(\phi)\, d\phi .$$

Indem man hier $T(\phi) = T_n(r, \phi)$ setzt, erkennt man (vgl. die auf S. 545 zitierte zweite Arbeit von L. Fejér), daß bei festem n für $|z| \leqq r$ jedenfalls $|s_n(z)| \leqq 1$, wenn nur für diesen Wert von n das Kosinuspolynom $T_n(r, \phi)$ niemals negativ ausfällt, d. h. $r \leqq r_n$ ist. Die von uns eingeführte Größe ρ_n ist demnach nicht kleiner als die untere Grenze der Zahlen

$$r_n, r_{n+1}, r_{n+2}, \cdots.$$

Gleichzeitig mit $T_n(r, \phi)$ ist auch der Ausdruck

$$(7)\quad F_n(r, \phi) = 2(1 - 2r\cos\phi + r^2)\, T_n(r, \phi) = 1 - r^2 + 2r^{n+2}\cos n\phi - 2r^{n+1}\cos(n+1)\phi$$

nicht negativ. Ferner ist

$$(8)\qquad F_n(r, \phi) \geqq 1 - r^2 - 2r^{n+2} - 2r^{n+1} = (1+r)(1 - r - 2r^{n+1}).$$

Versteht man nun unter R_n die positive Wurzel der Gleichung

$$(9)\qquad G_n(r) = 1 - r - 2r^{n+1} = 0,$$

so ist offenbar

$$(10)\qquad R_1 < R_2 < R_3 < \cdots < R_n < \cdots$$

und

$$(11)\qquad \lim_{n \to \infty} R_n = 1.$$

Aus (8) folgt

$$(12)\qquad r_n \geqq R_n,$$

also nach (10): $r_{n+p} \geqq R_{n+p} > R_n$ $(p > 0)$. Das liefert aber

$$(13)\qquad \rho_n \geqq R_n$$

und also auch

$$(14)\qquad \lim_{n \to \infty} \rho_n = 1.$$

Bei ungeradem n geht die Ungleichung (8) für $\phi = \pi$ in eine Gleichung über (vgl. W. Rogosinski, a. a. O. S. 270). Hieraus folgt, daß bei ungeradem n stets $r_n = R_n$ gilt. Aus (10) und (12) schließt man ferner, daß die untere Grenze der Zahlen $r_n, r_{n+1}, r_{n+2}, \cdots$ für ungerades n gleich R_n, für gerades n entweder gleich r_n oder gleich $r_{n+1} = R_{n+1}$ ist, je nachdem nämlich $r_n \leqq r_{n+1}$ oder $r_{n+1} \leqq r_n$ ist.

2. Das Fejérsche Resultat kann in der Form

$$\rho_1 = r_1 = \frac{1}{2}$$

ausgesprochen werden. In ähnlich einfacher Weise läßt sich auch zeigen, daß

$$(15)\qquad \rho_2 = r_2 = \sqrt{\frac{3}{8}}$$

ist.

Aus

$$T_2(r, \phi) = \frac{1}{2} + r\cos\phi + r^2(2\cos^2\phi - 1)$$

$$= 2\left(r\cos\phi + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{8} - r^2$$

folgt zunächst

$$r_2 = \sqrt{\frac{3}{8}} = 0.6123\cdots.$$

Ferner ist

$$G_3\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right) = 1 - \sqrt{\frac{3}{8}} - 2\left(\frac{3}{8}\right)^2 > 0, \text{ also}$$

$$R_3 > \sqrt{\frac{3}{8}} = r_2 \text{ und folglich für } n \geqq 3$$

$$R_n \geqq R_3 > r_2,$$

also nach dem früheren

$$\rho_2 \geqq \operatorname{Min}(r_2, r_3, r_4, \cdots) = r_2.$$

Um zu erhalten, daß $\rho_2 = r_2$ ist, genügt es zu zeigen, daß man für jede Zahl

$$\rho = \frac{r_2}{1-\varepsilon} > r_2 \qquad (0 < \varepsilon < 1)$$

eine Funktion vom Typus (1) mit $|s_2(\rho)| > 1$ angeben kann. Zu diesem Zwecke betrachte man die rationale Funktion

$$f(z) = \frac{\gamma_0 + \gamma_1(1+\gamma_0)z + z^2}{1 + \gamma_1(1+\gamma_0)z + \gamma_0 z^2},$$

wobei

$$\gamma_0 = 1 - \varepsilon, \quad \gamma_1 = \frac{1}{2\rho(1+\gamma_0)}$$

zu setzen ist. Hier ist

$$0 < \gamma_0 < 1, \quad 0 < \gamma_1 < 1$$

und daher $f(z)$ vom Typus (1)[1]. Ferner liefert eine einfache Rechnung für dieses Beispiel $s_2(\rho) > 1$.

Die Existenz eines solchen Beispiels folgt auch aus dem im nächsten Paragraphen behandelten allgemeinen Kriterium.

---

[1] In der Schreibweise der Arbeit von I. Schur, Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 147 (1917), S. 205—232, Bd. 148 (1918), S. 122—145 (vgl. § 1), ist $f(z) = [z; \gamma_0, \gamma_1, 1]$.

§ 2. Beweis des Kriteriums II.

Den für uns so wichtigen Satz II beweisen wir in der verallgemeinerten Form

II*. *Es sei $p(\phi)$ eine reelle, stetige Funktion von ϕ mit der Periode 2π, die der Bedingung*

$$J = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\phi)\, d\phi > 0$$

genügt. Damit für jede Funktion $f(z)$ vom Typus (1) und für alle $0 < \rho < 1$

$$(16) \qquad \left| \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\phi})\, p(\phi)\, d\phi \right| \leq J$$

gelte, ist notwendig und hinreichend, daß $p(\phi)$ niemals negativ wird.

Daß diese Bedingung hinreichend ist, liegt auf der Hand. Die Umkehrung ergibt sich folgendermaßen. Ist etwa $p(\phi_0) < 0$, so kann zunächst $\phi_0 = 0$ angenommen werden, da wir sonst mit der Funktion $p(\phi_0 + \phi)$ operieren könnten. Dann ist aber bekanntlich

$$\lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\phi + r^2}\, p(\phi)\, d\phi = p(0) < 0$$

Daher läßt sich ein festes $r < 1$ so wählen, daß

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\phi + r^2}\, p(\phi)\, d\phi < 0$$

ausfällt. Man setze dann

$$(17) \qquad f(z) = 1 - \varepsilon \frac{1 + rz}{1 - rz},$$

wobei die positive Größe ε so klein zu wählen ist, daß

$$1 - 2\varepsilon \frac{1 - r}{1 + r} + \varepsilon^2 \left(\frac{1 + r}{1 - r} \right)^2 < 1$$

wird. Hierdurch wird erreicht, daß für $z = e^{i\phi}$

$$\begin{aligned} |f(z)|^2 &= 1 - 2\varepsilon \Re \frac{1 + rz}{1 - rz} + \varepsilon^2 \left| \frac{1 + rz}{1 - rz} \right|^2 \\ &= 1 - 2\varepsilon \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\phi + r^2} + \varepsilon^2 \frac{1 + 2r\cos\phi + r^2}{1 - 2r\cos\phi + r^2} \\ &\leq 1 - 2\varepsilon \frac{1 - r}{1 + r} + \varepsilon^2 \left(\frac{1 + r}{1 - r} \right)^2 < 1. \end{aligned}$$

Folglich gehört $f(z)$ zu dem von uns betrachteten Funktionentypus. Für diese Funktion wird aber

$$\lim_{\varrho \to 1} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varrho e^{i\phi}) p(\phi) d\phi \right| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\phi}) p(\phi) d(\phi) \right|$$

$$\geqq \Re \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\phi}) p(\phi) d\phi \right) =$$

$$= J - \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\phi + r^2} p(\phi) d\phi > J.$$

Die spezielle Funktion (17) genügt also *nicht* der Bedingung (16).

§ 3. Beweis der Sätze I und III.

Aus dem nun bewiesenen Kriterium II folgt unmittelbar, daß

$$(18) \qquad \rho_n = \text{Min}\,(r_n, r_{n+1}, r_{n+2}, \cdots).$$

Um also zu unserem Satze $\rho_n = r_n$ zu gelangen, genügt es nachzuweisen, daß die r_n mit wachsendem n beständig wachsen.

Die im folgenden angegebenen zwei Beweise stützen sich zunächst auf die Tatsache, daß bei ungeradem n stets $r_n = R_n$ gilt (vgl. § 1, 1). Es ist nur zu zeigen, daß bei ungeradem n, $n \geqq 3$,

$$(19) \qquad r_{n-1} < r_n$$

ist. Denn für ungerades n gilt von selbst

$$r_n = R_n < R_{n+1} \leqq r_{n+1}.$$

Erster Beweis. Es ist zunächst für $n \geqq 2$

$$(20) \qquad R_n < 1 - \frac{1}{m+1}, \text{ wo } m = \frac{n}{\log 2n - \log\log 2n}.$$

Denn soll $R_n < \frac{m}{m+1}$ sein, so braucht nur

$$G_n\left(\frac{m}{m+1}\right) = \frac{1}{m+1} - 2\left(\frac{m}{m+1}\right)^{n+1} < 0$$

oder

$$n \log \frac{m+1}{m} < \log 2m$$

zu gelten. Das ist wegen $\log x \leqq x - 1$ $(x > 0)$ für $m > 0$ jedenfalls richtig, wenn schon

$$\frac{n}{m} < \log 2m.$$

Das ist aber für den von uns gewählten Wert von m sicher der Fall, da dies mit der Ungleichung

$$\log 2n - \log\log 2n < \log 2n$$

gleichbedeutend ist.

Um nun bei ungeradem $n = 2k+1$ die Ungleichung (19) zu beweisen, genügt es einen speziellen Wert von ϕ anzugeben, für den

$$F_{n-1}(R_n, \phi) < 0$$

wird. Dies gilt schon für $\phi = \frac{2\pi k}{n}$. Denn es wird zunächst

$$F_{n-1}\left(R_n, \frac{2\pi k}{n}\right) = 1 - R_n^2 - 2R_n^{n+1}\cos\frac{\pi}{n} - 2R_n^n.$$

Andererseits ist

$$1 - R_n = 2R_n^{n+1},$$

also

$$R_n F_{n-1}\left(R_n, \frac{2\pi k}{n}\right) = R_n - R_n^3 - R_n(1-R_n)\cos\frac{\pi}{n} - (1-R_n).$$

Dies ist negativ, wenn

$$R_n + R_n^2 - R_n\cos\frac{\pi}{n} < 1$$

oder

$$R_n^2 + 2R_n\sin^2\frac{\pi}{2n} < 1. \tag{21}$$

Wegen

$$\sin^2\frac{\pi}{2n} < \frac{\pi^2}{4n^2} < \frac{10}{4n^2}$$

gilt (21) jedenfalls, sobald

$$R_n^2 + \frac{5R_n}{n^2} < 1$$

erfüllt ist. Wegen (20) genügt es nun

$$\left(1 - \frac{1}{m+1}\right)^2 + \frac{5}{n^2}\left(1 - \frac{1}{m+1}\right) < 1$$

zu beweisen. Dies liefert aber die Ungleichung

$$\frac{5}{n^2} < \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m},$$

die gewiß erfüllt ist, wenn

$$5m < n^2, \qquad 5 < n(\log 2n - \log\log 2n),$$

was, wie man leicht sieht, für $n \geqq 5$ gilt. Für den noch fehlenden Wert $n = 3$ ist die Ungleichung (19) bereits in § 1 bewiesen worden.

Zweiter Beweis. Ähnlich wie beim ersten Beweis, handelt es sich um die Angabe eines Winkels ϕ, für den

$$(22)\quad F_{n-1}(R_n, \phi) = 1 - R_n^2 + 2R_n^{n+1} \cos(n-1)\phi - 2R_n^n \cos n\phi < 0$$

ausfällt (n ungerade). Man setze

$$n\phi = (n+1)\pi + \psi,$$

also

$$(n-1)\phi = n\pi + \psi - \frac{\pi+\psi}{n}.$$

Das liefert

$$F_{n-1}(R_n, \phi) = 1 - R_n^2 - 2R_n^{n+1} \cos\left(\psi - \frac{\pi+\psi}{n}\right) - 2R_n^n \cos\psi.$$

Nun werde ψ so gewählt, daß $\cos\psi = R_n$ wird, $0 < \psi < \frac{\pi}{2}$. Dann ist (22) wegen $2R_n^{n+1} = 1 - R_n$ identisch mit

$$R_n = \cos\psi < \cos\left(\psi - \frac{\pi+\psi}{n}\right).$$

Dies ist gewiß richtig, sobald

$$\psi - \frac{\pi+\psi}{n} > -\psi$$

ist, d. h. $\psi > \frac{\pi}{2n-1}$, oder

$$(23)\qquad R_n = \cos\psi < \cos\frac{\pi}{2n-1}.$$

Man folgert dies am schnellsten aus einem Satze von Fejér[1], der besagt, daß für ein nichtnegatives Kosinuspolynom

$$\frac{1}{2} + \lambda_1 \cos\phi + \lambda_2 \cos 2\phi + \cdots + \lambda_n \cos n\phi$$

die Abschätzung

$$|\lambda_1| \leqq \cos\frac{\pi}{n+2}$$

gilt. Auf unser Polynom $T_n(R_n, \phi)$ angewandt, ergibt das

$$R_n \leqq \cos\frac{\pi}{n+2},$$

was wegen $n+2 \leqq 2n-1$ noch genauer ist als (23).

[1] Über trigonometrische Polynome, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 146 (1916), S. 53—82 (vgl. S. 79).

§ 4. Asymptotisches Verhalten der Zahlen $\rho_n = r_n^*$.

Wir werden zunächst die asymptotische Formel

$$R_n = 1 - \frac{\log 2n - \log\log 2n + \varepsilon_n}{n}, \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0 \tag{24}$$

beweisen. Hieraus folgt leicht wegen

$$R_n \leq r_n < R_{n+1},$$

daß auch die r_n demselben asymptotischen Gesetz unterliegen.

Wir haben bereits in § 3 die Tatsache benutzt, daß für $n \geq 2$

$$R_n < 1 - \frac{\log 2n - \log\log 2n}{n + \log 2n - \log\log 2n} \tag{20'}$$

gilt. Setzt man nun $r = 1 - \frac{1}{\mu}$ $(\mu > 1)$ und verlangt, daß dies kleiner als R_n sei, so ist nur zu erreichen, daß

$$G_n\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) = \frac{1}{\mu} - 2\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)^{n+1} > 0$$

wird. Dies gilt, wenn

$$\log 2\mu + (n+1)\log\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) < 0,$$

also wegen $\log(1-x) \leq -x$ $(0 \leq x < 1)$ erst recht, wenn

$$\log 2\mu - \frac{n+1}{\mu} < 0$$

oder schon

$$\mu \log 2\mu < n \tag{25}$$

besteht. Wählt man hier

$$\mu = \frac{n}{\log 2n - \log\log 2n + p},$$

so ist für jedes feste positive p die Ungleichung (25) bei genügend großem n erfüllt; denn dies besagt nur, daß

$$p > \log \frac{\log 2n}{\log 2n - \log\log 2n + p}$$

wird, was für genügend große n gewiß richtig ist, weil die rechte Seite mit wachsendem n gegen 0 konvergiert.

Es ist also für jedes positive p bei genügend großem n

$$1 - \frac{\log 2n - \log\log 2n + p}{n} < R_n, \tag{26}$$

was zusammen mit (20′) die Formel (24) liefert.

Man sieht ferner, daß (25) auch bei dem Ansatz

$$\mu = \frac{n}{\log 2n} \qquad (n \geqq 2)$$

erfüllt ist. (Es ist wegen $\frac{\log x}{x} \leqq \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$, $x > 0$, sicher $\frac{n}{\log 2n} > 1$.) Hieraus folgt die (auch für $n = 1$ richtige) Ungleichung

$$1 - \frac{\log 2n}{n} < R_n, \tag{27}$$

die zwar weniger scharf ist als (26), dafür aber für alle $n \geqq 1$ gilt. Wegen (13) schließt man hieraus den Satz:

Für alle Potenzreihen vom Typus (1) *ist*

$$|a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n| \leqq 1,$$

wenn nur

$$|z| \leqq 1 - \frac{\log 2n}{n}; \quad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

§ 5. Einiges über die numerische Bestimmung der Zahlen ρ_n.

Für ungerades n ist $\rho_n = R_n$ ohne weiteres festgelegt als die positive Wurzel der algebraischen Gleichung

$$1 - r - 2r^{n+1} = 0.$$

Man findet z. B. ohne Mühe

$$\rho_3 = R_3 = 0.6478 \cdots, \quad \rho_5 = R_5 = 0.7204 \cdots.$$

Daß auch für gerades n die Größen $\rho_n = r_n$ algebraische Zahlen sind, die sich nach einem explizit angebbaren Verfahren berechnen lassen, sieht man folgendermaßen ein. Man hat nur zu berücksichtigen, daß für den Maximalwert $r = r_n$ das (nichtnegative) Kosinuspolynom $T_n(r, \phi)$ das genaue Minimum 0 hat, während für $r < r_n$ dieses Minimum positiv ist[1]. Zu beachten ist ferner, daß

$$T_n(r, 0) > 0, \quad T_n(r, \pi) > 0$$

wird. Die erste Ungleichung folgt aus (3), die zweite (für gerades n) aus (7). Daher gelten für jede Stelle $r = r_n$, $\phi = \phi_0$, an der $T_n(r_n, \phi)$ bei variablem ϕ sein Minimum erreicht, die Gleichungen

$$T_n(r, \phi) = 0, \quad \frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi} T_n(r, \phi) = 0.$$

Stellt man demnach $T_n(r, \phi)$ als ganze rationale Funktion $H_n(r, \cos\phi)$ der beiden Argumente r und $\cos\phi$ dar, so muß $r = r_n$ der Gleichung

$$D_n(r) = 0 \tag{28}$$

[1] Dies beruht auf einer bekannten allgemeinen Eigenschaft der harmonischen Funktionen.

genügen, die aus

$$H_n(r, t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} H_n(r, t) = 0 \tag{29}$$

durch Elimination von t entsteht; $D_n(r)$ ist also die *Diskriminante* des Polynoms $H_n(r, t)$ von t.

Es ist aber genauer $r = r_n$ die *kleinste positive Wurzel* der Gleichung (28). Hierzu hat man nur einzusehen, daß für $0 < r < r_n$ die beiden Gleichungen keine gemeinsame Lösung t besitzen können. Eine gemeinsame Lösung t zwischen -1 und 1 ist von vornherein ausgeschlossen, weil für solche Werte von t schon der erste Ausdruck in (29) nicht verschwindet. Ein anderer Wert $t = \cos\phi_0$ mit imaginärem ϕ_0 kommt aber aus folgendem Grunde nicht in Frage. Aus (7) folgt, daß dann $\phi = \phi_0$ auch eine mehrfache Wurzel von

$$1 - r^2 + 2r^{n+2}\cos n\phi - 2r^{n+1}\cos(n+1)\phi = 0$$

sein, also auch der durch Differentiation nach ϕ entstehenden Gleichung

$$K(\phi) = rn\frac{\sin n\phi}{\sin\phi} - (n+1)\frac{\sin(n+1)\phi}{\sin\phi} = 0$$

genügen müßte. Diese Gleichung kann als eine Gleichung n-ten Grades in $\cos\phi = t$ aufgefaßt werden und hat als solche lauter reelle, voneinander verschiedene, im Intervall $-1 < t < 1$ gelegene Wurzeln. In der Tat ist

$$\operatorname{sign} K\left(\frac{\nu\pi}{n+1}\right) = (-1)^{\nu+1} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots, n)\,[1].$$

Auf diese Weise findet man z. B. wieder das schon in § 1 angegebene Resultat

$$\rho_2 = r_2 = \sqrt{\frac{3}{8}} = 0.6123\cdots$$

wegen

$$D_2(r) = 4r^2(8r^2 - 3).$$

Wir fanden weiter

$$\rho_4 = r_4 = 0.694\cdots,$$

während

$$R_2 = 0{,}5897\cdots, \quad R_4 = 0.6890\cdots,$$

also doch merklich kleiner als die zugehörigen r_n sind.

§ 6. Bemerkungen über verwandte Aufgaben.

Das in der Einleitung erwähnte Fejérsche Resultat sowie die hier hinzugefügten Betrachtungen lassen sich in verschiedener Richtung weiterführen. In diesem Schlußparagraphen sollen einige hierher gehörige Fragen kurz gestreift werden.

[1] Für $\nu = 0$ folgt dies aus $K(0) = rn^2 - (n+1)^2 < 0$ wegen $r < 1$.

1. Alle Ergebnisse der bisherigen Untersuchungen können auf die Potenzreihen $f(z)$ übertragen werden, die im Innern des Einheitskreises $|z| < 1$ konvergieren und daselbst einen positiven Realteil besitzen. Fragt man nämlich nach dem größten Kreis $|z| \leq \rho_n'$, in dem die Realteile der Abschnitte

$$s_n(z)\,,\quad s_{n+1}(z)\,,\quad s_{n+2}(z)\,,\quad \cdots$$

von $f(z)$ sämtlich positiv ausfallen, so findet man

$$(30)\qquad \rho_n' = r_n = \rho_n\,.$$

Dies beruht auch hier auf einem dem Satz II analogen Kriterium, dessen Beweis sich jedoch wesentlich einfacher gestaltet. Es genügt nur zu berücksichtigen, daß die Potenzreihe

$$\frac{1}{2} + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = \frac{1}{2}\,\frac{1+z}{1-z}$$

für $|z| < 1$ einen positiven Realteil besitzt.

2. Bekanntlich bleiben die ersten arithmetischen Mittel der Abschnitte einer Potenzreihe vom Typus (1) im ganzen Einheitskreise $|z| < 1$ sämtlich dem Betrage nach kleiner als 1[1]. Führt man nun die k-ten arithmetischen Mittel

$$(31)\quad s_\nu^{(k)}(z) = \frac{C_\nu^{(k)} a_0 + C_{\nu-1}^{(k)} a_1 z + C_{\nu-2}^{(k)} a_2 z^2 + \cdots + C_0^{(k)} a_\nu z^\nu}{C_\nu^{(k)}}\,;\quad C_\nu^{(k)} = \binom{\nu+k}{\nu},\quad k > -$$

ein, so kann in Verallgemeinerung des Vorhergehenden nach dem größten Kreis $|z| \leq \rho_n^{(k)}$ gefragt werden, in dem für alle Potenzreihen vom Typus (1) die arithmetischen Mittel

$$s_n^{(k)}(z)\,,\quad s_{n+1}^{(k)}(z)\,,\quad s_{n+2}^{(k)}(z)\,,\quad \cdots$$

sämtlich dem Betrage nach kleiner als 1 ausfallen. Die Folge

$$\rho_1^{(k)},\ \rho_2^{(k)},\ \rho_3^{(k)},\ \cdots,\ \rho_n^{(k)},\ \cdots$$

ist offenbar monoton wachsend; sie geht für $k = 0$ in

$$\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3,\ \cdots,\ \rho_n,\ \cdots,$$

dagegen für $k = 1$ in

$$1,\ 1,\ 1,\ \cdots,\ 1,\ \cdots$$

über. Versteht man ferner unter $r_n^{(k)}$ die größte Zahl r, für welche das Kosinuspolynom

$$(32)\quad C_n^{(k)} T_n^{(k)}(r, \phi) = \frac{1}{2} C_n^{(k)} + C_{n-1}^{(k)} r \cos\phi + C_{n-2}^{(k)} r^2 \cos 2\phi + \cdots + C_0^{(k)} r^n \cos n\phi$$

niemals negativ ausfällt, so kann auch in diesem Falle (wegen des Kriteriums II)

$$(33)\qquad \rho_n^{(k)} = \text{Untere Grenze von } r_n^{(k)},\ r_{n+1}^{(k)},\ r_{n+2}^{(k)},\ \cdots$$

[1] L. Fejér, Über gewisse durch die Fouriersche und Laplacesche Reihe definierten Mittelkurven und Mittelflächen, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 38 (1914), S. 79—97 (vgl. S. 95).

gesetzt werden. Die Monotonie der Folge $r_n^{(k)}$, die also $\rho_n^{(k)} = r_n^{(k)}$ nach sich ziehen würde, haben wir nicht weiter untersucht[1].

Wir beschränken uns hier auf den Nachweis der Gleichung

$$\rho_1^{(k)} = r_1^{(k)} = \frac{k+1}{2} \qquad (-1 < k < 1), \tag{34}$$

woraus übrigens folgt, daß für alle Potenzreihen vom Typus (1)

$$|s_n^{(k)}(z)| \leqq 1 \text{ gilt, wenn } |z| \leqq \frac{k+1}{2};\ n = 1, 2, 3, \cdots. \tag{35}$$

Die Zahl $\frac{k+1}{2}$ kann hier durch keine kleinere ersetzt werden.

Hr. FEJÉR stützt sich in seiner auf S. 545 angeführten Arbeit auf den Satz, daß das Kosinuspolynom

$$\frac{\lambda_0}{2} + \lambda_1 \cos\phi + \lambda_2 \cos 2\phi + \cdots + \lambda_n \cos n\phi \tag{36}$$

stets nichtnegativ ist, wenn die Ungleichungen

$$\lambda_\nu - 2\lambda_{\nu+1} + \lambda_{\nu+2} \geqq 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots, n-2),$$
$$\lambda_{n-1} \geqq 2\lambda_n,\ \lambda_n \geqq 0$$

gelten. Wendet man diesen Satz auf das Kosinuspolynom (32) an, so folgt, daß r sicher nicht größer als $r_n^{(k)}$ ist, sobald die Ungleichungen

$$C_\nu^{(k)} r^2 - 2 C_{\nu+1}^{(k)} r + C_{\nu+2}^{(k)} \geqq 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots, n-2)$$
$$C_1^{(k)} \geqq 2 C_0^{(k)} r$$

erfüllt sind. Für $r = \frac{k+1}{2}$ geht nun die letzte Ungleichung in eine Gleichung über, während die vorhergehenden ebenfalls richtig sind; sie lauten nämlich

$$\left(\frac{k+1}{2}\right)^2 - 2\,\frac{k+\nu+1}{\nu+1}\,\frac{k+1}{2} + \frac{(k+\nu+1)(k+\nu+2)}{(\nu+1)(\nu+2)} \geqq 0$$

oder

$$\left(\frac{k+1}{2}\right)^2 - \frac{k+\nu+1}{\nu+1}\left(k+1-\frac{k+\nu+2}{\nu+2}\right) = \frac{(k+1)^2}{4} - \frac{k(k+\nu+1)}{\nu+2}$$
$$= \frac{(k-1)^2}{4} - \frac{k(k-1)}{\nu+2} \geqq 0,$$

d. h.

$$\frac{1-k}{4} + \frac{k}{\nu+2} \geqq 0,$$

eine Ungleichung, die offenbar für alle $\nu \geqq 0$ gilt. Es ist also $r_n^{(k)} \geqq \frac{k+1}{2}$.

[1] Auch die Aufgabe, das monotone Wachsen der Zahlen $r_n^{(k)}$ mit k nachzuweisen, dürfte nicht uninteressant sein.

Die Betrachtung des speziellen Kosinuspolynoms

$$T_1^{(k)}(r,\phi) = 1 + \frac{2}{k+1} r\cos\phi$$

zeigt ferner, daß $r_1^{(k)} = \frac{k+1}{2}$ ist, folglich ist

$$\rho_1^{(k)} = \text{Min}\,(r_1^{(k)}, r_2^{(k)}, r_3^{(k)}, \cdots) = r_1^{(k)} = \frac{k+1}{2}.$$

3. Ein anderer Fall, der dadurch bemerkenswert ist, daß die Bestimmung der den Zahlen ρ_n analogen Größen im wesentlichen vollständig durchgeführt werden kann, ist der folgende. Man betrachte für eine Funktion $f(z)$ vom Typus (1) die Verbindungen

$$\alpha s_0(z) + \beta s_n(z) = \alpha a_0 + \beta s_n(z), \tag{37}$$

wo $\alpha < 0$, $\beta > 0$ feste Konstanten mit der Summe 1 sind, $\alpha + \beta = 1$. Das in den §§ 1 bis 4 behandelte Problem entspricht offenbar dem Grenzfall $\alpha \to 0$, $\beta \to 1$. Doch liegen für $\alpha < 0$, $\beta > 0$ die Verhältnisse wesentlich anders.

Um hier wieder die größten Kreise $|z| \leqq \rho_n$ zu bestimmen, in denen

$$|\alpha a_0 + \beta s_\nu(z)| \leqq 1$$

für $\nu = n,\ n+1,\ n+2, \cdots$ gilt, hat man nur die Kosinuspolynome

$$T_n(r,\phi) = \frac{\alpha}{2} + \beta\left(\frac{1}{2} + r\cos\phi + r^2\cos 2\phi + \cdots + r^n\cos n\phi\right) \tag{38}$$

zu betrachten. Es wird

$$F_n(r,\phi) = 2(1 - 2r\cos\phi + r^2)\,T_n(r,\phi) = \alpha(1 - 2r\cos\phi + r^2) + \\ + \beta\left(1 - r^2 + 2r^{n+2}\cos n\phi - 2r^{n+1}\cos(n+1)\phi\right). \tag{39}$$

Eine triviale untere Schranke für $F_n(r,\phi)$ ist wieder

$$1 + (\alpha - \beta)r^2 + 2\alpha r - 2\beta r^{n+2} - 2\beta r^{n+1} = (1+r)\,G_n(r)$$
$$\text{mit } G_n(r) = 1 + (\alpha-\beta)r - 2\beta r^{n+1}.$$

Die positive Wurzel der Gleichung $G_n(r) = 0$ sei auch hier mit R_n bezeichnet. Man erkennt dann leicht, daß die R_n beständig wachsend gegen die positive Wurzel $\rho = \frac{1}{\beta - \alpha}$ der Gleichung

$$1 + (\alpha - \beta)r = 0$$

konvergieren; es ist offenbar $\rho < 1$. Ferner gilt für die Maximalzahlen r_n der Werte r, für die $T_n(r,\phi)$ oder was dasselbe ist $F_n(r,\phi)$ niemals negativ ausfällt, stets

$$r_n \geqq R_n$$

und für ungerade n

$$r_n = R_n.$$

Hieraus folgt schon, daß für ungerade n

$$\rho_n = \text{Min}\,(r_n, r_{n+1}, r_{n+2}, \cdots) = r_n = R_n,$$

für ein gerades n dagegen, wie früher,

$$\rho_n = \mathrm{Min}\,(r_n, r_{n+1}, r_{n+2}, \cdots),$$

also gleich r_n oder $r_{n+1} = R_{n+1}$ ist, je nachdem $r_n \leqq r_{n+1}$ oder $r_{n+1} \leqq r_n$ ausfällt.

Es zeigt sich nun im Gegensatz zu unserem Satz III, daß hier für genügend große gerade n

$$r_{n+1} < r_n \tag{40}$$

ist, woraus also $\rho_n = r_{n+1} = R_{n+1}$ folgt.

Man erhält nämlich für $r = R_{n+1}$

$$\begin{aligned} F_n(r, \phi) &= F_n(r, \phi) - (1 + r)\, G_{n+1}(r) \\ &= -2\alpha r(1 + \cos\phi) + 2\beta r^{n+3} + 2\beta r^{n+2} + 2\beta r^{n+2}\cos n\phi - 2\beta r^{n+1}\cos(n+1)\phi \\ &= -2\alpha r(1 + \cos\phi) + \delta_n(r, \phi). \end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, daß dieser Ausdruck bei genügend großem n für alle ϕ positiv ist. Es genügt hierzu $0 \leqq \phi \leqq \pi$ anzunehmen. Ist nun $0 \leqq \phi \leqq \pi - \frac{\pi}{2(n+1)}$, so wird einerseits wegen $\alpha < 0$

$$-2\alpha r(1 + \cos\phi) = -4\alpha r\cos^2\frac{\phi}{2} \geqq -4\alpha r\sin^2\frac{\pi}{4(n+1)} \geqq -4\alpha r\left(\frac{2}{\pi}\,\frac{\pi}{4(n+1)}\right)^2,$$

andererseits $|\delta_n(r, \phi)| < 8\beta r^n < 8\beta\rho^n$, also $F_n(r, \phi) > 0$, wenn n genügend groß ist. Für $\pi - \frac{\pi}{2(n+1)} \leqq \phi \leqq \pi$ sind aber alle Glieder von $F_n(r, \phi)$ nicht negativ.

Im Gegensatz zu dem Grenzfall $\alpha \to 0, \beta \to 1$ kann also hier die Bestimmung von ρ_n sowohl für ungerade wie auch für genügend große gerade n auf die Bestimmung der Zahlen R_n (sogar nur der R_n mit ungeradem n), also auf die Bestimmung der einzigen positiven Wurzel von gewissen explizit angegebenen algebraischen Gleichungen zurückgeführt werden.

Wir haben damit folgendes gezeigt:

Es sei $\alpha < 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$. Für die Abschnitte $s_n(z)$ aller Potenzreihen $f(z)$ vom Typus (1) gilt

$$|\alpha s_0(z) + \beta s_\nu(z)| \leqq 1 \qquad (\nu = n, n+1, n+2, \cdots),$$

wenn nur $|z| \leqq \rho_n$. Hierbei genügt ρ_n für ungerade n der algebraischen Gleichung

$$1 + (\alpha - \beta)\, r - 2\beta r^{n+1} = 0,$$

dagegen für genügend große gerade n der Gleichung

$$1 + (\alpha - \beta) r - 2\beta r^{n+2} = 0.$$

Es ist

$$\lim_{n \to \infty} \rho_n = \frac{1}{\beta - \alpha}.$$

Die Zahlen ρ_n können durch keine größeren ersetzt werden.

4. Will man endlich für die Unterklasse der im Einheitskreise $|z| < 1$ beschränkten Funktionen $f(z)$ vom Typus (1), welche an der Stelle $z = 0$ verschwinden, das Verhalten der Ableitung $f'(z)$ und ihrer Abschnitte

$$s'_n(z),\ s'_{n+1}(z),\ s'_{n+2}(z),\ \cdots$$

studieren, so kommt das nach dem Schwarzschen Lemma darauf hinaus, daß man für alle Funktionen $f(z)$ vom Typus (1) die Reihe

$$\frac{d(zf(z))}{dz} = a_0 + 2a_1 z + 3a_2 z^2 + \cdots + (n+1)a_n z^n + \cdots$$

und ihre Abschnitte untersucht. Hier führt die Ermittlung der Kreise $|z| \leq \rho_n$, in denen

$$|a_0 + 2a_1 z + 3a_2 z^2 + \cdots + (\nu+1)a_\nu z^\nu| \leq 1$$

für $\nu = n,\ n+1,\ n+2, \cdots$ gilt, auf die Diskussion der Kosinuspolynome

$$T_n(r,\phi) = \frac{1}{2} + 2r\cos\phi + 3r^2\cos 2\phi + \cdots + (n+1)r^n\cos n\phi\,.$$

Multipliziert man das mit $2(1 - 2r\cos\phi + r^2)^2$, so kann ähnlich wie in 3. geschlossen werden. An Stelle des dort betrachteten Polynoms $G_n(r)$ tritt hier

$$G_n(r) = 1 - 2r - r^2 - (2n+4)r^{n+1} - (2n+2)r^{n+2}.$$

Ist R_n die positive Wurzel von $G_n(r) = 0$, so wachsen die R_n wieder monoton und streben gegen die positive Wurzel $\rho = \sqrt{2} - 1 = 0.41 \cdots$ der Gleichung

$$1 - 2r - r^2 = 0.$$

Es ist ferner $\rho_n = R_n$ oder R_{n+1}, je nachdem n ungerade oder gerade ist. (Letzteres erst für genügend große n.) Es gilt dementsprechend der folgende Satz:

Es sei $f(z)$ eine Funktion vom Typus (1), für welche überdies $f(0) = 0$ gilt. Dann ist

$$|s'_{\nu+1}(z)| \leq 1$$

für $\nu = n, n+1, n+2, \cdots$, wenn nur $|z| \leq \rho_n$. Hierbei genügt ρ_n für ungerade n der algebraischen Gleichung

$$1 - 2r - r^2 - (2n+4)r^{n+1} - (2n+2)r^{n+2} = 0,$$

dagegen für genügend große gerade n der Gleichung

$$1 - 2r - r^2 - (2n+6)r^{n+2} - (2n+4)r^{n+3} = 0.$$

Es ist

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = \sqrt{2} - 1.$$

Die Zahlen ρ_n können durch keine größeren ersetzt werden.

Ausgegeben am 8. Dezember.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1925 XXXI—XXXIV

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

MIT TAFEL III—V

Library of Congress
MAY 10 1926
Smithsonian Deposit

BERLIN 1925

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang einer aufzunehmenden Mitteilung soll in der Regel in den Sitzungsberichten bei Mitgliedern 32, bei Nichtmitgliedern 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte, in den Abhandlungen 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Abhandlungen nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des vollständigen druckfertigen Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 200 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1925

XXXI. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 26. November.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Bieberbach sprach über den »Briefwechsel zwischen H. A. Schwarz und Karl Weierstrass«. (Ersch. später.)

Im handschriftlichen Nachlaß von H. A. Schwarz, den dessen Erben der Akademie geschenkt haben, befindet sich in vollständiger Erhaltung der Briefwechsel mit Karl Weierstrass.

Der Briefwechsel umfaßt den Zeitraum von 1866 bis 1893.

Der Vortragende berichtete über den Aufschluß, den man daraus über verschiedene wissenschaftliche Fragen bekommt, mit denen sich die beiden Briefschreiber in dem genannten Zeitraum beschäftigten.

2. Hr. Penck legte eine Abhandlung von dem verstorbenen wissenschaftlichen Leiter der Deutschen Atlantischen Expedition, Prof. Dr. A. Merz, über den Plan dieser Expedition vor.

Eine erneute Durcharbeitung der Reihenbeobachtungen im Atlantischen unter Benutzung neuesten Materials bestätigt die aus den Beobachtungen des Challenger und der Gazelle hergeleiteten Ergebnisse über die Wasserbewegung in jenem Ozeane, nämlich das Vorhandensein eines antarktischen Zwischenstromes, der bis 32° N verfolgt wird, eines nordatlantischen Tiefenstromes, der sich bis in die Weddellsee erstreckt, und eines antarktischen Bodenstromes. Die großen Strömungen werden durch das Relief des Meeresbodens auffällig beeinflußt, ihre Grenzen gegeneinander verlaufen in Vertikal- und Horizontalschnitten bogenförmig, was auf Wirbel weist. Aufgabe der Deutschen Atlantischen Expedition ist es, Verlauf und Ausdehnung dieser Strömungen durch direkte Messung oder indirekte Beobachtung festzustellen sowie namentlich die Wirbel nachzuweisen. Dementsprechend ist die Fahrt des Meteor geplant.

Die Deutsche Atlantische Expedition auf dem Vermessungs- und Forschungsschiff »Meteor«.

I. Bericht.

Von Prof. Dr. A. Merz (†),
wissenschaftlichem Leiter der Expedition.

(Vorgelegt von Hrn. Penck.)

Hierzu Taf. III—V.

I. Die atlantische Hydrographie und die Planlegung der Deutschen Atlantischen Expedition.

Bereits im Jahre 1919 nahm die Marineleitung die Aussendung eines ihrer Schiffe auf eine ozeanische Forschungsreise in Aussicht. Die außerodentlichen Schwierigkeiten, mit denen das Deutsche Reich damals und in den nächstfolgenden Jahren zu kämpfen hatte, zwangen dazu, die Ausführung des Gedankens vorerst hintanzustellen. Die Schwere der Zeiten machte es auch unmöglich, für den als Expeditionsschiff in Aussicht genommenen »Meteor« Dieselmotoren zu beschaffen und ihm damit einen so großen Fahrbereich zu geben, daß er alle in Betracht kommenden ozeanographischen Aufgaben hätte lösen können. Darum mußte auch die ursprüngliche Idee, den am wenigsten erforschten Pazifischen Ozean als Arbeitsfeld einer dreijährigen Expedition zu wählen, wofür Entwürfe bereits ausgearbeitet waren, fallen gelassen werden.

Die Aussicht, eine größere Forschungsreise zur See tatsächlich durchführen zu können, eröffnete sich, als Hr. Staatsminister Schmidt-Ott den Entschluß faßte, von seiten der Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft größere Unternehmungen zu fördern, und dem ihm vom Verfasser entwickelten Plan einer Deutschen Atlantischen Expedition seine Unterstützung zusicherte, als ferner die Marineleitung sich bereit erklärte, auch hierfür ihr Vermessungsschiff »Meteor« mit Besatzung zwei Jahre hindurch zur Verfügung zu stellen.

Eine Expedition in den Pazifischen Ozean könnte grundlegende Ergebnisse erzielen, auch wenn sie sich damit begnügte, ein relativ großmaschiges Routennetz zu legen, denn selbst die Hauptzüge seiner Morphologie und Hydrographie sind nur notdürftig bekannt, und Flächen von Erdteilgröße wurden niemals von einer hydrographischen Tiefseeexpedition berührt. Ganz anders liegen die Verhältnisse im Atlantischen Ozean. Hier ist das morphologisch-

hydrographische Bild durch die Tätigkeit zahlreicher namentlich deutscher Expeditionen seit den grundlegenden Reisen von »Challenger« und »Gazelle« in seinen Hauptzügen entschleiert, und nur mehr die intensive systematische Bearbeitung ganz bestimmter Probleme kann unsere Erkenntnis um einen bedeutsamen Schritt vorwärts bringen.

Gewichtige Gründe legten es nahe, als Hauptaufgabe der geplanten atlantischen Expedition die Bearbeitung des Problems von der allgemeinen Horizontal- und Vertikalzirkulation der ozeanischen Wassermassen in Aussicht zu nehmen. Zwar haben auch alle früheren Expeditionen versucht, dieses Kernproblem der ozeanischen Hydrographie anzupacken, aber die wenigen Erkundungsfahrten, auf die sie sich in den einzelnen Ozeanbecken beschränken mußten, konnten nur einen ersten Einblick gewähren, günstigstenfalls eine qualitative Beurteilung einzelner Bewegungskomponenten ermöglichen; ja die häufig noch ungenügende Genauigkeit der Beobachtungen und vor allem der Mangel an geeigneten quantitativen Methoden führte sogar in entscheidenden Punkten zu fehlerhaften Ergebnissen.

In den letzten 25 Jahren haben sich nun die Methoden der Ozeanographie so bedeutsam entwickelt, daß bei richtiger Anlage des Stationsnetzes und genügender Beobachtungszahl die quantitative Erfassung der ozeanischen Zirkulation möglich erscheint. Diese Erfassung ist auf einem direkten und auf einem indirekten Wege möglich. Auf direktem Wege, indem man den Strom mißt. Dazu bedarf es einer selbst über großen Meerestiefen sicheren Verankerung des Schiffes und geeigneter Strommesser. Beides konnte für die Deutsche Atlantische Expedition geschaffen werden. Auf indirektem Wege, indem die Massenverteilung durch Beobachtung festgestellt und dann auf theoretischem Wege, sei es mit Hilfe des BJERKNESschen Verfahrens oder durch eine Methode, die sich MOHNscher und BJERKNESscher Gedankengänge zugleich bedient, die Strömungen abgeleitet werden. Die hierfür erforderlichen sehr exakten Temperatur- und Salzgehaltsbestimmungen bzw. Dichtebeobachtungen erheischten eine weitere Verfeinerung der bisher schon sehr genauen Methoden, die in der Tat für die Zwecke unserer Expedition erzielt werden konnte.

Die Methode der direkten Messung kann gegenwärtig nur an einer beschränkten Zahl von Punkten ausgeführt werden, einerseits weil sich die Verankerung bei stürmischem Wetter verbietet, andererseits weil diese Art der Untersuchung sehr zeitraubend ist. Denn neben den resultierenden Meeresströmungen sind stets Gezeitenströmungen vorhanden, die insbesondere in den tieferen Schichten von gleicher Größenordnung wie jene sind. Will man daher die resultierenden Meeresströmungen mit genügender Genauigkeit erhalten, so muß man durch mehrere Gezeitenperioden hindurch messen, um den Gezeitenstrom befriedigend eliminieren zu können. Man muß darum das Problem in der Hauptsache auf indirektem Wege lösen, aber immerhin konnten eine ganze Reihe von Strommessungsstationen ins Auge gefaßt werden, und ein Vergleich der durch die direkte und durch die indirekte Methode erlangten Ergebnisse wird eine wertvolle Kontrolle der ganzen Arbeit darstellen. Die sehr befriedigende Übereinstimmung, die G. WÜST bei einem Vergleich der Strommessungen PILLSBURYS in der bis 230 km breiten und bis 2500 m tiefen

Straße von Florida mit den Stromwerten erhielt, die er aus Temperatur- und Salzgehaltsbeobachtungen nach der Bjerknesschen Methode, also nach Verfahren erzielte[1], wie sie für die Deutsche Atlantische Expedition vorgesehen sind, läßt zuversichtlich hoffen, daß sie auch in unserem Falle sich bewähren werden.

Es lassen sich die Aufgaben, die auf dem Gebiete der Zirkulation gegenwärtig das Hauptinteresse beanspruchen, am leichtesten darstellen, wenn wir von dem derzeitigen Stand der Kenntnisse ausgehen. Die letzte Bearbeitung des Problems boten G. Wüst und der Verfasser in einer Reihe von Aufsätzen in der Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde[2] vorwiegend auf Grund von Längsschnitten der Temperatur und des Salzgehaltes, die wir für 30° westlicher Länge des Atlantischen entworfen hatten. Seitdem wurde uns noch mannigfaches Material, namentlich die sehr sorgfältigen Beobachtungen W. Breunneckes von der Deutschen Antarktischen Expedition zugänglich, auch konnten noch bessere Reduktionsmethoden für die Werte der älteren Expeditionen ausgearbeitet werden, so daß wir uns entschlossen, unsere Schnitte nochmals von Grund auf durchzuarbeiten. Das Ergebnis unserer gemeinsamen Arbeit ist in den beiden Längsschnitten durch den Atlantischen niedergelegt, die dieser Abhandlung als Tafel III und IV beigegeben sind. Da der Maßstab der Reproduktion die Eintragung der verwendeten Werte verbot und bloß gestattete, unterhalb 1000 m Tiefe ihre Lage durch Punkte anzugeben, so wird ein Verzeichnis der benutzten Quellen mit Angabe der herangezogenen Beobachtungsstationen, Karten und Schnitte angeschlossen[3], so daß eine Nachprüfung leicht vorgenommen werden kann.

Diese neue Bearbeitung bestätigt in allen Hauptzügen das in unseren ersten Abhandlungen gewonnene Bild. Wieder ergibt sich aus beiden Darstellungen, mit besonderer Klarheit aber aus dem Salzgehaltsschnitt Tafel III, daß die atlantische Zirkulation im wesentlichen in einem Wasseraustausch zwischen der Nord- und Südhälfte des Ozeans besteht, der über den Äquator hinüber in vorwiegend horizontalen Strombahnen erfolgt. Die eingewurzelte Vorstellung von einer zum Äquator annähernd symmetrischen, von der Oberfläche bis zum Boden reichenden Vertikalzirkulation mit aufsteigendem Ast unter dem Äquator und absteigenden Ästen in höheren Breiten entspricht nicht dem Beobachtungsmaterial. Nur in den Tropen findet sich in einer Oberflächenschicht von etwa 150 m Mächtigkeit, hervorgerufen durch thermische Unterschiede und begünstigt durch die Salzgehaltsverteilung, eine den alten Vorstellungen entsprechende Zirkulation mit einer gegen die Subtropen gerichteten Abflußbewegung bis etwa 50 m Tiefe und rückkehrenden Strömungen darunter. Wir haben diese als Tropische Unterströme bezeichnet und auf Grund der Beobachtungen[3] das Strommaximum in etwa 75 m Tiefe angenommen.

---

[1] G. Wüst, Florida- und Antillenstrom. Veröff. d. Inst. f. Meereskunde, N. F. Reihe A, Heft 12, Berlin 1924.

[2] A. Merz u. G. Wüst, Die atlantische Vertikalzirkulation u. A. Merz, Temperaturschichtung u. Vertikalzirk. i. Südatl. Ozean n. d. »Challenger«- u. »Gazelle«-Beob. Zeitschr. Gesellsch. f. Erdk. Berlin, 1922, S. 1 u. 288. — A. Merz u. G. Wüst, Die atlantische Vertikalzirkulation. 3. Beitrag. Zeitschr. d. Gesellsch. f. Erdk., Berlin 1923, S. 132.

[3] Siehe Anhang: Quellenmaterial zu den Längsschnitten auf 30° w. L.

Unterhalb dieser dünnen Schicht liegen die Regionen des interhemisphärischen Wasseraustausches.

Aus den breiten Schmelzwassergebieten, die den antarktischen Kontinent umgeben, strömt das kalte salzarme Wasser nordwärts ab und sinkt etwa zwischen 40° und 50° S unter das wärmere und salzreichere Wasser niederer Breiten unter. In 30° S liegt das für diesen Antarktischen Zwischenstrom charakteristische Salzgehaltsminimum bereits in 800 m Tiefe. Von hier ab ist es bis 10° N in 700—800 m Tiefe verfolgbar, dann senkt es sich abermals, wenn auch langsamer ab. In etwa 24° N erreicht das Salzgehaltsminimum seine tiefste Lage in ungefähr 1100—1200 m Tiefe. Bei diesem Absinken tritt eine stärkere Wassermischung ein, wie die rasche Zunahme des Salzgehaltes andeutet. Wir haben das in ähnlicher Weise bereits in unseren früheren Abhandlungen ausgeführt. Seither haben die im Januar—März 1924 von Kapitänleutnant Siburg auf dem deutschen Kreuzer »Berlin« in dem Raume Lissabon–Azoren–Kanaren durchgeführten und von L. Möller[4] bearbeiteten hydrographischen Beobachtungen ergeben, daß dieser antarktische Zwischenstrom hier im Ostatlantischen bis 32° N fühlbar ist. Er steigt dabei wieder an und schiebt sich mit seinen letzten Ausläufern über das Randgebiet des salzreichen Mittelmeerwassers empor. Sein Salzgehalt erreicht schließlich 35.4 ‰. Im Westatlantischen scheint der antarktische Zwischenstrom, wohl unter der rechtsablenkenden Wirkung der Erdrotation, nicht so hohe Breiten zu erreichen.

Unterhalb des Antarktischen Zwischenstromes bewegt sich, wie wir seinerzeit darlegten, der warme und salzreiche Nordatlantische Tiefenstrom südwärts. Sein Wasser sinkt aus den nordatlantischen Subtropen, etwa beiderseits 30° N rasch auf etwa 1500 m Tiefe ab, die bereits in 25° N erreicht wird. Dann verlangsamt sich der Abstieg, und am Äquator, wo die Atlantische Schwelle einen in unseren Profilen erkennbaren Stau ausübt, mag das Salzgehaltsmaximum des Stromes in etwa 2100—2200 m Tiefe liegen. Seine vertikale Mächtigkeit beträgt rund 2000 m. Nach unserer früheren Darstellung ist der weitere Verlauf des Stromes sehr einfach: er senkt sich noch ein wenig bis etwa 30° S, um schließlich von 40° S ab erst langsam, dann immer stärker emporzusteigen und sich in den fünfziger Breiten in Tiefen von rund 500 m mit dem Wasser des Antarktischen Zwischenstromes zu mischen.

Die Neubearbeitung erschloß einige Komplikationen in diesem Verlaufe. Die sorgfältige Reduktion der Temperaturen, die »Challenger« und »Gazelle« auf dem Querprofile von Buenos Aires nach Osten in etwa 35—38° S beobachtet haben, durch den Verfasser[5], sowie die eingehende Bearbeitung ihrer Salzgehaltsbeobachtungen durch L. Möller[6] ergab, daß der Rio Grande-Rücken, den unsere Längsprofile hier queren, von bedeutsamem Einfluß auf den Nordatlantischen Tiefenstrom ist. Der Rücken schnürt den Strom stark ein, und zwingt

---

[4] L. Möller, Beitrag zur Hydrograhie der Spanischen See. Beobachtungen d. Kr. »Berlin« u. d. V.-S. »Meteor« (s. Schlußnote).

[5] A. Merz, Temperaturschichtung u. Vertikalzirk. i. Südatl. Ozean n. d. »Challenger«- u. »Gazelle«-Beobachtungen. Zeitschr. G. f. E., Berlin 1922, S. 288.

[6] L. Möller, Zur Kritik und Aufbereitung von Dichte- u. Salzgehaltswerten älterer Expeditionen (s. Schlußnote).

die unteren Partien des Stromes, sich um 700—800 m zu heben. Jenseits des Schwellenscheitels senkt sich der Strom, dem Bodengefälle folgen, wieder erheblich ab, und in 46° S dürfte das Salzgehaltsmaximum in etwa 2800 m Tiefe liegen. Von hier ab steigt der Strom rasch an. In 56° S ist das Maximum bereits in 1400 m Tiefe zu finden. Dieses Emporsteigen entspricht dem analogen Anstieg des Bodens im Südantillenbogen, ist aber im Kompensationsbedürfnis mitbegründet. Indem für die südlich anschließenden Gebiete nach W. Brenneckes Beobachtungen die Isohalinen 34.67—34.69 ‰ entworfen wurden, konnte nunmehr mit Hilfe des Salzgehaltsschnittes in ausgezeichneter Weise das Eindringen des nordatlantischen Wassers in die Weddellsee verfolgt werden. Es wird damit die Annahme bestätigt, die wir auf Grund der im erstveröffentlichten Temperaturschnitte enthaltenen Andeutung und gewisser Überlegungen bereits in unserer ersten Abhandlung über die Wasserbewegung in den mittleren Tiefen der Weddellsee gegeben hatten. Auf Grund von Brenneckes exakten Chlortitrierungen können wir, allerdings entgegen seinen eigenen Anschauungen, sagen, daß der Nordatlantische Tiefenstrom mit seinen letzten Ausläufern von 34.68 ‰ Salzgehalt zwischen 500—1500 m Tiefe bis ungefähr 66° S in die Weddellsee eindringt. Die Grenze zwischen der warmen und salzreichen, vermutlich aus dem Indischen Ozean kommenden Küstenströmung und dem Nordatlantischen Tiefenstrom ist bei etwa 68° S anzunehmen. Indem im neuen Temperaturschnitt Tafel IV auf Grund von Brenneckes Beobachtungen auch die Isotherme für 0.35° eingetragen wurde, tritt nunmehr auch in diesem Schnitt das Eindringen des Nordatlantischen Tiefenstromes in die Weddellsee besser als früher hervor. Aus schon seinerzeit dargelegten Gründen liegt das Temperaturmaximum höher als das Salzgehaltsmaximum[7].

Die Tiefen der Weddellsee etwa von 1500 m ab erfüllt Wasser von 0—0.4° Temperatur und etwa 34.64—34.67 ‰ Salzgehalt. Es ist also erheblich salzreicher und wärmer als die sommerliche antarktische Oberflächenschicht, dagegen etwas kühler und salzärmer als die indische und atlantische Zwischenschicht. Es kann mithin nur durch Mischung beider Schichten entstanden sein. Aus der Größe der Temperatur- und Salzgehaltsdifferenzen der drei Schichten ist zu schließen, daß die Zwischenschicht für die Bildung erheblich mehr Wasser als die Oberflächenschicht liefert. Diese Mischung und damit die Bildung des Tiefenwassers muß im Winter lebhafter sein, weil dann das Oberflächenwasser infolge Abkühlung und Ausfrieren eine Tendenz zum Sinken hat.

Dieses Tiefenwasser fließt durch die Lücken und Öffnungen des Südantillenbogens nach außen ab, sinkt an seinen Böschungen in die Tiefe und bildet den Antarktischen Bodenstrom. Die hohe Erhebung des Rio Grande-Rückens kann von diesem tiefliegenden Strom nicht überquert, sondern nur umflossen werden. Dasselbe gilt bezüglich der Atlantischen Schwelle. Sie ist so hoch und geschlossen, daß sie etwa ab 3000 m Tiefe auf unseren Längsschnitten die atlantischen Wassermassen vollkommen trennt. Sie haben unter-

---

[7] A. Merz u. G. Wüst, Die atlantische Vertikalzirkulation. Zeitschr. d. G. f. E., Berlin 1922 S. 1.

halb dieses Niveaus an den beiden Flanken der Schwelle verschiedene Temperatur und verschiedenen Salzgehalt.

Für die nördlich von 30° N liegenden Teile des Atlantischen Ozeans läßt sich aus unseren Profilen ein einigermaßen sicherer Schluß auf die Zirkulation nicht machen. Nur so viel kann gesagt werden, daß in der Oberschicht vorwiegend nordwärts, in den tieferen Schichten südwärts gerichtete Bewegungskomponenten auftreten dürften, beide im allgemeinen mit absteigender Tendenz.

In Abb. 1 wird versucht, die Nord-Süd-Komponenten der Bewegung, die aus unseren Längsschnitten qualitativ abgeleitet werden könnten, darzustellen.

Abb. 1. Die aus den Längsschnitten sich ergebende Nord-Süd-Komponente der Bewegung auf 30° W.

Die verschiedene Stärke der Komponenten wird durch Verschiedenheit der Pfeile angedeutet, und in meridionaler Richtung stromlose Schichten werden durch kleine Ringe bezeichnet.

Dies sind die Vorstellungen, zu denen wir auf Grund unserer Schnitte gelangten. Aber für die Konstruktion stand, namentlich unterhalb 1000 m Tiefe, nur eine sehr geringe Zahl einwandfreier Beobachtungen zur Verfügung, und so bleibt vorderhand der Stromverlauf in wesentlichen Punkten hypothetisch. So besteht eine erhebliche Unsicherheit über die Ausdehnung der einzelnen Stromgebiete, namentlich über ihre vertikale Mächtigkeit, über ihre Ursprungsgebiete und über ihre Verzweigungen. Wenden wir uns zuerst dem letzten Punkte zu, so erheben sich wichtige Fragen hinsichtlich aller Glieder des gesamten Stromsystems.

Bezüglich des Antarktischen Zwischenstromes muß erst durch Beobachtungen entschieden werden, welchen Anteil an seiner Speisung einerseits die eisreichen Breiten jenseits 60° S und andererseits die niederschlagsreichen fünfziger Breiten haben. Danach wäre zu entscheiden, ob der von W. Brennecke gewählten Bezeichnung »Subantarktischer Strom« oder unserer Benennung »Antarktischer Strom« der Vorzug zu geben ist. Noch schwieriger ist anzugeben, wo das Ende dieses Stromes anzusetzen ist. Zwar kann man das Salzgehaltsminimum, das diesen Strom auszeichnet, wie oben gezeigt, im Ostatlantischen

bis 32° N verfolgen, aber von 10° N ab nimmt der Salzgehalt sehr rasch zu, und die meridionalen Druckunterschiede sind zugleich minimal[8]; es fragt sich mithin, ob man in diesem Gebiet von einem Strom, wenigstens mit nennenswerter Meridionalkomponente der Bewegung, überhaupt noch sprechen kann. Fraglich bleibt, woher die Beimischung salzreichen Wassers stammt, ob sie durch die Mischung mit den darüber und darunter verlaufenden Strömungen oder durch seitlichen Einschub hervorgerufen wird, und ob schließlich seine Stromfäden, wie wir annehmen, größerenteils zum Nordatlantischen Tiefenstrom absinken oder, wie Brennecke angibt, zum Nordtropischen Unterstrom emporsteigen.

Bezüglich des Nordatlantischen Tiefenstromes ergeben sich ganz analoge Probleme. Welchen Anteil an seiner Speisung haben die absinkenden Wassermassen der Sargassosee bzw. höherer Breiten, wieviel trägt das salzreiche Mittelmeerwasser bei? Wo liegt vor allem das Ende dieses Stromes? Dringt tatsächlich, wie wir annehmen, nordatlantisches Wasser bis in die Weddellsee vor, oder endigt der Strom, wie Brennecke annimmt, bereits in 45° S.?

Die gleichen Fragestellungen sind bezüglich des Antarktischen Bodenstromes zu formulieren, denn auch er wird, wie wir oben darzulegen versuchten, aus verschiedenen Quellen gespeist, ohne daß wir den Anteil der einzelnen Komponenten sicher zu beurteilen vermöchten, und auch über das Schicksal seiner letzten Ausläufer sind wir im unklaren. Wird sein Wasser, das sich unter dem Einfluß des Erdinneren allmählich auf dem Wege nach Norden erwärmt, dadurch zum Aufsteigen und zur Mischung mit dem südwärts setzenden Nordatlantischen Tiefenstrom gebracht, so daß seine Wassermasse immer geringer wird und schließlich ganz verschwindet, oder ordnet sie sich in anderer Weise der allgemeinen Zirkulation ein?

Selbst die wesentlich besser erforschte Zirkulation in der obersten Schicht der Tropen bietet noch bedeutsame Probleme, aber sie treten im Meridionalschnitt nicht in Erscheinung. So ist es sehr wahrscheinlich, daß die Tropischen Unterströme von ihren Ursprungsgebieten, den salzreichen Zonen am Außenrande der Tropen, nicht nur äquatorwärts abfließen, sondern sich auch seitlich ausbreiten. So zeigen neue dänische Beobachtungen auf der »Margrethe«, daß der Nordäquatorialstrom vor der Küste Nordbrasiliens von salzreicherem Wasser unterschoben wird, und ebenso schiebt es sich nach neueren amerikanischen Messungen westwärts unter der Oberfläche gegen Florida und die großen Antillen vor. Eine ähnliche flächenhafte Ausbreitung ist für den südatlantischen Tropischen Unterstrom zu vermuten, aber noch nicht zu erweisen.

Nicht weniger Schwierigkeiten bietet die Frage nach der vertikalen Mächtigkeit, d. h. nach der oberen und unteren Begrenzung der einzelnen Stromglieder.

Nur für die Gebiete vom Äquator bis 25° N und 25° S vermochten Wüst und der Verfasser auf Grund der Druckgefälle Mittelwerte für die wahrschein-

---

[8] A. Merz u. G. Wüst, Die atlantische Vertikalzirkulation, 3. Beitrag. Zeitschr. d. G. f. E., Berlin 1923, S. 132.

lichen oberen und unteren Stromgrenzen und für die Strommaxima zu geben. Für die außerhalb der genannten Breiten liegenden Gebiete scheiterte wegen der geringen Zahl und der Ungenauigkeit der Werte der gleiche Versuch, und aus der Temperatur- und Salzgehaltsverteilung allein kann, wie sich schon aus unseren früheren Darlegungen ergibt, ein sicherer Schluß über Stromgrenzen und Strommaxima nicht gezogen werden. Aber auch die Mittelwerte für die Tropen vermögen nur einen ersten Anhalt zu geben, da unter dem Einfluß des Reliefs die Tiefenlage der Stromgrenzen, wie der Verlauf des Nordatlantischen Tiefenstromes im Bereich des Rio Grande-Rückens lehrte, von Ort zu Ort starken Schwankungen unterliegt. Das vorliegende Beobachtungsmaterial ist viel zu gering, um diese Reliefwirkung im einzelnen verfolgen zu können. Unsere Längsprofile müssen in diesem Sinne als noch sehr schematisch bezeichnet werden. Eine erste statistische Erfassung der Reliefwirkung auf die Tiefenlage der Ströme wird in der Tabelle 1 versucht und in Abb. 2 veranschaulicht.

Als Beispiel wurde der Nordatlantische Tiefenstrom in dem Gebiet zwischen Äquator und 30° S herausgegriffen und auf Grund der Gazelle- und Challenger-Beobachtungen die Tiefenlage des schon bei früherer Gelegenheit bestimmten Temperaturmaximums[9] nach der Lottiefe der Stationen in Gruppen mit Lottiefen von 2000—2999, 3000—3999, 4000—4999 und über 5000 m eingeordnet. Tabelle 1 gibt nun die mittlere Tiefenlage des Temperaturmaximums und die mittlere Lottiefe für diese Gruppen.

Tabelle 1.

Die Beziehung zwischen Relief und Tiefenlage des Nordatlantischen Tiefenstromes auf 0—30° S und 30° W.

Mittlere Lottiefe	2658 m	3827 m	4299 m	5429 m
Mittlere Tiefenlage d. Temp.-Maximums	1200 m	1550 m	1600 m	1800 m
Mittlere geogr. Südbreite	14°	9 1/2°	11°	14°
Beobachtungszahl	3	4	8	3

In Anbetracht einerseits der recht guten Verteilung der Stationen über das ganze Gebiet und andererseits der ziemlich ähnlichen Breitenlage dürfen wir die sehr beträchtlichen Unterschiede der Tiefenlage des Temperaturmaximums und damit des Nordatlantischen Tiefenstromes in der Hauptsache auf die Bodengestaltung zurückführen. Die Einfachheit der Beziehung zwischen beiden Faktoren, die Abb. 2 darstellt, bestätigt diese Auffassung.

Abb. 2. Die Beziehung zwischen Relief und Tiefenlage des Nordatlantischen Tiefenstromes auf 30° W und 0 bis 30° S.

Mit dieser Bemerkung sind wir bereits über den Kreis der Fragen etwas

[9] Siehe Anm. 5.

hinausgegangen, die sich unmittelbar an unsere Profile knüpfen, und wir gelangen damit erst zu dem fundamentalen Problem, das heute zur Lösung steht, nämlich dem Problem von der wahren Bewegung im Raum.

Unsere Längsprofile gestatten selbst bei sorgfältigster Analyse nicht, mehr als einen ersten qualitativen Einblick in die nordsüdlichen Bewegungskomponenten zu gewinnen, wobei noch dazu alle soeben behandelten Punkte unentschieden oder wenigstens mit einer gewissen Unsicherheit behaftet bleiben. Ein Urteil über den wirklichen Strömungsverlauf, der nur in dem einen oder anderen Falle in der Bildebene liegen dürfte, können sie nicht geben. Dazu bedarf

Abb. 3. Temperaturquerprofil durch den Südatlantischen auf 35° S.

es eines über den ganzen Ozean systematisch gelegten Beobachtungsnetzes. Aber das gesamte im Südatlantischen bisher gesammelte Material genügt nicht, um mehr als dieses eine Längsprofil zu konstruieren. Darüber hinaus ist es nur noch möglich, für etwa 35° S, vorwiegend auf Grund von »Challenger«- und »Gazelle«-Beobachtungen, jedoch auch nach einigen modernen Stationen, ein brauchbares Temperatur**quer**profil etwa von der La Plata-Mündung bis gegen Kapstadt hin zu entwerfen. Abb. 3 gibt einen kleinen Ausschnitt aus diesem Profil, der das Westende bis 1000 m Tiefe umfaßt und einen guten Einblick in die Phänomene gewährt, die durch dieses Profil erschlossen werden. Die Isothermen zeigen große, mehrere hundert Meter umfassende vertikale Schwankungen, die sich mit ähnlicher Intensität fast noch 15° weiter nach Ost erstrecken, dann abflauen und erst wieder einige hundert Seemeilen vor der

afrikanischen Küste erheblich an Stärke gewinnen. Sie knüpfen sich offenbar an die Stromgrenzgebiete, die das Profil an seinem West- und an seinem Ostende schneidet: im Westen ist es das Grenzgebiet zwischen Brasil- und Falklandstrom, im Osten die Konvergenzzone zwischen dem in den Atlantischen einströmenden Zweig des Agulhasstromes und der Westwindtrift. Diese Grenzwirbel scheinen überraschenderweise im Lauf der Jahre ihre Lage beizubehalten, denn Beobachtungen von Expeditionen aus den verschiedensten Jahren fügen sich ungezwungen dem Linienverlauf ein, der im wesentlichen schon durch die »Challenger«-Beobachtungen gegeben wird. Die Erscheinung macht sich bis in große Tiefen bemerkbar, jedenfalls bis zu 2500 m, und betrifft infolgedessen den Antarktischen Zwischenstrom wie den Nordatlantischen Tiefenstrom, in deren Bereich die Isothermen um Beträge bis zu 1000 m auf- und absteigen.

Wir müssen auch in anderen Stromgrenzgebieten ähnliche Erscheinungen erwarten, und in der Tat bestätigen die Beobachtungen diese Erwartung. In Tafel V wird ein Kärtchen der Temperaturen des Nordatlantischen für 400 m Tiefe auf Grund des gesamten vorliegenden Beobachtungsmaterials gegeben. Dabei wurden auch die Beobachtungen von der Fahrt des Kreuzers »Berlin« und von der Vorexpedition des »Meteor« verwendet, welche beiden Fahrten nach Vorschlägen des Verfassers so angelegt wurden, daß den schon aus dem älteren Material erkennbaren Stromgrenzerscheinungen im Gebiet zwischen der Pyrenäenhalbinsel, den Azoren und Kanaren besonders nachgespürt werden konnte. Das Warmwasser beiderseits 30° N ist, wie schon seit langem bekannt, an seiner Nordwest- und Nordseite und auch an seiner Südseite von Kaltwassermassen umgeben, die anderer Herkunft wie das Warmwasser sind. Aber in den Grenzzonen dieser verschiedenen gegeneinander bewegten Wassermassen verlaufen die Isothermen nicht so einfach, wie man nach früheren Temperaturkärtchen schließen müßte, sondern sie zeigen große Ausbuchtungen, die nur an dem glatten Kontinentalabfall des nordamerikanischen Festlandes von Florida bis zur Neufundlandbank fehlen. Gewaltige südwestwärts gerichtete, durch Beobachtungen gut belegte Ausbuchtungen der Isothermen, die Einbrüche kalten Wassers anzeigen und in Vertikalschnitten als vertikale Aufwölbungen der Isothermen entgegentreten würden, treffen wir an der Neufundlandbank, von wo wir sie bis zu den Bermudas verfolgen können, ferner im Azorengebiet und am Nordwestabfall der Bodenschwelle, die sich vom Südwestende der Pyrenäenhalbinsel gegen die Kanaren erstreckt. Sie alle entstammen, wie die Karte zeigt, der Baffinsbai, die als Kaltwasserlieferant die früher studierten engen Pforten des Sir William Thomson-Rückens und der Danmarkstraße weit übertrifft und den Hauptbeitrag liefert für die Bildung eines vielverzweigten »Arktischen Zwischenstromes«, der mit seinem antarktischen Pendant an Bedeutung sich allerdings nicht messen kann. Er wird durch die Profile des Kreuzers »Berlin« von der Pyrenäenhalbinsel nach den Azoren und von den Azoren nach den Kanaren wiederholt geschnitten. Besonders interessant ist nun dies, daß alle diese Ausbuchtungen mit der Topographie des Untergrundes in Beziehung zu stehen scheinen. Überall, wo sich der Meeresboden erhebt, wie an der Neufundlandbank, im Azorenplateau und in der Kanaren-

schwelle, biegen die Isothermen in der Richtung der Bewegung der Warmwassermassen, die im Sinne des Uhrzeigers vor sich geht, nach rechts aus, überall dort, wo der Meeresboden sinkt, biegen sie dagegen nach links aus. Das entspricht sehr gut den theoretischen Entwicklungen, die W. Ekman vor kurzem über die Einwirkung des Reliefs auf Meeresströmungen gegeben hat[10]. Wenn wir auf der Südseite nur wenige Auslappungen gut ausgeprägt finden, so mag dies teilweise an dem mangelhaften Beobachtungsmaterial, teilweise aber auch daran liegen, daß in dem 400-m-Niveau in diesem Gebiet in Anbetracht der geringen Druckdifferenzen[11] wohl nur ganz schwache Strömungen vorhanden sind.

Daß in der Tat Stromgrenzen vielfach einen bogigen Verlauf haben, wie wir in den beiden eben behandelten Beispielen aus den Krümmungen der Isothermen und Isohalinen schlossen, wird durch eine eingehende Bearbeitung der Stromversetzungen erwiesen. Versucht man z. B., auf der H. H. F. Meyer-

Abb. 4. Die Lage der Stromgrenze zwischen Agulhasstrom und Westwindtrift südlich Afrikas.

schen Stromkarte des Atlantischen Ozeans[12] die Grenze zwischen nord- und südsetzendem Strom auf ungefähr 30° N in der Sargassosee zu konstruieren, so erhält man ebenso eine hin- und herschwingende Linie, wie wenn man im Südatlantischen die Grenze zwischen Falklandstrom und Westwindtrift einerseits und Agulhas-, Benguela- und Brasilstrom andererseits zu entwerfen unternimmt, die in Form einer großartigen Konvergenzlinie den Südatlantischen in seiner ganzen Breite durchzieht. Abb. 4 bringt für vier Monate die Lage der Stromgrenze zwischen Agulhasstrom und Westwindtrift südlich Afrikas, die ich auf Grund einer Spezialuntersuchung aus den von dem holländischen meteorologischen Institut in De Bilt veröffentlichten Stromversetzungen ermittelt habe. Wir sehen, daß diese Stromgrenze gewissen, aber nicht sehr bedeutenden jahreszeitlichen Schwankungen unterworfen ist und eine Anzahl von Schwingungen aufweist, deren größte in allen Monaten im selben Gebiete

[10] W. Ekman, Über Horizontalzirkulation bei winderzeugten Meeresströmungen. Arkiv for mat., astr., fys. Bd. 17, Stockholm 1923.

[11] Siehe Anm. 8.

[12] Hans H. F. Meyer, Die Oberflächenströmungen des Atlantischen Ozeans im Februar. Veröff. d. Inst. f. Meereskd., N. F. Reihe A, Heft 11, Berlin 1923.

etwa zwischen 18° und 23° O auftritt und in ihrer Lage offenbar durch den Verlauf der Agulhasbank bestimmt ist. Die schmalen hornförmigen Krümmungen der Konvergenzlinie zeigen Gebiete an, wo die Stromfäden der beiden Wassermassen sich einwirbeln. Abb. 5 stellt diese Strömungen südlich von Afrika für den Monat Mai dar. Man kann diesem Kärtchen ohne weiteres

Abb. 5. Die Strömungen südlich Afrikas im Mai.

entnehmen, daß der bogige Verlauf der Stromgrenze durch Wirbelbildung im Grenzgebiet hervorgerufen wird.

Je größer die Dichtedifferenz zwischen beiden Wasserarten ist, um so weniger wird es zu einem Ineinandergreifen und Einwirbeln kommen, um so glatter wird der Grenzverlauf erscheinen, weil eben das schwerere Wasser bald untersinkt. Dementsprechend finden wir vor der nordamerikanischen Küste bei sehr großen Dichtedifferenzen einfachen Grenzverlauf, nicht nur in 400 m (vgl. Tafel V), sondern auch an der Oberfläche, wie ebenfalls die Meyersche Karte zeigt. Der glatte Verlauf des Schelfrandes dürfte, wie schon oben angedeutet, im gleichen Sinne wirken, und dasselbe wird wohl an der Konvergenzlinie zwischen Westwindtrift und dem antarktischen Oberflächenwasser der Fall sein, wie eine Untersuchung von M. Willimzik[13] für den Indischen Ozean lehrt. In Übereinstimmung damit steht die Tatsache, daß das hydrographische Querprofil, das ich auf dem Kabeldampfer »Stephan« von Monrovia nach Pernam-

[13] M. Willimzik, Die antarktischen Oberflächenströmungen zwischen 50° und 110° östl. Länge (s. Schlußnote).

buco bis 800 m Tiefe über den Atlantischen legen konnte, nur ganz wenige vertikale Schwingungen der Isothermen und Isohalinen aufweist, denn hier sind die vertikalen Dichtedifferenzen größer als sonstwo im Ozean. Die Stromgrenzflächen haben hier einen einförmigen Verlauf, wenn man von Grenzwellen wesentlich kleinerer Dimensionen als auf 35° S absieht. Andererseits treffen wir da, wo nur minimale Dichtedifferenzen vorhanden sind, ausgesprochene Bogenform entlang der Konvergenzlinien der Warmwassergebiete. Besonders hat sich diese Bogenform für das südindische Konvergenzgebiet auf Grund einer Spezialuntersuchung ergeben, die M. Willimzik[14] ausgeführt hat und die wie die oben erwähnte Arbeit desselben Autors demnächst in den Veröffentlichungen des Instituts für Meereskunde erscheinen wird.

Alle diese Schwingungen haben annähernd gleiche Größenordnung. Die Entfernung von Scheitel zu Scheitel der Bogenlinien beträgt im allgemeinen 5° bis 10°, in Breiten von etwa 30° bis 40° N und S. Mithin sind diese Schwingungen scharf zu unterscheiden von jenen kleinen Grenzwellen und Grenzwirbeln, die von Seefahrern immer wieder, meist mit dem Thermometer, festgestellt und besonders eindringlich von der Grenzzone des Labrador- und Golfstroms und von der Grenze zwischen Agulhasstrom und Westwindtrift geschildert werden. Auch der »Meteor« hat auf seiner Ausreise solche kleinen Grenzwellen und -wirbel zwischen Brasil- und Falklandstrom auf etwa 35° S vor Cap Polonio, also am Westende des in Abb. 3 dargestellten Profilstückes festgestellt.

Für die meisten Stromgebiete müssen wir demnach einen bogigen Verlauf der Grenzen und damit der Isothermen und Isohalinen sowie einen Wechsel der Stromrichtungen erwarten, die sich in Entfernungen von 5° bis 10° wiederholen, gewissen jahreszeitlichen Schwankungen unterliegen, aber im allgemeinen — meist wohl topographisch bedingt — ortsbeständig zu sein scheinen. Da die in Horizontal- und Vertikalschnitten auftretenden Krümmungen nur zwei verschiedene Ansichten derselben Sache sind, so müssen wir uns auch überall dort, wo wir solche Lappungen bisher nur aus Oberflächenbeobachtungen kennen, die oberen und unteren Grenzflächen der Strömungen ebenfalls gewellt vorstellen. Das für 35° S konstruierte Profil zeigt am Beispiel des Antarktischen Zwischenstromes, daß es dabei zu einer sehr scharf ausgesprochenen Gliederung kommen kann. Wenn wir bisher auch nur wenige Belege haben, wie etwa in dem durch Abb. 5 mitgeteilten Beispiel der Strömungen südlich Afrikas, so dürfen wir doch mit ziemlich großer Wahrscheinlichkeit annehmen, daß diese großen Krümmungen der Stromgrenzen sowie der Isohalinen und Isothermen in Horizontal- und Vertikalschnitten zurückzuführen sind auf Wirbel im Grenzgebiet verschieden gerichteter Strömungen. Im Gegensatz zu den Verhältnissen in der Atmosphäre scheinen sie eine ziemlich stabile Lage zu haben und nur gewissen jahreszeitlichen Schwankungen unterworfen zu sein. Es mag dies in dem viel größeren topographischen Zwange begründet sein, dem die ozeanischen Strömungen gegenüber den atmosphärischen Bewegungen

[14] M. Willimzik, Die Strömungen des großen Konvergenzgebietes des Südindischen Ozeans im Januar und Juli (s. Schlußnote).

unterworfen sind. Aber wie dort sind diese Wirbel auch hier von größter Bedeutung für die Zirkulation. Sie bewirken in erster Linie die Wassermischung; ohne sie gründlich zu studieren, kann man in das Wesen der Zirkulation nicht tiefer eindringen. Unsere Längsschnitte zeigen sie nicht, denn hierfür reichte das Material nicht aus, ja wir haben auftretende Krümmungen im Isothermen- und Isohalinenverlauf möglichst ausgeglichen, um vorerst die wesentlichen Züge der Zirkulation zu erhalten. Auch aus den bisher veröffentlichten ozeanischen Temperatur- und Salzgehaltskarten sind sie in der Regel nicht zu entnehmen; vielmehr zeigen diese fast ausnahmslos einen glatten Linienzug. Erst unsere weiteren Versuche haben den komplizierten Verlauf der Zirkulation in einigen Beispielen erschlossen, und wenn die verschiedenen Temperatur- und Salzgehaltskärtchen, die wir bereits für verschiedene Niveaus des Atlantischen entworfen haben, nicht trügen, dann ist dies Auftreten zahlreicher stationärer Wirbel und mithin ein komplizierter Verlauf von Isothermen und Isohalinen ein allgemeines Charakteristikum der ozeanischen Zirkulation.

Wenn wir hier die stationären Wirbel besonders hervorheben, so übersehen wir keineswegs, daß daneben auch fortschreitende Wirbel und interne Wellen häufig vorkommen werden. Wir haben aber bisher noch keinen Anhalt dafür, daß es sich dabei im allgemeinen um Erscheinungen von größeren Dimensionen als die oben erwähnten kleinen Grenzwellen und Grenzwirbel handelt. Sollten aber die Gezeiten, direkt oder indirekt, wie von O. Pettersson vermutet wurde, interne Wellen von großer Länge hervorrufen, so sind sie jedenfalls für das Problem der Zirkulation nicht von erheblicher Bedeutung und mit unseren Hilfsmitteln vielleicht auch nicht erfaßbar.

Wollen wir nun die großen stationären Wirbelbildungen, deren Kenntnis für eine tiefere Erkenntnis der Bewegungsvorgänge unentbehrlich erscheint, erfassen, so dürfen die Beobachtungsstationen in solchen Gebieten keinen größeren Abstand als höchstens $2^1/_2°$ bis 5° haben. Der Abstand wird von Fall zu Fall bestimmt werden müssen. Dagegen wird man vorläufig verzichten können auf das Studium der oben erwähnten Grenzwellen und Grenzwirbel zweiter Ordnung, die späterhin Aufgaben für oft wiederholte Spezialuntersuchungen abgeben könnten.

Entsprechend den Ergebnissen der auf diesen Blättern angestellten Betrachtungen wurde bei der Aufstellung des Routennetzes der Expedition und bei der Angabe der erforderlichen Zahl von Stationen verfahren, wobei schon vorhandenes Beobachtungsmaterial entsprechend seinem Werte berücksichtigt wurde. Das Routennetz wurde so angelegt, daß es, soweit möglich, ein in sich einigermaßen geschlossenes ozeanisches Zirkulationsgebiet überspannt. Es wurde hierfür das atlantische Gebiet zwischen 20° N und der Eisgrenze, die unser für Eisschiffahrt nicht gebautes Schiff im allgemeinen nicht überschreiten kann, gewählt (vgl. Abb. 6), in das sich das Regime der Tropischen Unterströme des Antarktischen Zwischenstromes, des Nordatlantischen Tiefenstromes und des Antarktischen Bodenstroms größtenteils einfügt. Die Routen wurden im allgemeinen als Querprofile über den Ozean entworfen, die tunlichst die Streichrichtung der wichtigsten ozeanischen Böschungen, z. B. der Kontinentalabfälle

und der Atlantischen Schwelle senkrecht schneiden; denn sowohl die Beobachtung wie die Theorie zeigt, daß die Topographie von maßgebendem Einfluß auf die Wasserbewegung ist und daß die Stromlinien in tieferen Wasserschichten vielfach den Isobathen folgen. Solche Profile geben mithin die beste Aussicht,

Abb. 6. Fahrtenplan der Deutschen Atlantischen Expedition auf dem »Meteor«.

mit einem großen Teil ihrer Fläche den Strom senkrecht oder annähernd senkrecht zu schneiden und mithin mit der nach dem Bjerknesschen Verfahren berechenbaren Stromkomponente senkrecht zum Schnitt den wahren Strom einigermaßen richtig zu erfassen. Die in allen Profilen wo es die Wetterlage gestattet, vorgesehenen Strommessungsstationen werden eine Kontrolle darüber bieten, wieweit der Strom durch die Rechnung erfaßt werden konnte, welche Richtung der Strom tatsächlich zur Profilfläche einnahm. Der Abstand der Stationen auf den Profilen wurde entsprechend den oben mitgeteilten Ergeb-

nissen über Dimensionen der zu erwartenden Grenzkrümmungen gewählt, wobei im einzelnen weitgehende Rücksicht auf das Relief genommen wurde. Die endgültige Entscheidung wird aber in jedem einzelnen Falle erst im Laufe der Arbeit getroffen werden können. Da der bogige Verlauf der Isothermen und Isohalinen bis in große Tiefen sich verfolgen läßt, da sich zeigte, daß die Tiefenströme vielfach thermisch und halin gegliedert sind, also offenbar in einem gegebenen Querschnitt mit recht verschiedener Geschwindigkeit fließen, und weil schließlich der Einfluß des Bodenreliefs gerade auf die in großen Tiefen fließenden Ströme besonders maßgebend sein muß, wird das Studium der Wassermassen der größeren Tiefen, die bisher nur mit einer sehr geringen Beobachtungszahl bedacht wurden, sehr eingehend betrieben und jede hydrographische Reihe bis nahe an den Boden herangeführt werden. Auch die vertikalen Beobachtungsabstände werden enger gewählt werden, als bisher im allgemeinen üblich, um alle vertikalen Änderungen mit genügender Genauigkeit zu erfassen. Es ist beabsichtigt, soweit die Witterungsverhältnisse einen genügend langen Stationsaufenthalt gestatten, in den obersten 1100 m alle 100 m Temperatur- und Salzgehaltsbestimmungen zu machen, von 1200—2000 m alle 200 m und von 2000 m ab bis zum Boden alle 500 m, und Zwischenwerte überall zu entnehmen, wo dies erforderlich wird, z. B. von 0—200 m in den Tropen. Die Wahl enger Vertikalabstände ist auch erforderlich, um eine einwandfreie Druckberechnung vornehmen zu können.

Der Abstand der Profile voneinander wurde so gewählt, daß man hoffen darf, alle wesentlichen Züge der großen interhemisphärischen Zirkulation innerhalb des Arbeitsgebietes zu erfassen. Das über den Bereich des Guineastromes gelegte Zickzackprofil deutet die Absicht an, auch hier Stromquerprofile zu erhalten. Die Schmalheit des Stromgebietes erfordert eine besonders enge Lage der Stationen. Die annähernd meridionalen Profile zwischen Feuerland und Westantarktika sowie südlich Afrikas sollen Einblick gewähren in die Beeinflussung der atlantischen Zirkulation durch den Pazifischen und Indischen Ozean. Wir hoffen, daß die dänischen und norwegischen sowie die geplanten amerikanischen Forschungen im nordatlantischen Ozean unser Beobachtungsmaterial in bedeutsamer Weise nach Norden hin ergänzen werden, wie dies nach Süden die Beobachtungen Brenneckes tun und, bei günstigen Witterungsverhältnissen, ein eigener in Aussicht genommener Vorstoß im Ostatlantischen erwirken soll.

Die hydrographischen Arbeiten werden ergänzt werden durch eingehende Regen- und Verdunstungsmessungen. Während die hydrographischen Serien einen Einblick geben sollen in die inneren Wasserumsetzungen, sollen diese meteorologischen Untersuchungen den Wasseraustausch, der durch die Oberfläche geht, erfassen. Gelingt es dann noch, was durchaus im Bereiche der Möglichkeit liegt, die Zufuhr durch die Flüsse angenähert zu ermitteln, wenigstens roh die Zufuhr durch Landeis zu schätzen, so wird der Wasserhaushalt eines großen Ozeangebietes das erstemal erfaßt werden können. Dies wird die Grundlage abgeben für eine exakte Herleitung der atlantischen Salzgehaltsverteilung aus den beeinflussenden Faktoren und ihre Darstellung in mathematischer Form, wie es für die Oberfläche bereits von G. Wüst

unter Beschränkung auf die wichtigsten Faktoren versucht wurde[15]. Ob es gelingen wird, ein gleiches Ergebnis für die atlantische Temperaturverteilung zu erzielen, scheint mir noch sehr zweifelhaft, wenngleich im meteorologischen Programm der Expedition die hierfür besonders wichtigen Messungen der Ein- und Ausstrahlung mit vorgesehen sind. Die wertvollen Einblicke in die Stromverhältnisse der Oberfläche, die von der sorgfältigen Navigation an Bord des »Meteor« für weite Gebiete zu erwarten sind, für die bisher kein Material oder nur sehr mangelhaftes vorliegt, werden ebenfalls die Tiefenuntersuchungen bedeutsam ergänzen und eine Kontrolle für die Rechnungsergebnisse darstellen.

Eine solche systematische hydrographische Aufnahme eines ganzen Ozeanraumes wird nicht nur für die Erkenntnis der Zirkulation und das Verständnis der Temperatur- und Salzgehaltsverteilung von großer Bedeutung sein, sondern sie ist auch bedeutungsvoll für eine Reihe von Nachbardisziplinen. Ich denke in erster Linie an die Biologie.

Zahlreiche maritime Expeditionen haben ein reiches faunistisches und floristisches Material nach Hause gebracht, aber die Deutung der geographischen Verbreitung der einzelnen Arten und Gattungen bereitet außerordentliche Schwierigkeiten. Dies ist sehr wohl zu verstehen. Denn die Verbreitung und die erst seit Hensen und Lohmann näher studierte Dichte der kleinen flottierenden Lebewelt des Ozeans wird von einer ganzen Reihe von Faktoren entscheidend beeinflußt. Hierher gehören nicht nur Faktoren wie Dauer und Intensität der Sonnen- und Himmelsstrahlung, Temperatur, Salzgehalt, Dichte und innere Reibung des Seewassers, die in hinreichender Annäherung schon bisher bekannt waren oder wenigstens hätten ermittelt werden können, sondern vor allem der Transport durch die Zirkulation und die Atmungs- und Nahrungsverhältnisse, worüber bisher einigermaßen genügende Daten nicht zur Verfügung standen, ausgenommen die zahlreichen Sauerstoffbestimmungen Brenneckes, namentlich im Atlantischen Ozean. Die Zirkulation wird nun auf der »Meteor«-Expedition eingehend untersucht werden, und ebenso ist geplant, eindringende Beobachtungen über die Gase im Meerwasser und über die Nahrungsstoffe anzustellen, soweit hierfür die Kraft des einen vorgesehenen Chemikers mit seinen zwei Laboranten ausreicht. Systematisch wird der Sauerstoffgehalt des Seewassers untersucht werden und in einer größeren Zahl von Proben die Kohlensäurefaktoren. Den Stickstoffverbindungen und der Phosphorsäure wird ebenfalls Aufmerksamkeit geschenkt werden, dagegen hat es sich nicht ermöglichen lassen, Kieselsäurebestimmungen in das Arbeitsprogramm aufzunehmen, da eine einwandfreie, für Bordzwecke geeignete Methode bisher nicht gefunden werden konnte. Ausserdem ist eine Probenaufsammlung für eine in der Heimat vorzunehmende Untersuchung des Gehaltes des Seewassers an edlen Metallen und Eisen vorgesehen. Es ist übrigens zu erwarten, daß diese Beobachtungen nicht nur in biologischer und geologischer Hinsicht von Wert sein werden, sondern auch des öfteren Fingerzeige über die Zirkulationsvorgänge liefern werden.

---

[15] G. Wüst, Die Verdunstung auf dem Meere. Veröff. d. Inst. f. Meereskd. N. F. Reihe A, Heft 6, Berlin 1920.

Die biologische Bearbeitung des Expeditionsmaterials wird mithin auf Grund der geplanten physikalisch-chemischen Untersuchungen über die Kenntnis der meisten Faktoren verfügen, die aus dem Bereich dieser Disziplinen für die Bearbeitung faunistischer und floristischer Fragen von einiger Bedeutung sind. Wir hoffen, daß darüber hinaus befruchtende Anregungen für eine erneute tier- und pflanzengeographische Bearbeitung früheren atlantischen Expeditionsmaterials sich ergeben werden. Die biologischen Arbeiten an Bord werden in der Hauptsache Untersuchungen im Sinne und nach den Methoden Lohmanns umfassen, wie sie von diesem Forscher auf der Ausreise der »Deutschland« bis nach Buenos Aires angestellt wurden. Der Biologe der Expedition beabsichtigt seine Arbeiten so einzurichten, daß er von einer Reihe von Formen Bevölkerungskarten für charakteristische Tiefenniveaus sowie einige biologische Längs- und Querschnitte entwerfen kann.

Ist somit eine enge Zusammenarbeit zwischen der physikalischen und chemischen Hydrographie und der Biologie geplant, so soll diese auch auf die Geologie ausgedehnt werden, die ebenfalls an Bord des »Meteor« vertreten ist. Jene Wissenschaften geben dem Geologen den nötigen Einblick in den physikalisch-chemischen Zustand und in den Lebensgehalt der sedimentierenden Wassermasse sowie in ihre Transport- und Erosionskraft. Es wird darum bei den physikalisch-chemischen Untersuchungen nicht nur den biologisch besonders interessanten Horizonten, sondern auch dem Bodenwasser eine besondere Aufmerksamkeit gewidmet werden. Das Studium der Bodenproben wird sich besonders Fragen zuwenden, die durch moderne mineralogische und geologische Arbeiten neu aufgerollt wurden, wie z. B. den Ursachen der wirklichen und scheinbaren Verschiedenheit der marinen Ablagerungen des festen Landes und der rezenten ozeanischen Bodenproben. Darum wird der Frage der Zusammensetzung, namentlich der Größe der organogenen Komponente und der Veränderung der Sedimente seit ihrer Ablagerung wie auch Lösungserscheinungen am Meeresboden nachgeforscht werden. Die durch Philippi so erfolgreich eingeführte Untersuchung der Schichtung wird fortgesetzt werden. Eine vergleichende regionale Bearbeitung der Proben ist selbstverständlich beabsichtigt.

Große Bedeutung für alle diese auf dem »Meteor« vertretenen Wissenschaften hat das umfassende Lotprogramm der Marine, das die nautische Leitung durchführen will. Die Echolotungen sollen, soweit es der Seegang gestattet und nicht sehr einförmiges Relief angetroffen wird, auf allen Schnitten in Abständen von drei Seemeilen vorgenommen werden. Es wird damit ein außerordentlich verfeinertes Bild von den Reliefverhältnissen des Atlantischen Ozeans gewonnen werden. Die Echolotungen werden es ermöglichen, für die Stationen an den großen ozeanischen Böschungen die geeignetsten Positionen auszuwählen, und werden so die Untersuchung des Reliefeinflusses auf die Zirkulation wesentlich erleichtern. Die Lotungen mit der Lucaslotmaschine werden an allen Stationen Vergleichswerte liefern, und die hydrographischen Serien werden die Daten für eine einwandfreie Reduktion der Echolotungen bieten.

Neben den meereskundlichen Forschungen sind umfangreiche meteorologische Arbeiten vorgesehen. Eine meteorologische Station erster Ordnung ist

an Deck eingerichtet, zur fortlaufenden Registrierung der meteorologischen Verhältnisse in den untersten Luftschichten. Mehrmalige tägliche Pilotballonaufstiege, häufige Drachen- und gelegentliche Registrierballonaufstiege sollen der Erforschung der Zustände und Vorgänge in den höheren atmosphärischen Schichten dienen. So wird dem Studium der ozeanischen Zirkulation die Erforschung der atmosphärischen parallel gehen. Die beabsichtigten Strahlungsmessungen wurden schon oben erwähnt.

II. Die wissenschaftliche Vorbereitung.

Im Mittelpunkt der Expeditionstätigkeit soll das hydrographische Programm stehen. Darum war es maßgebend für die Anlage des Routennetzes und der Stationen, darum mußten auch die hydrographischen Vorarbeiten besonders umfassend und eindringlich angelegt werden. Jeder Forscher, der zur Lösung eines Problems auszieht, sollte sich eine genaue Kenntnis des bereits beigebrachten Materials verschaffen, die Versuche zu seiner Deutung studieren und das Material von dem Standpunkt, den die Wissenschaft seit der Beibringung errungen hat, durcharbeiten. Nur dann wird er sich die bestmöglichen Arbeitshypothesen bilden und seine Beobachtungen aufs zweckmäßigste anlegen können. Nach diesen Grundsätzen wurde verfahren.

Es wurde eine Kartothek aller hydrographischen Beobachtungen in allen drei Ozeanen seit der »Challenger«- und »Gazelle«-Zeit angelegt und für den Atlantischen Ozean bis zur Ausreise vollendet. Diese Kartothek ordnet die Beobachtungen für jeden Ozean nach Fünfgradzonen der Breite, enthält den Namen des Beobachtungsschiffes, Position, Zeit der Beobachtung, Stationsnummer, Lotungstiefe, Angabe der Bodenprobe, Art der benutzten hydographischen Apparate und die festgestellten Temperatur-, Salzgehalts- und Dichtewerte mit den zugehörigen Tiefen und bringt den Quellennachweis. Zur leichteren Benutzbarkeit werden alle Tiefenangaben in Metern gegeben, alle Temperaturangaben in Celsiusgraden. Wenn ein Expeditionswerk genügende Angaben hierfür gewährte, wurden die Dichte- und Salzgehaltswerte den nach modernen Methoden gewonnenen Daten angeglichen. Dies war z. B. für die zahlreichen »Challenger«-Beobachtungen durchführbar[16]. Für die Kartothek, die bereits etwa 10000 Blätter enthält, wurde nicht nur das in den Expeditionswerken und an anderen Stellen zahlenmäßig publizierte Material herangezogen, sondern es wurden, wenn solche Veröffentlichungen fehlten, die Daten vorläufig bekannt gegebenen Kurven, Schnitten und Karten entnommen, z. B. für viele Beobachtungen des »Michael Sars« oder des »Fram«.

Auf Grund dieser Kartothek wurde zonenweise für alle Serienmessungen die Temperaturänderung mit der Tiefe graphisch dargestellt. Für die »Challenger«- und »Gazelle«-Reihen wurden die vom Verfasser bearbeiteten Kurven verwendet[17]. Diese vergleichende Darstellung ließ Beobachtungsfehler meist leicht erkennen. Aus den Kurven wurden für die Tiefen 200, 300, 400, 500,

---

[16] Siehe Anm. 6.
[17] Siehe Anm. 5.

600, 800, 1000, 1250, 1500, 1750, 2000, 2500, 3000, 3500, 4000, 4500 und 5000 m die Werte entnommen und mit Schiffsnamen, Stationsnummern, Position und Datum in ein Journal eingetragen. Beobachtete und interpolierte sowie zweifelhafte Werte wurden als solche kenntlich gemacht.

Diese Werte wurden zusammen mit dem abgekürzten Expeditionsnamen und dem Beobachtungsmonat für jede oben angegebene Tiefe in eine mit Isobathen versehene Arbeitskarte eingetragen und etwa vorhandene Einzelwerte für die betreffende Tiefe hinzugefügt. Die Arbeitskarten wurden für die Expedition in Lamberts flächentreuer Azimutalprojektion und im Maßstabe 1 : 20 Mill. eigens entworfen und sollen auch der Eintragung der neugewonnenen Beobachtungsdaten dienen. Die Temperaturkarten werden es ermöglichen, bei jeder Temperaturbeobachtung sofort festzustellen, ob sie sich gut in das vorhandene Material einfügt. Im gegenteiligen Falle wird leicht durch wiederholte Beobachtung festgestellt werden können, ob der erstgewonnene Wert einwandfrei war, und man wird auf diese Weise neue Aufschlüsse bringende Beobachtungen rasch als solche erkennen und den dadurch angeregten Fragen rechtzeitig nachspüren können.

Die Gewinnung eines entsprechenden Vergleichsmateriales für die Salzgehaltsbeobachtuugen gestaltete sich erheblich schwieriger, erstens, weil sehr viel weniger Salzgehalts- als Temperaturwerte vorliegen, zweitens, weil häufig durch zu spätes Schließen der Wasserschöpfer die Salzgehaltsproben stark gefälscht wurden, ohne daß es die Beobachter gewahr wurden, da dies Schließen der Wasserschöpfer zwar nicht in der richtigen Tiefe, wohl aber häufig unterhalb der Oberfläche erfolgte.

Die Schwierigkeiten, die sich aus den Lücken und Mängeln des Materials ergaben, konnten in großem Umfange beseitigt werden durch die Verwertung der Korrelation zwischen Temperatur und Salzgehalt, auf die zuerst Helland-Hansen hingewiesen hat[18] und die wir bereits in unserer dritten Abhandlung[19] praktisch verwerteten. Es gilt jedoch nicht, wie eine nähere Beschäftigung mit dem Gegenstand zeigte, dieselbe Korrelation für alle Teile des Ozeans. Wollten wir also mit Hilfe der Korrelation die Temperaturbeobachtungen heranziehen, um die Mängel des Salzgehaltsmaterials aufzudecken und die Lücken zu schließen, so mußten wir versuchen, diejenigen Gebiete des Atlantischen herauszuschälen, für welche eine bestimmte Korrelation mit einer für die Zwecke der Untersuchung hinreichenden Genauigkeit gilt. Je größer die Genauigkeit sein soll, um so mehr Teilgebiete wird man im allgemeinen aussondern müssen. Indem wir uns in der Regel mit einer Genauigkeit von $\pm 0.1\,^0/_{00}$ begnügten, in einigen Fällen sogar $\pm 0.15\,^0/_{00}$ zuließen, konnten wir uns auf eine Einteilung des Ozeans in 22 Hauptgebiete beschränken, von denen jedes einen bestimmten Typ der Beziehung repräsentiert. In einer Reihe von Fällen war es allerdings notwendig, um die erwähnte Genauigkeit zu erreichen, diese Hauptgebiete noch in eine Reihe von Teilgebieten zu zerlegen. Um Mißverständ-

---

[18] B. Helland-Hansen, Nogen hydrografiske metoder. Forh. ved de skand. naturforskeres 16de möte (Juli 1916) S. 357. Kristiania 1918.

[19] Siehe Anm. 8.

nisse zu vermeiden, sei bemerkt, daß für die größeren Tiefen, in denen nur geringe Salzgehaltsunterschiede vorkommen, in allen Fällen die Fehler wesentlich kleiner als ±0.1 ‰ sind.

Das Vorkommen von Temperatur- und Salzgehaltsinversionen im Atlantischen Ozean führt ferner dazu, daß selbst in ein und demselben Gebiete zum selben Temperaturwert verschiedene Salzgehaltswerte gehören können, daß also eine einfache ohne jede Einschränkung gültige Korrelation nicht angegeben werden kann. Man muß in diesen Fällen auch die Beobachtungstiefe mit in die Korrelation aufnehmen, um eindeutige Beziehungen zu erhalten. Mit Hilfe unserer Korrelationskurven konnten wir nun für alle Temperaturwerte unseres »Journals« die zuständigen Salzgehaltswerte ableiten und durch Vergleich mit wirklich beobachteten Werten auch fehlerhafte Beobachtungen ausscheiden.

Abb. 7. Die Beziehung zwischen Temperatur und Salzgehalt für drei Stationen der Vorexpedition des »Meteor«.

Diese Möglichkeit der Ausmerzung von Fehlbeobachtungen macht die Korrelation endlich zu einem sehr wichtigen Hilfsmittel bei der Arbeit auf See. Um dies zu veranschaulichen, ist Abb. 7 beigegeben, welche die Korrelation für einige Stationen unserer Vorexpedition darstellt. Es ist die Korrelation gemeinsam für die Stationen 1 und 3 angegeben, die in dem selben Hauptgebiete liegen, und in einer besonderen Kurve für Station 2, die in einem anderen Gebiete liegt. Die den Beobachtungswerten zugehörigen Tiefen sind in Hunderten von Metern angegeben. Die meisten Werte fügen sich einem verhältnismäßig einfachen Linienzug recht gut an, einige Werte fallen dagegen vollkommen heraus; das sind Beobachtungen, die mit Wasserschöpfern angestellt wurden, die nicht einwandfrei schlossen. Die Rückbiegung der für Station 1 und 3 entworfenen Kurve zeigt die Inversion an, die in diesem Gebiete unterhalb 600 m Tiefe durch das Einströmen des warmen und salzreichen Mittelmeerwassers hervorgerufen wird. Die Übereinstimmung der Kurven für benachbarte Stationen bürgt für die Richtigkeit der Konstruktion. Indem wir nun die aufgeholten Proben noch während des Stationsaufenthaltes untersuchen und die Beziehung bilden können, werden wir fehlerhafte Werte sofort erkennen und durch wiederholte Beobachtung zu ersetzen vermögen.

Die direkt oder durch die Korrelation gewonnenen Salzgehaltswerte benutzen wir in gleicher Weise und zu dem gleichen Zwecke wie die Temperaturwerte, um Kurven, Karten und Schnitte zu entwerfen.

Es braucht nicht näher ausgeführt zu werden, daß diese Vorarbeiten wesentlich dazu beigetragen haben, die oben skizzierte Einstellung zu den Problemen der atlantischen Hydrographie zu erzeugen. Sie hätten nicht so rasch durchgeführt werden können, wenn nicht die mit ihrer Durchführung betrauten Kräfte, die HH. Hans H. F. Meyer, G. Böhnecke, F. Loewe, und einige von der Marine zur Verfügung gestellte Hilfskräfte alles getan hätten, um die Vollendung durchzusetzen. Der Verfasser hat nur die Arbeit organisiert und die Ergebnisse sorgfältig überprüft[20].

Buenos Aires, Ende Mai 1925.

Anhang.

Quellenmaterial zu den Längsschnitten auf 30° W (Tafel III u. IV).

Lfd. Nr.	Geographische Breite	Geographische Länge	Schiff u. Stat. Nr.	Datum	Schnitt	Quelle (Nr. des Lit.-Verz. u. Seite)	Bemerkungen
1	2	3	4	5	6	7	8
1	66° 42′ N	26° 40′ W	Sa 13	3. VIII. 1900	t, S	VII. S. 364	Typische Station des Grönlandschelfes.
2	64° 45′	29° 06′	J 90	24. VI. 1896	t, S	X	Zw. 0 u. 1070 m mit J 91 gemittelt, S aus Cl mit Knudsens Tabellen neu ermittelt.
3	64° 44′	31° 00′	J 91	25. VI. 1896	t, S	X	
4	61° 44′	30° 29′	J 18	17. VI. 1895	t, S	X	Mit J 80 gemittelt.
5	61° 02′	29° 32′	J 80	13. VI. 1896	t, S	X	Vgl. laufende Nr. 4.
6	56° 06′	30° 24′	Ah 11	VII. 1913	t, S	VI, S. 68	Tiefenlage der Isothermen u. Isohalinen aus Vertikalschnitt interpoliert. Position nur angenähert aus Kärtchen ermittelt. (Nr. 6 u. 7)
7	54° 54′	29° 00′	Ah 9	VII. 1913	t, S	VI, S. 71	
8	49° 46′	30° 01′	Ma	4. VIII. 1913	t, S	IX	
9	48° 31′	31° 26′	Ma	5. VIII. 1913	t, S	IX	Station nur ab 1100 m verwendet, da in höheren Schichten sich die östliche Lage fühlbar macht.
10	47° 29′	30° 20′	Sa 86	16. VII. 1910	t, S	XIII, S. 115	Tiefenlage der Isothermen u. Isohalinen aus Vertikalschnitt interpoliert.
11	42° 38′	30° 42′	Ma	13. VIII. 1913	t, S	IX	Mit der benachbarten D 6 gemittelt.
12	42° 04′	28° 22′	D 6	26. V. 1911	t, S	II	Vgl. laufende Nr. 11.
13	38° 48′	28° 17′	Pr 615	1. VIII. 1892	S	XVIII	Aräometerwert, lediglich für 1022 m Tiefe.
14	38° 30′	31° 14′	C 73	30. VI. 1873	t	XVI	
15	38° 00′	29° 01′	Pb	1910 u. 1911	t, S	XIV, S. 538	Mittel aus 4 auf gleicher Position zu verschiedenen Jahreszeiten gemessenen Serien.
16	37° 44′	29° 14′	Pr 1376	26. VIII. 1902	S	XVIII	Aräometerbestimmung in 980 m Tiefe.
17	37° 20′	29° 33′	Sa 57	11. VI. 1910	S	XIII, S. 296	Aus Karte für 914 m Tiefe ermittelt.
18	34° 19′	28° 46′	D 10	12. VI. 1911	t, S	II	
19	31° 00′	30° 00′	Sa	1910	S	XIII, S. 296	Aus Karte für 914 m Tiefe ermittelt (Quelle, S. 296).
20	30° 56′	27° 56′	D 11	14. VI. 1911	t, S	II	Mit Sa 50 gemittelt.
21	30° 08′	31° 19′	Sa 50	4. VI. 1910	t, S	XIII, S. 84 u. 723	Vgl. laufende Nr. 20; Tiefenlage der Isothermen u. Isohalinen aus Vertikalschnitt interpoliert (Quelle, S. 84 u. 723).
22	28° 42′	34° 33′	Ga	20. X. 1903	t, S	V	
23	27° 46.5′	27° 36′	D 12	16. VI. 1911	t, S	II	
24	26° 21′	33° 37′	C 353	3. V. 1876	t	XVI	
25	25° 07′	31° 32′	N 21	23. VIII. 1889	t	XI	

[20] Die in den Anmerkungen 6, 13, 14 genannten Abhandlungen lagen dem Verfasser in druckfertigen Manuskripten, die in Anmerkung 4 genannte in der fertigen Bearbeitung vor. Alle vier Arbeiten sollen demnächst in den Veröffentlichungen des Instituts für Meereskunde, Berlin erscheinen.

Lfd. Nr.	Geographische Breite	Geographische Länge	Schiff u. Stat.-Nr.	Datum	Schnitt	Quelle (Nr. des Lit.-Verz. u. Seite)	Bemerkungen
1	2	3	4	5	6	7	8
26	24° 58′ N	30° 28′ W	D 37	19. VI. 1913	t, S	II	Bodenprobe in 5990 m.
27	24° 58′	33° 35′	D 14	21. VI. 1911	t, S	II	Als Ergänzung zu D 13 nur ab 3000 m verwendet.
28	24° 58′	30° 27′	D 13	19. VI. 1911	t, S	II	
29	24° 20′	24° 28′	C 5	21. II. 1873	t	XVI	Als Ergänzung zu C 8 nur ab 2000 m verwendet.
30	23° 12′	32° 56′	C 8	25. II. 1873	t	XVI	
31	20° 41′	31° 53′	Ga	13. X. 1903	t, S	V	
32	17° 14′	27° 21′	Pr 1134	20. VII. 1911	t, S	XVIII, S. 20	Lediglich 1700 m, Aräometerbestimmung.
33	16° 54′	27° 42′	Pr 1219	24. VIII. 1911	t, S	XVIII, S. 46	Lediglich 1642 m, Aräometerbestimmung.
34	13° 37′	26° 53′	Ju	12. VII. 1878	t		Annalen d. Hydr. 1880, S. 486.
35	13° 36′	22° 49′	C 95	10. VIII. 1878	t, S*)	XVI	Ab 1097 m verwendet. *) S für 1640 bis 2190 m Tiefe berechnet aus t unter Annahme normaler Dichte.
36	13° 16′	23° 30′	Pl 9	19. II. 1906	t, S	I, S. 22	Ab 800 m Tiefe sind Mittelwerte aus beiden Stationen für 30° W graphisch ermittelt.
37	7° 30′	39° 16′	D 22	10. VII. 1911	t, S	II	
38	6° 45′	33° 25′	D 24	14. VII. 1911	t, S	II	
39	5° 08′	28° 03′	D 25	17. VII. 1911	t, S	II	
40	4° 00′	26° 45′	G 163	18. III. 1876	t	XVII	
41	3° 27′	25° 59′	G 162	18. III. 1876	t	XVII	Als Ergänzung zu G 163 ab 700 m verwendet.
42	2° 40′	28° 07′	D 26	19. VII. 1911	t, S	II	
43	0° 09′	30° 18′	C 110	30. VIII. 1873	t	XVI	
44	0° 05′	29° 17′	Si	1891	t	XII	Bodentemp. in 2743 m.
45	1° 50′ S	30° 26′	D 27	22. VII. 1911	t, S	II	
46	2° 30′	29° 56′	St 65	18. II. 1911	t, S		
47	2° 40′	30° 15′	St 66	18. II. 1911	t, S		Als Ergänzung zu St 65 ab 400 m verwendet.
48	2° 49′	30° 44′	St 67	18. II. 1911	t, S		Als Ergänzung zu St 65 u. 66 ab 600 m verwendet.
49	3° 05′	31° 18′	St 68	18. II. 1911	t		Bodentemp. in 4535 m.
50	5° 08′	32° 19′	D 28	24. VIII. 1911	t, S	II	
51	5° 36′	33° 38′	St 85	20. II. 1911	t, S		
52	6° 55′	34° 08′	St 90	21. II. 1911	t, S		
53	7° 05′	34° 10′	St 92	21. II. 1911	t, S		
54	7° 43′	34° 01′	D 29	3. VIII. 1911	t, S		
55	8° 37′	30° 23′	Vi 6	2. VII. 1913	t, S	IV	Beobachtungen nur bis 200 m.
56	8° 42′	34° 19′	D 30		t	II	Bodentemp. in 2012 m.
57	9° 15′	34° 00′	D 31	5. VIII. 1911	t, S	II	Die Salzgehaltswerte in 770 u. 965 m sind offenbar vertauscht.
58	10° 11′	32° 21′	Vi 7	3. VII. 1913	t, S	IV	
59	12° 26′	33° 41′	D 32	7. VIII. 1911	t, S	II	
60	13° 45′	25° 41′	G 159	10. III. 1876	t	XVII	
61	15° 24′	34° 20′	D 33	9. VIII. 1911	t, S	II	
62	18° 17′	34° 09′	D 34	14. VIII. 1911	t, S	II	
63	20° 30′	29° 30′	Fr 53	VII.—VIII. 1911	t, S	VIII	Aus Vertikalschnitt bis 1000 m Tiefenlage der Isothermen u. Isohalinen interpoliert.
64	23° 03′	40° 24′	D 36	17. VIII. 1911	t, S	II	Nur ab 600 m Tiefe verwertet und mit Ga XIV gemittelt.
65	23° 33′	20° 51′	Ga XIV	VIII. 1901	t, S	III	Werte aus der Vertikalkurve der Station entnommen; vgl. laufende Nr. 64.
66	24° 37′	32° 15′	Se		t	XII	Bodentemp. in 0.7° (Quelle, 1888/89).
67	29° 35′	28° 09′	C 131	6. X. 1873	t, S	XVI	S-Werte aus Aräometerbestimmungen neu reduziert.
68	26° 34′	41° 16′	D 37	19. VIII. 1911	t, S	II	Nur die Werte für 2528 m Tiefe verwendet.
69	32° 00′	29° 00′	Fr 8	VII.—VIII. 1911	t, S	VIII	Aus Vertikalschnitt bis 1000 m Tiefenlage der Isothermen u. Isohalinen interpoliert.
70	34° 23′	35° 29′	R		t		Ann. d. Hydr. 1884, S. 513.
71	34° 26′	31° 52′	G 156	29. II. 1876	t, S*)	XVII	*) S-Werte für 1280—2195 m aus t unter Annahme normaler Dichte berechnet.

Lfd. Nr.	Geographische Breite	Länge	Schiff u. Stat.-Nr.	Datum	Schnitt	Quelle (Nr. des Lit.-Verz. u. Seite)	Bemerkungen
1	2	3	4	5	6	7	8
72	37° 47′ S	30° 20′ W	C 331	9. III. 1876	t, S	XVI	S-Werte aus Aräometerbestimmungen neu reduziert.
73	50° 44′	34° 02′	M	6. IX. 1882	t, S	XV	S-Werte nur angenähert, aus Aräometerbestimmungen berechnet.
74	52° 01′	35° 08′	M	6. IX. 1882	t, S	XV	Desgl.
75	54° 27′	31° 08′	D 52	11. XI. 1911	t, S	II	
76	55° 16′	28° 29′	D 51	11. XI. 1911	t, S	II	
77	57° 48′	33° 00′	D 54	14. XII. 1911	t, S	II	
78	60° 47′	30° 03′	D			II	Bodentemp. in 1862 m.
79	61° 02′	31° 44′	D 55	18. XII. 1911	t, S	II	
80	61° 53′	33° 24′	D			II	Bodentemp. in 4216 m.
74	63° 44′	35° 50′	D 74	27. XI. 1912	t, S	II	
75	63° 47′	28° 09′	D 56	6. I. 1912	t, S	II	
76	70° 02′	27° 26′	D 57	13. I. 1912	t, S	II	
77	71° 20′	26° 40′	D 58	16. I. 1912	t, S	II	
78	72° 20′	28° 34′	D 59	18. I. 1912	t, S	II	
79	73° 17′	29° 48′	D 60	27. I. 1912	t, S	II	
80	73° 34′	33° 35′	D 64	13. III. 1912	t, S	II	
81	73° 57′	30° 34′	D 63	6. III. 1912	t, S	II	
82	74° 16′	30° 43′	D		t, S	II	Nur Bodentemp. u. -S ‰ in 1499 m.
83	74° 32′	31° 11′	D		t, S	II	Nur Bodentemp. u. -S ‰ in 558 m.
84	75° 22′	31° 55′	D 61	29. I. 1912	t, S	II	
85	77° 40′	34° 54′	D 62 A u. B	A 31. I. 1912 B 13. II. 1912	t, S	II	

Abkürzungen der Expeditionsschiffsnamen (zu Spalte 4 der Liste des Quellenmaterials).

Ah	Armauer Hansen	Ga	Gauß	N	National	Sa	Michael Sars
C	Challenger	J	Ingolf	Pb	Portugiesische Bewachungsschiffe	Se	Seine
D	Deutschland	Ju	Jupiter	Pl	Planet	Si	Silvertown
Fr	Fram	M	Moltke	Pr	Princesse Alice	St	Stephan
G	Gazelle	Ma	Margrethe	R	Romanche	Vi	Viking

Literaturverzeichnis. (Zu Spalte 7 der Liste des Quellenmaterials.)

I. 1909. Brennecke, W. Ozeanographie. Forschungsreise S. M. S. »Planet« 1906 bis 1907. Band III. Berlin 1909.

II. 1921. Brennecke, W. Die ozeanographischen Arbeiten der Deutschen Antarktischen Expedition 1911—12. Aus dem Archiv der Deutschen Seewarte XXXIX, Nr. 1, S. 87—101. Hamburg 1921.

III. 1902. v. Drygalski, E. Die Deutsche Südpolarexpedition auf dem Schiff »Gauss«. Veröff. d. Inst. f. Meereskunde und des Geogr. Inst. Heft 1. Berlin 1902.

IV. 1916. Funder, Th. P. Hydrographic investigations from the Danish school ship »Viking« in the Southern Atlantic and Pacific in 1913/14. Meddelelser fra Komm. f. Havundersøgelser. Serie Hydrografi. Band II, Nr. 6. Kopenhagen 1916.

V. 1909. Gebbing, J. Chemische Untersuchungen von Meeresboden-, Meerwasser- und Luftproben der Deutschen Südpolarexpedition 1901—03, herausgegeben von Erich v. Drygalski. Band VII, Heft II. Berlin 1909.

VI. 1914. Helland-Hansen, B. Eine Untersuchungsfahrt im Atlantischen Ozean mit dem Motorschiff »Armauer Hansen« im Sommer 1913. Intern. Revue d. ges. Hydrobiologie und Hydrographie. Band VII, Nr. 1. Leipzig 1914.

VII. 1909. Helland-Hansen, B. and F. Nansen. The Norwegian Sea. Rep. on Norwegian Fishery and Marine Investigations. Vol. II, No. 2. Bergen 1909.

VIII. 1912. Helland-Hansen, B. und F. Nansen. Die im Jahre 1910 im nördlichen und im Jahre 1911 im südlichen Atlantischen Ozean mit dem »Fram« gemachten ozeanographischen Untersuchungen. XIII. Abschnitt in R. Amundsen, Die Eroberung des Südpols. München 1912.

IX. 1916. Jacobsen, J. P. Contribution to the hydrography of the Atlantic, Researches from the M/S. »Margrethe« 1913. Meddelelser fra Komm. f. Havundersøgelser. Serie Hydrografi. Band II. Kopenhagen 1916.

X. 1899. Knudsen, M. Hydrography. The Danish »Ingolf«-Expedition. Vol. 1, No. 2. Copenhagen 1899.

XI. 1893. Krümmel, O. Geophysikalische Beobachtungen der Plankton-Expedition. Ergebnisse der Plankton-Expedition der Humboldtstiftung. Band I. 1893.

XII. 1888/89. List of oceanic depths received at the Admiralty, etc. London 1888/89.

XIII. 1912. Murray, J. and H. Hjort. The depths of the ocean. London 1912.

XIV. 1913. Pettersson, O. Einige Bemerkungen zu G. Schotts: Geographie des Atlantischen Ozeans. Intern. Revue der ges. Hydrobiologie und Hydrographie. Band V. Leipzig 1913.

XV. 1882. Pirner. Aus den Reiseberichten S. M. S. »Moltke«. Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie X, S. 741. Berlin 1882.

XVI. 1884. Report on the Scientific Results of the Voyage of H. M. S. »Challenger« during the years 1873—1876. Physics and Chemistry. Vol. I. London 1884.

XVII. 1888. Die Forschungsreise S. M. S. »Gazelle« 1874/76. Herausgegeben von dem Hydrographischen Amt der Admiralität. Band II. Berlin 1888.

XVIII. 1905. Thoulet, J. Mémoires océanographiques (première série). Résultats des campagnes scientifiques accomplies sur son yacht par Albert I[er]. Fasc. XXIX. Monaco 1905.

Ausgegeben am 20. Januar 1926.

ntischen

36.50 36.00 35.50 35.00 35.00 34.00

35.50

>35.50

34.95

m

1000

2000

3000

4000

5000

6000

Azoren Plateau

· *beobachtete Werte*

+ *berechnete Werte*

30° 40° 50° 60° Nord 70°

Lithophot Akt.-Ges. C. L. Keller, Berlin S. 42.

Längsschnitt des Salzgehaltes auf 30° W durch den Atlantischen

34.00 34.50 35.00 36.00 37.00 36.50 36.00 35.50 35.00 36.00 36.50 37.00 36.50 36.00 35.50 35.00 35.00 34.00

34.60
34.50
34.20
35.50
>35.50
34.95
35.00
34.95
34.95
34.90
34.80
34.80
34.90
34.70
34.70
34.69
34.68
34.67

m 1000 2000 3000 4000 5000 6000

Süd-Antillen Bogen
Rio-Grande Rücken
Atlantische Schwelle
Azoren Plateau

· beobachtete Werte
+ berechnete Werte

80° Süd 70° 60° 50° 40° 30° 20° 10° 0° 10° 20° 30° 40° 50° 60° Nord 70°

Lithophot Akt.-Ges. C. L. Keller, Berlin S.42.

tischen

Taf. IV.

20.00 15.00 10.00 5.00

5.00 4.00 3.50 3.00

m 1000 2000 3000 4000 5000 6000

Azoren Plateau

30° 40° 50° 60° Nord 70°

Lithophot Akt. Ges. C. L. Keller, Berlin S.42.

Längsschnitt der Temperatur auf 30° W durch den Atlantischen

Süd-Antillen Bogen
Rio-Grande Rücken
Atlantische Schwelle
Azoren Plateau

m
1000
2000
3000
4000
5000
6000

80° Süd 70° 60° 50° 40° 30° 20° 10° 0° 10° 20° 30° 40° 50° 60° Nord 70°

Lithophot Akt. Ges. C. L. Keller, Berlin S. 42.

A. Merz: Die Deutsche Atlantische Expedition I.

Zeichenerklärung

—9°— *Isothermen*

400m
1000m
2000m
3000m
u.s.f.
Tiefenlinien

Temperatur-Verteilung in 400m Tiefe im Nordatlantischen

A. Merz: Die Deutsche Atlantische Expedition I.

Lithophot Akt.-Ges. C. L. Keller, Berlin S. 42

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1925

XXXII. Gesamtsitzung. 3. Dezember.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Roethe.

*1. Hr. Schlenk berichtete zusammenfassend über eine größere Experimentaluntersuchung, welche den Verlauf von Alkalimetalladditionen bei Kohlenstoff-Kohlenstoff-Doppelbindungen zum Gegenstand hatte.

In den Kreis der Betrachtungen wurden vom Vortragenden folgende Bindungssysteme gezogen: einfache Doppelbindungen, einfach konjugierte Doppelbindungen (in offenen Ketten und in Ringen), gekreuzt konjugierte Doppelbindungen (in offenen Ketten und in Ringen) und doppelt gekreuzt konjugierte Doppelbindungen. Die Ergebnisse der Untersuchung zeigten, daß die Verläufe der Metalladditionen von der aliphatischen bzw. aromatischen Natur der an die betreffende Doppelbindung geknüpften Kohlenwasserstoffreste sehr abhängig sind, daß aber die Reaktionsverläufe auch durch gegenseitige Beeinflussung mehrerer Doppelbindungen im Molekül bedingt sind.

2. Vorgelegt wurde der 41. Faszikel der mit Unterstützung der Akademie bearbeiteten Opuscula Ichneumonologica, hrsg. von Otto Schmiedeknecht (Blankenburg i. Thür. 1925) und die Festschrift anläßlich des 100jährigen Bestehens der Technischen Hochschule Fridericiana zu Karlsruhe (Karlsruhe 1925).

Statutenänderung.

Auf den Antrag der Preußischen Akademie der Wissenschaften hat das Preußische Staatsministerium durch Beschluß vom 26. November 1925 genehmigt, daß der letzte Satz des § 6 der Statuten der Akademie vom 28. März 1881 folgende Fassung erhält:

»Verlegt ein ordentliches Mitglied seinen Wohnsitz an einen Ort, der nicht zu der angegebenen Kategorie gehört, so geht es in die Zahl der auswärtigen Mitglieder über.«

Zugleich ist bestimmt worden, daß diese Statutenänderung auch auf die früheren ordentlichen Mitglieder der Akademie Anwendung findet, die jetzt als Ehrenmitglieder geführt werden.

Ausgegeben am 20. Januar 1925.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1925

XXXIII. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 10. Dezember.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Schottky sprach über die Drehungsbewegung des starren Körpers im vierdimensionalen Raum. (Ersch. später.)

Es wird versucht, die Aufgabe durch Rechnung, mit Hilfe von Sätzen über elliptische Funktionen, zu lösen.

2. Sodann legte Hr. Bieberbach eine Arbeit des Hrn. Dr. A. Hammerstein in Berlin vor: Über die Entwickelung eines logarithmisch unstetigen Kerns nach seinen Eigenfunktionen.

Die Konvergenz der Bilinearreihe $\sum \frac{\phi_\nu(x,y)\,\phi_\nu(\xi,\eta)}{\lambda_\nu}$ eines Kerns vom Charakter einer Greenschen Funktion steht nur in wenigen speziellen Fällen fest. Es wird folgendes Summationsverfahren angegeben: Man ersetze $\phi_\nu(\xi,\eta)$ durch seinen Integralwert, erstreckt über einen Kreis um ξ,η, dividiert durch dessen Inhalt. Die neu entstandene Reihe stellt den Kern außerhalb dieses Kreises dar und konvergiert absolut und gleichmäßig.

Diese Entwickelung wird eingehend untersucht und eine Anwendung davon gemacht.

Über die Entwickelung eines logarithmisch-unstetigen Kerns nach seinen Eigenfunktionen.

Von Dr. A. Hammerstein
in Berlin.

(Vorgelegt von Hrn. Bieberbach.)

Für die Greensche Funktion eines ebenen oder räumlichen Gebietes kann die Bilinearreihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\phi_\nu(x, y)\,\phi_\nu(\xi, \eta)}{\lambda_\nu}$, wo ϕ_ν die zugehörigen Eigenfunktionen, λ_ν die Eigenwerte bedeuten, nicht überall absolut und gleichmäßig konvergieren. In der vorliegenden Note wird für eine allgemeinere Klasse von logarithmisch unstetigen Kernen linearer Integralgleichungen durch »Mittelbildung« aus $\sum \frac{\phi_\nu(x, y)\,\phi_\nu(\xi, \eta)}{\lambda_\nu}$ eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe gewonnen, die den Kern K außerhalb einer beliebig klein wählbaren Umgebung des Aufpunktes darstellt. Das Verfahren besteht darin, daß man um einen inneren Punkt ξ, η als Mittelpunkt einen Kreis $\varkappa$ mit beliebig kleinem Radius ρ schlägt, und in der Bilinearreihe an Stelle der Funktionen $\phi_\nu(\xi, \eta)$ die Integrale $\frac{1}{\pi\rho^2}\iint_\varkappa \phi_\nu(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$ treten läßt. Die so modifizierte Entwickelung stimmt mit K außerhalb $\varkappa$ überein.

Ist der Kern positiv definit, so kann $\frac{1}{\pi\rho^2}\iint_\varkappa \phi_\nu(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$ durch $a_\nu\,\phi_\nu(\xi, \eta)$ ersetzt werden, wo die Größen a_ν universelle, d. h. zwar von ρ, nicht aber von der speziellen Wahl von K abhängige Konstante sind. Diese haben die Eigenschaft, bei festem ν mit gegen 0 abnehmendem ρ gegen 1 zu konvergieren; bei festem ρ dagegen sind sie mit wachsendem ν von der Größenordnung $\frac{1}{\lambda_\nu^{3/4}}$, woraus ihre konvergenzverbessernde Wirkung hervorgeht.

Zum Schluß wird, einem Gedanken von A. Kneser[1] folgend, eine Entwickelung einer Funktion mit längs gegebener Linien unstetigen Ableitungen nach den Eigenfunktionen der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ hergeleitet.

[1] Vgl. A. Kneser, Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik, 2. Aufl. § 45.

Satz 1: In einem Bereich B der x, y-Ebene, dessen Berandung aus einer stückweise stetig differentierbaren Kurve besteht, besitze der symmetrische Kern

$$K(x,y;\xi,\eta) = \frac{-1}{2\pi}\log r + L(x,y;\xi,\eta), \qquad (r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2})$$

wo $L(x,y;\xi,\eta)$ mit stetigen Ableitungen erster und zweiter Ordnung versehen ist, die Eigenwerte λ_ν und die zugehörigen orthogonalen normierten Eigenfunktionen $\phi_\nu(x,y)$ $(\nu = 1, 2, 3, \cdots)$.

Überdies gelte im ganzen Bereich $\Delta_{\xi\eta} K(x,y;\xi,\eta) = 0$.

Unter ρ werde eine beliebige positive Zahl verstanden. B_1 bezeichne den Bereich, der aus B durch Wegnahme aller Punkte, die vom Rande von B einen kleineren Abstand als ρ haben, entsteht[1]. ξ, η bedeute einen beliebigen Punkt von B_1. Um ihn als Mittelpunkt werde der Kreis $\varkappa$ mit dem Radius ρ geschlagen.

Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\phi_\nu(x,y)}{\lambda_\nu} \cdot \frac{1}{\pi\rho^2} \iint_{\varkappa} \phi_\nu(s,t)\,ds\,dt$$

absolut und gleichmäßig für alle x, y in B und alle ξ, η in B_1. Sie stellt den Kern $K(x,y;\xi,\eta)$ für alle x, y in B außerhalb des Kreises $\varkappa$ dar.

Satz 2: Tritt zu den in Satz 1 gemachten Voraussetzungen noch die weitere hinzu, daß der Kern positiv definit sei, und setzt man, unter J_1 die Besselsche Funktion verstanden,

$$a_\nu = \frac{2}{\rho\sqrt{\lambda_\nu}} J_1(\rho\sqrt{\lambda_\nu}),$$

so wird $\displaystyle\frac{1}{\pi\rho^2}\iint_{\varkappa} \phi_\nu(s,t)\,ds\,dt = a_\nu \phi_\nu(\xi,\eta)$.

Demnach ist für alle ξ, η in B_1, und alle x, y in B mit $\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} \geqq \rho$

$$K(x,y;\xi,\eta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \frac{\phi_\nu(x,y)\,\phi_\nu(\xi,\eta)}{\lambda_\nu},$$

wo die Reihe rechter Hand absolut und gleichmäßig für alle x, y in B, und alle ξ, η in B_1 konvergiert.

Beweis von Satz 1: Man wähle ρ so, daß B_1 nicht leer ist. ξ, η sei ein Punkt in B_1. Der Kreis $\varkappa$ der Behauptung gehört dann B ganz an. Für alle Wertepaare s, t in B werde eine Funktion $H_\rho(\xi,\eta;s,t)$ wie folgt erklärt:

$$H_\rho(\xi,\eta;s,t) = H(r) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\log\dfrac{r}{\rho} + \dfrac{r^2}{4\pi\rho^2} - \dfrac{1}{4\pi} & \text{für } r \leqq \rho, \\ 0 & \text{» } r \geqq \rho. \end{cases} \qquad (r = \sqrt{(s-\xi)^2+(t-\eta)^2})$$

[1] Damit der Satz etwas aussagt ist ρ freilich so klein zu wählen, daß B_1 nicht leer ist. B_1 kann auch durch einen ganz in B_1 enthaltenen Teilbereich ersetzt werden.

Dann ist, wie leicht zu sehen, $H(\rho) = 0$, $\dfrac{dH(\rho)}{dr} = 0$ und

$$(1) \qquad \Delta_{s,t} H(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\rho^2} \text{ für } r < \rho, \\ 0 \quad \text{» } r > \rho. \end{cases}$$

Die Anwendung der Greenschen Formel liefert in Rücksicht auf die Stetigkeit von $\dfrac{dH}{dr}$ längs der Berandung von $\varkappa$, sowie auf das Verschwinden von H und seiner Ableitung nach der Normalen längs des Randes von B, unter gehöriger Beachtung der logarithmischen Unstetigkeiten von K bzw. H in den Punkten x, y bzw. ξ, η

$$\iint_B [K(x, y; s, t)\Delta_{st} H(\xi, \eta; s, t) - H(\xi, \eta; s, t)\Delta_{st} K(x, y; s, t)]\, ds\, dt$$
$$= K(x, y; \xi, \eta) - H(\xi, \eta; x, y).$$

Zufolge von $\Delta_{st} K = 0$, und gemäß dem bekannten Entwickelungsatz aus der Theorie der Integralgleichungen erhält man hieraus

$$(2)\ K(x, y; \xi, \eta) - H(\xi, \eta; x, y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\phi_\nu(x, y)}{\lambda_\nu} \iint_B \Delta_{st} H(\xi, \eta; s, t)\, \phi_\nu(s, t)\, ds\, dt.$$

Der Rest der Reihe wird nach der Schwarzschen und Besselschen Ungleichung durch

$$\sum_{\nu=n}^{n+p} \left|\frac{\phi_\nu(x, y)}{\lambda_\nu}\right| \cdot \left|\iint_B \Delta_{st} H \cdot \phi_\nu\, ds\, dt\right| \leqq \left\{\sum_{\nu=n}^{n+p} \left(\frac{\phi_\nu(x, y)}{\lambda_\nu}\right)^2 \cdot \iint_B (\Delta_{st} H)^2\, ds\, dt\right\}^{\frac{1}{2}}$$

abgeschätzt. Da gemäß (1) $\displaystyle\iint_B (\Delta_{st} H)^2\, ds\, dt = \frac{1}{\pi\rho^2}$ ist, zieht die gleichmäßige Konvergenz von $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\phi_\nu(x, y)}{\lambda_\nu}\right)^2$ in x, y die der ursprünglichen Reihe in dem behaupteten Sinne nach sich. Beachtet man endlich

$$\iint_B \Delta_{st} H(\xi, \eta; s, t)\, \phi_\nu(s, t)\, ds\, dt = \frac{1}{\pi\rho^2} \iint_\varkappa \phi_\nu(s, t)\, ds\, dt,$$

und das Verschwinden von H außerhalb von $\varkappa$, so ist durch (2) Satz 1 bewiesen.

Der Ausgangspunkt zum Beweise von Satz 2 ist die Integralgleichung

$$\phi_\nu(\xi, \eta) = \frac{-\lambda_\nu}{2\pi} \iint_B \log r\, \phi_\nu(s, t)\, ds\, dt + \lambda_\nu \iint_B L(\xi, \eta; s, t)\, \phi_\nu(s, t)\, ds\, dt. \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

Bildet man auf beiden Seiten die Δ-Ableitung, so ergibt sich wegen $\Delta_{\xi\eta} L = 0$ in bekannter Weise

$$\Delta \phi_\nu(\xi, \eta) + \lambda_\nu \phi_\nu(\xi, \eta) = 0.$$

Auf Grund des positiv definiten Charakters des Kerns fällt λ_ν für jedes ν größer als Null aus. Deshalb kann mit beliebigem positivem $R < \rho$ der WEBERsche Mittelwertsatz angewandt werden[1]; dieser ergibt, wenn $\tilde{\phi}_\nu(R, \vartheta)$ die aus ϕ_ν durch Einführung von Polarkoordinaten R, ϑ um ξ, η als Anfangspunkt entstehende Funktion bezeichnet, und unter J_0 die BESSELsche Funktion verstanden wird:

$$\phi_\nu(\xi, \eta) J_0(\sqrt{\lambda_\nu} \cdot R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{\phi}_\nu(R, \vartheta)\, d\vartheta.$$

Hieraus folgt

$$\phi_\nu(\xi, \eta) \int_0^{\rho} J_0(\sqrt{\lambda_\nu} \cdot R)\, R\, dR = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\rho}\int_0^{2\pi} \tilde{\phi}_\nu(R, \vartheta)\, R\, d\vartheta\, dR.$$

Geht man auf der rechten Seite wieder zu rechtwinkligen Koordinaten über, und macht in dem Integral auf der linken die Substitution $\sqrt{\lambda_\nu} \cdot R = z$, so liefert dies

$$\phi_\nu(\xi, \eta) \frac{2\pi}{\lambda_\nu} \int_0^{\rho\sqrt{\lambda_\nu}} J_0(z)\, z\, dz = \iint_{\varkappa} \phi_\nu(s, t)\, ds\, dt.$$

Gemäß der Relation[2] $z J_0(z) = \frac{d}{dz}(z J_1(z))$ folgt:

$$\iint_{\varkappa} \phi_\nu(s, t)\, ds\, dt = \phi_\nu(\xi, \eta) \frac{2\pi\rho}{\sqrt{\lambda_\nu}} J_1(\rho \cdot \sqrt{\lambda_\nu}),$$

$$\frac{1}{\pi\rho^2} \iint_{\varkappa} \phi_\nu(s, t)\, ds\, dt = \phi_\nu(\xi, \eta) \frac{2}{\rho\sqrt{\lambda_\nu}} J_1(\rho \cdot \sqrt{\lambda_\nu}) = a_\nu \phi_\nu(\xi, \eta), \text{ w. z. b. w.}$$

Die eingangs erwähnten Eigenschaften von a_ν ergeben sich unmittelbar aus dem Verhalten von $J_1(z)$ in der Umgebung des Nullpunktes und für große Werte des Arguments.

Anwendung: Für den Kern mögen die Voraussetzungen von Satz 1 oder Satz 2 gelten. In dem Bereich B der x, y-Ebene sei eine Kurve C in

[1] Über die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0$. (Math. Annalen Bd. I, S. 1.)

[2] Z. B. G. N. WATSON, A treatise on the Theory of BESSEL Functions S. 18.

Parameterdarstellung $\xi = \xi(l)$, $\eta = \eta(l)$ (l Bogenlänge auf C) gegeben, die eine sich stetig drehende Tangente besitze. C kann geschlossen sein, oder zwei Randpunkte von B verbinden. $f(l)$ bezeichne eine auf C stetige Funktion, welche falls C im Rande endet, daselbst verschwindet. Die im Bereich B erklärte Funktion von x und y

$$(3) \qquad \Phi(x, y) = \int_C K(x, y; \xi(l), \eta(l)) f(l)\, dl$$

$$= \frac{-1}{2\pi} \int_C \log r f(l)\, dl + \int_C L \cdot f dl$$

besitzt dann die Eigenschaft des logarithmischen Potentials einer einfach belegten Linie, d. h. die Ableitung von Φ nach der Normalen auf C springt beim Durchgang durch C um $-f(x, y)$.

Hat die Kurve C keinen Punkt mit dem Rande von B gemeinsam, so bette man sie in einen Streifen der Breite 2ρ mit C als Mittellinie ein, wobei ρ so klein zu wählen ist, daß dieser Streifen vom Rande von B durchweg einen kleineren Abstand als ρ hat. Macht man ihn nun zum Bereich B_1 von Satz 1 (Anmerkung) bzw. 2, so kann die Entwickelung von K für alle x, y außerhalb B_1 in (3) eingesetzt werden, die sodann gliedweise integrierbar ist. Man erhält somit $\Phi(x, y)$ für alle x, y, die nicht im Streifen liegen, durch eine gleichmäßig und absolut konvergente, nach Eigenfunktionen fortschreitende Reihe dargestellt. Endigt dagegen C im Rande, so hat man von B diejenigen Punkte wegzunehmen, welche von der Berandung einen kleineren Abstand als ρ besitzen, und überdies C durch den Streifen der Breite 2ρ auszuschneiden. Wird jetzt der dieserart beschnittene Bereich B als B_1 aufgefaßt, so erhält man analog dem vorigen Fall eine in B_1 gleichmäßig und absolut konvergente Reihe für Φ, wo bei der Anwendung von Satz 1 bzw. 2 zu beachten ist, daß der Punkt x, y seine Rolle mit ξ, η vertauscht.

Ist nun in B eine zweimal derart stückweise stetig differentierbare Funktion $F(x, y)$ gegeben, daß die Normalableitung längs der sich nicht schneidenden Kurven $C_1, C_2, \cdots C_m$ mit sich stetig drehenden Tangenten die Sprünge $f_1(l), f_2(l), \cdots f_m(l)$ aufweist, so kann bei irgend einer der üblichen Randbedingungen eine Entwickelung nach Eigenfunktionen der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ angegeben werden, die $F(x, y)$ für hinreichend kleines ρ außerhalb von Streifen der Breite 2ρ um die Kurven C darstellt, falls diese keinen Punkt mit dem Rand von B gemeinsam haben. Im anderen Fall ist noch ein Streifen der Breite ρ am Rande auszunehmen. In den fraglichen Bereichen konvergiert die Reihe absolut und gleichmäßig.

Es ist nämlich, unter K die zu den Randbedingungen gehörige Greensche Funktion verstanden,

$$F(x, y) + \sum_{\nu=1}^{m} \int_C K \cdot f_\nu\, dl$$

eine den Randbedingungen genügende Funktion mit durchweg stetigen ersten Ableitungen, die also entwickelt werden kann. Setzt man für $\int_C K \cdot f_\nu \, dl$ die nach dem Vorangehenden möglichen Reihen ein, so folgt die Behauptung unmittelbar.

Analoge Sätze gelten in drei Dimensionen. Die Beweise hierfür sowie Untersuchungen über die Bilinearreihe unter allgemeineren Voraussetzungen über den Kern erscheinen in der mathematischen Zeitschrift, eine Anwendung des Summationsverfahrens zur Approximation stetiger Funktionen durch beliebige Orthogonalsysteme in den Sitzungsberichten der Berliner mathematischen Gesellschaft.

Ausgegeben am 20. Januar 1926.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1925

XXXIV. Gesamtsitzung. 17. Dezember.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Roethe.

1. Hr. Norden sprach über die bei Varro erhaltene Auguralformel und das carmen Arvale.

Beide Urkunden, insbesondere die erstere, wurden im wesentlichen nach der sprachlichen Seite erläutert, und es wurde der Versuch gemacht, einige bisher ungedeutete Worte zu erklären: so *ollaber*, *ollaner* in der Formel, *berber* in dem Liede.

4. Hr. Heinrich Maier legte, gemeinsam mit Hrn. Bieberbach, eine Abhandlung des Hrn. Dietrich Mahnke in Greifswald vor: Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis. (Abh.)

An Hand der Leibnizschen noch ungedruckten Originalhandschriften werden die mit dem Prioritätsstreit zwischen Leibniz und Newton zusammenhängenden Fragen untersucht. Dabei erweisen sich die von Leibniz selbst über den Ursprung und die Entstehung seiner Entdeckung gemachten Angaben als zutreffend. Darüber hinaus gelingt eine detaillierte Darstellung der Entstehungsgeschichte der Differential- und Integralrechnung, und es fällt auch Licht auf das Werden mancher anderer Begriffsbildung, wie z. B. auch des Begriffs und der Benennung »Funktion«.

3. Hr. von Wilamowitz-Moellendorff überreichte den I. Band seiner »Reden und Vorträge« (Berlin 1925).

4. Hr. Wilcken legte den Vol. II pars 6 fasc. I des Corpus inscriptionum Latinarum vor.

5. Vorgelegt wurde die 8. Lieferung des 1. Bandes des Rheinischen Wörterbuchs (Bonn und Leipzig 1925); ferner The correspondence of William Hickling Prescott 1833—1847, transcribed and edited by Roger Walcott (Cambridge i. Mass. 1925); und die Festschrift zur 150-Jahr-Feier der Preußischen Bergakademie zu Clausthal 1775—1925 (1925).

6. Das korrespondierende Mitglied der physikalisch-mathematischen Klasse Hr. Hendrik Antoon Lorentz in Leiden hat am 11. Dezember, das korrespondierende Mitglied der philosophisch-historischen Klasse Hr. Jakob Wackernagel in Basel am 14. Dezember das fünfzigjährige Doktorjubiläum gefeiert. Die Akademie hat den Jubilaren Adressen gewidmet, welche in diesem Stück abgedruckt sind.

7. Die Akademie hat zu wissenschaftlichen Zwecken folgende Beträge bewilligt:

Aus ihren Gesamtmitteln:

4200 ℛℳ als Druckzuschuß zu der Veröffentlichung des III. Bandes der kurdisch-persischen Forschungen des verstorbenen Dr. Oskar Mann;

aus Mitteln der physikalisch-mathematischen Klasse:

4000 ℛℳ als einmaligen Zuschuß zu den gesteigerten Herstellungskosten des IV. Bandes der Geschichte des Fixsternhimmels,

1200 ℛℳ als Druckzuschuß für das 4. Heft des Archivs für Erdmagnetismus, zahlbar an Prof. Dr. Adolf Schmidt in Potsdam,

750 ℛℳ für das Studium der Floren des Rotliegenden, zahlbar an Hrn. Dr. Lipps, Berlin;

aus Mitteln der philosophisch-historischen Klasse:

2400 ℛℳ für die Herausgabe des Grimm-Lachmannschen Briefwechsels.

Das Preußische Staatsministerium hat durch Erlaß vom 5. Dezember d. J. die Wahl des Präsidenten des Telegraphentechnischen Reichsamts, Prof. Dr. Karl Willy Wagner, zum ordentlichen Mitglied der physikalisch-mathematischen Klasse bestätigt.

Durch den gleichen Erlaß hat das Preußische Staatsministerium die Wahl des bisherigen korrespondierenden Mitglieds der philosophisch-historischen Klasse Prof. Dr. Karl von Amira in München zum auswärtigen Mitglied derselben Klasse bestätigt.

Das Preußische Staatsministerium hat durch Erlaß vom 9. Dezember d. J. die Wahl des ehemaligen Generaldirektors der Staatlichen Museen in Berlin, Wirklichen Geheimen Rats Dr. Wilhelm von Bode, zum Ehrenmitglied der Akademie bestätigt.

Die Akademie hat in ihrer Sitzung vom 17. Dezember 1925 den ordentlichen Professor der klassischen Archäologie an der Universität Bonn, Hrn. Dr. Franz Winter, zum korrespondierenden Mitglied ihrer philosophisch-historischen Klasse gewählt.

Auf Grund der Statutenänderung vom 26. November d. J. ist das bisherige Ehrenmitglied der Akademie Hr. Max Lenz in die Reihe der ordentlichen Mitglieder der philosophisch-historischen Klasse übergetreten; die bisherigen Ehrenmitglieder HH. Max Lehmann in Göttingen, Andreas Heusler in Basel, Heinrich Wölfflin in Zürich und Hans Dragendorff in Freiburg i. Baden sind unter die auswärtigen Mitglieder der philosophisch-historischen Klasse, die HH. Wilhelm Branca in München, Richard Willstätter in München und Constantin Carathéodory in München unter die auswärtigen Mitglieder der physikalisch-mathematischen Klasse eingereiht worden.

Adresse an Hrn. Hendrik Antoon Lorentz zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 11. Dezember 1925.

Hochgeehrter Herr Kollege!

Die Preußische Akademie der Wissenschaften bringt Ihnen als ihrem korrespondierenden Mitgliede und als einem der am meisten begnadeten Forscher der Gegenwart ihre herzlichen Glückwünsche dar. Ihr Einfluß auf die Entwicklung der Physik ist ein derart entscheidender gewesen, daß niemand sagen kann, wann die Wissenschaft den Einfluß der Materie und ihrer Bewegungen auf die elektromagnetischen und optischen Vorgänge ohne Ihre Forschungen richtig erkannt hätte. Indem Sie Maxwells Lebenswerk in konsequenter Weise fortsetzten, haben Sie nicht nur die Beziehungen der Materie zum elektromagnetischen Felde aufgeklärt, sondern damit der Relativitätstheorie und der elektrischen Theorie der Materie die Basis geliefert. Ihr Werk ist von so bewunderungswürdiger Geschlossenheit, daß man seine axiomatische Basis in einem einzigen Satz zusammenfassen kann: Die Maxwellschen Gleichungen des leeren Raumes gelten überall, und die Materie wirkt elektromagnetisch einzig dadurch, daß ihre kleinsten Teilchen Träger elektrischer Ladungen sind. Auf diese Voraussetzung sich stützend, haben Sie eine fast unübersehbare Fülle von Folgerungen abgeleitet, die durch die Erfahrung bestätigt wurden.

Seit etwa 20 Jahren wissen wir, daß Ihr großartiges elektrodynamisches System keine letzte Wahrheit bedeutet, daß es diejenigen Züge der Wirklichkeit nicht umfaßt, welche wir mit dem Namen Quantentheorie zusammenfassen. Aber noch immer dient die Maxwell-Lorentzsche Theorie den tastenden Versuchen unserer Zeit, der Natur der Elementarvorgänge näherzukommen, als wichtigstes Hilfsmittel. Sie selbst haben bei dieser neueren Entwicklung durch den klaren und allgemeinen Nachweis des Versagens der sogenannten klassischen Theorie sowie durch Ableitung wichtiger Einzelresultate entscheidend mitgewirkt; Sie gaben sich stets den Einzelproblemen mit ebensoviel Interesse hin wie den prinzipiellen Fragen. Es gibt kaum ein Spezialgebiet der physikalischen Wissenschaft, das Sie nicht durch gelegentliche Untersuchungen gefördert haben.

Mögen sie noch lange Jahre schaffen und wirken, sich zur Freude, der Wissenschaft zum Nutzen, der Mitwelt zum Segen.

Die Preußische Akademie der Wissenschaften.

Adresse an Hrn. Jakob Wackernagel zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 14. Dezember 1925.

Hochgeehrter Herr Kollege!

Auf ein halbes Jahrhundert wissenschaftlicher Arbeit von seltenem Reichtum des Ertrages und der Wirkung dürfen Sie an dem heutigen Tage, zu dem auch die Preußische Akademie der Wissenschaften Ihnen ihre herzlichen Glückwünsche darbringt, mit Stolz zurückschauen. Das kennzeichnende Merkmal dieser Arbeit ist die innige Verbindung, die in ihr Forscher und Lehrer eingegangen sind. Denn ihre Bedeutung erschöpft sich keineswegs in der abgeschlossenen Summe gesicherter Ergebnisse, die sie dem Erkenntnisbesitze der Sprachwissenschaft hinzugewonnen hat, sondern erneut sich dauernd als erzieherische Kraft in der vorbildlichen Sicherheit, mit der Sie jede Untersuchung ihrem Ziele entgegenzuführen verstanden haben. Die durch ihre Einfachheit überraschende und überzeugende Deutung, durch die Sie schon in Ihren Anfängen das Wesen des griechischen Verbalakzents geschichtlichem Verständnisse erschlossen, war das vielversprechende Probestück dieser fast im ersten Anlauf erreichten Meisterschaft, die Ihren Untersuchungen in der sprachwissenschaftlichen Literatur aller Zeiten einen Ehrenplatz sichert. Zugleich traten Sie durch diese befreiende Lösung eines alten Rätsels der Sprachgeschichte ein in den erlesenen Kreis jener Forscher, deren fast gleichzeitige Entdeckungen die indogermanische Sprachwissenschaft in den siebziger Jahren von Grund auf neugestaltet haben. Die Generation von heute verehrt in Ihnen dankbar einen der wenigen Überlebenden aus jener reichen und fruchtbaren Epoche, der es beschieden war, aus dem Streite der Geister und der Temperamente eine Fülle neuer Einsichten zu gebären. Doch haben Sie selbst die Impulse Ihrer weiteren Arbeit nicht aus diesem Kampfe empfangen, sondern sie in stolzer Unabhängigkeit von Schulmeinungen und Tagesströmungen stets dem Gesetze Ihrer eigenen Natur entnommen. In lebenslangem, vertrautem Umgange mit allen ältesten Literaturdenkmälern unseres Sprachstammes haben Sie die glückliche Gabe sprachgeschichtlicher Beobachtung zu solcher Vollkommenheit ausgebildet, daß Ihrem geschärften Ohre aus Homer und Plautus, aus den Hymnen des Rigveda und aus den Gathas des Zarathustra das Echo längst verstummter Indogermanenrede bis in alle Feinheiten vernehmlich entgegenzutönen scheint.

Ihre Forschung hat unter grundsätzlicher Vermeidung jeder Einseitigkeit immer die Sprache als Ganzes ins Auge gefaßt. Der geheimnisvollen Gesetzmäßigkeit, die auch das flüchtigste Element der Rede, den Akzent, regiert,

sind Sie mit besonderer Liebe und glücklichem Spürsinn immer von neuem nachgegangen. Um die Geschichte der griechischen wie der indischen Laute haben Sie sich durch aufschlußreiche Einzelstudien oder zusammenfassende Darstellung vielseitige Verdienste erworben. Die Vorgänge der indogermanischen Wortbildung sind von Ihnen aus den verschiedensten Anlässen zum Gegenstand eindringlicher Untersuchungen und neuer Fragestellungen gemacht worden, mit dem Erfolge, daß sich nicht nur unsere Kenntnis der Zusammenhänge nach allen Seiten geweitet und vertieft, sondern auch das Maß unserer methodischen Forderungen erhöht hat. Das Werden und Vergehen von Wörtern und Wortformen im Wandel der Jahrhunderte zu verfolgen, bot Ihnen mehr als einmal die griechische Sprachgeschichte, zu deren hervorragendsten Kennern Sie zählen, willkommenen Anlaß. Die jahrtausendelange Nachwirkung uralter Wortstellungsgewohnheiten vermochten Sie in den Einzelsprachen mit einer Strenge der Methode und einer Sicherheit des Ergebnisses aufzuzeigen, die auch den Kenner überraschte. Und als vorläufig letzte Gabe danken wir Ihnen die prächtige Doppelreihe syntaktischer Vorlesungen, in denen sich die Einheit des Forschers und Lehrers in reinster Ausprägung und stärkster Wirkung darstellt. Eine dritte Reihe ist angekündigt; die verheißungsvoll begonnene Altindische Grammatik harrt des Abschlusses durch eine Darstellung der Wort- und Formenbildung, für die niemand gerüstet ist und jemals war wie Sie: Möge ein gütiges Geschick Ihnen und uns das Glück der Vollendung bescheren!

Das ist der Wunsch
der Preußischen Akademie der Wissenschaften.

Ausgegeben am 20. Januar 1926.

NAMEN- UND SACHREGISTER.

Berichtigung.

S. CVIII Zeile 13 (v. oben) lies »Oberstleutnant« statt »Oberleutant«.

Ausgegeben am 20. Januar 1926.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

LRed 27

§ 17.

Eine für die akademischen Schriften bestimmte wissenschaftliche Mitteilung darf in keinem Falle vor ihrer Ausgabe an jener Stelle anderweitig, sei es auch nur auszugsweise oder auch in weiterer Ausführung, in deutscher Sprache veröffentlicht sein oder werden. Sollte eine dem zuwiderlaufende Veröffentlichung dem redigierenden Sekretar vor der Ausgabe in den akademischen Schriften zur Kenntnis kommen, so hat er die Mitteilung aus diesen zu entfernen.

Wenn der Verfasser einer aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilung dieselbe anderweitig früher zu veröffentlichen beabsichtigt, als ihm dies nach den geltenden Rechtsregeln zusteht, so bedarf er dazu der Einwilligung der Gesamtakademie.

Gedächtnisreden anderweitig zu veröffentlichen, ist den Verfassern unbeschränkt gestattet.

Aus § 21.

Die Sitzungsberichte erscheinen in einzelnen Stücken in der Regel Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung.

Aus § 22.

Jeden Sitzungsbericht eröffnet eine Übersicht über die in der Sitzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mitteilungen und über die zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen Angelegenheiten.

Hinter den Titeln der wissenschaftlichen Mitteilungen folgen in dieser Übersicht kurze Inhaltsangaben derselben, welche die Verfasser einreichen, und für welche sie verantwortlich sind. Diese Inhaltsangaben sollen sich in der Regel auf 5—6 Druckzeilen beschränken, keinesfalls 10 Zeilen überschreiten.

Die nicht in den Schriften der Akademie erscheinenden Mitteilungen werden mit vorgesetztem Stern bezeichnet, bei den für die Abhandlungen bestimmten wird »(Abh.)« zugefügt.

Wissenschaftliche Mitteilungen fremder Verfasser werden in dem Bericht über diejenige Sitzung aufgeführt, in welcher deren Aufnahme in die akademischen Schriften endgültig beschlossen wird.

Aus § 27.

Das Manuskript einer in einer akademischen Sitzung am Donnerstag zur Aufnahme in die Sitzungsberichte zugelassenen Mitteilung, welche am nächsten Donnerstag gedruckt erscheinen soll, muß der Regel nach in der Sitzung selber, spätestens bis Freitag 10 Uhr morgens, dem redigierenden Sekretar oder der Reichsdruckerei druckfertig zugestellt werden. Später eingereichte Manuskripte werden, mit dem Präsentationsvermerk des redigierenden Sekretars oder des Archivars versehen, für ein späteres Stück zurückgelegt.

Dasselbe kann von vornherein mit Mitteilungen geschehen, deren Satz aus irgendwelchen Gründen besondere Schwierigkeiten erwarten läßt, oder welche den in den §§ 3 und 4 enthaltenen Bestimmungen nicht entsprechen.

Die Reichsdruckerei sendet die Korrekturen an das Bureau der Akademie, das sie an die Verfasser oder an die Mitglieder, welche die Mitteilung vorgelegt haben, weiterreicht. Die Verfasser schicken die Korrekturabzüge nach Berichtigung an das Bureau der Akademie zurück und erhalten und erledigen auf dem gleichen Wege auch die etwa erforderlichen weiteren Korrekturen. Wird die Korrektur länger als bis Dienstag Abend von der damit betrauten Person behalten, so hat diese es zu verantworten, wenn die Mitteilung in einem späteren Stück erscheint.

Nach auswärts werden Korrekturen nur auf Verlangen versandt; die Verfasser verzichten damit auf Erscheinen ihrer Mitteilung nach acht Tagen. Fremden Verfassern, deren Korrekturen erst noch dem vorlegenden Mitgliede zur Revision unterbreitet werden müssen, kann das Erscheinen am nächsten Ausgabetage überhaupt nicht zugesichert werden.

Aus § 36.

Die Akademie behält sich das Recht vor, von einer vergriffenen Abhandlung eine zweite Auflage zu veranstalten.

Abhandlungen der Akademie

Physikalisch-mathematische Klasse

Jahrgang 1922 . . . . *RM* 5.75
» 1923 . . . . » 1.50
» 1924 . . . . » 11.—

Einzelne Abhandlungen aus den Jahren 1918—1924

F. K. Ginzel: Beiträge zur Kenntnis der historischen Sonnenfinsternisse und zur Frage ihrer Verwendbarkeit (1918, 4) . . . . *RM* 3.—
Haberlandt: Gedächtnisrede auf Simon Schwendener (1919) . . . . » 0.75
Hellmann: Beiträge zur Erfindungsgeschichte meteorologischer Instrumente (1920, 1) . . . . . » 2.50
Penck: Die Höttinger Breccie und die Inntalterrasse nördlich Innsbruck (1920, 2) . . . . . . » 17.50
Hellmann: Die Meteorologie in den deutschen Flugschriften und Flugblättern des XVI. Jahrhunderts. Ein Beitrag zur Geschichte der Meteorologie (1921, 1) . . . . » 5.—
Fick: Über die Entstehung der Gelenkformen. Mit Tierversuchen (1921, 2) . . . . » 2.—
Rubner: Über die Wasserbindung in Kolloiden mit besonderer Berücksichtigung des quergestreiften Muskels (1922, 1) . . . . » 4.—
Hellmann: Versuch einer Geschichte der Wettervorhersage im XVI. Jahrhundert (1924, 1) . . . » 3.—
K. Bopp: Leonhard Eulers und Johann Heinrich Lamberts Briefwechsel (1924, 2) . . . . . . » 4.—
Fick: Einiges über Vererbungsfragen (1924, 3) . . . . » 2.50

Die Preise verstehen sich in Reichsmark.

Sitzungsberichte der Akademie

Physikalisch-mathematische Klasse

Preis des Jahrgangs . . . . ℛℳ 20.—

Sonderabdrucke. I. Halbjahr 1925

Planck: Zur Frage der Quantelung einatomiger Gase . . . . ℛℳ 1.—
F. Bernstein: Beiträge zur Mendelistischen Anthropologie. I . . . . » 1.—
F. Bernstein: Beiträge zur Mendelistischen Anthropologie. II . . . . » 1.—
Ludendorff: Spektralphotometrische Untersuchungen über die Sonnenkorona . . . . » 2.—
W. Kolhörster: Weitere Messungen der durchdringenden Strahlung am Jungfraujoch (hierzu Taf. I) » 1.—
Rubner: Unser Brotgetreide in physiologischer und volkswirtschaftlicher Hinsicht . . . . . . » 1.—
Sommerfeld und H. Hönl: Über die Intensität der Multiplett-Linien . . . . » 2.—
Fick: Anatomische Untersuchungen an einigen der Teneriffaschimpansen namentlich über die Gewichts- und Querschnittverhältnisse der Muskeln . . . . » 2.50
Hellmann: Grenzwerte der Klimaelemente auf der Erde . . . . » 1.—
Penck: Der postglaziale Vulkan von Köfels im Ötztale . . . . » 1.—
Correns: Untersuchungen über polygame Blütenpflanzen. I. *Silene Roemeri* Friv. . . . . . . » 2.—
Schottky: Über die Harmonie des Thetasystems. Zweite Mitteilung . . . . » 2.—
Schottky: Über die Harmonie des Thetasystems. Dritte Mitteilung . . . . » 1.—
Hellmann: Die Verbreitung der Hydrometeore auf der Erde . . . . » 1.—
Penck: Glazialgeologische Beobachtungen in den bayerischen Hochalpen . . . . }
Penck: Alte Breccien und junge Krustenbewegungen in den bayerischen Hochalpen . . . . } » 2.50
Penck: Die Eiszeit in den bayerischen Hochalpen . . . . }
Zimmermann: Der Begriff der Knickgrenze . . . . » 1.—
Bieberbach: Über die Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie im 19. Jahrhundert . . . . » 2.—
W. Noddack, I. Tacke und O. Berg: Zwei neue Elemente der Mangangruppe (hierzu Taf. II) » 1.—

Sonderabdrucke. II. Halbjahr 1925

Einstein: Einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität . . . . ℛℳ 1.—
R. Ladenburg und H. Kopfermann: Die anomale elektrische Doppelbrechung des Natriumdampfes » 1.—
H. Zocher und K. Coper: Über die Erzeugung optischer Aktivität an Silber durch zirkular polarisiertes Licht . . . . » 1.—
E. Schrödinger: Bemerkungen über die statistische Entropiedefinition beim idealen Gas . . . » 1.—
Planck: Über die statistische Entropiedefinition . . . . » 1.—
Schur: Einige Bemerkungen zur Determinantentheorie . . . . » 1.—
C. Müller: Über sehr dünne, durchsichtige Metallfolien . . . . » 1.—
A. Ostrowski: Über den Schottkyschen Satz und die Borelschen Ungleichungen . . . . . . » 1.—
Schmidt: Über das Extremum der Bogenlänge einer Raumkurve bei vorgeschriebenen Einschränkungen ihrer Krümmung . . . . » 1.—
Zimmermann: Der Begriff der Knickgrenze. II . . . . » 1.—
Fick: Über die Muskelfaserlänge des Armmuskels (m. brachialis) und seiner Abart (Speichenansatz) » 1.—
H. v. Ficker: Temperaturgradienten bei Föhn . . . . » 1.—
Hellmann: Über die Wetterlage bei guter Fernsicht von Bergeshöhen . . . . » 1.—
Hellmann: Wasserhosen auf dem Atlantischen Ozean . . . . » 1.—
Schur u. G. Szegö: Über die Abschnitte einer im Einheitskreise beschränkten Potenzreihe . . . » 1.—
A. Merz: Die Deutsche Atlantische Expedition auf dem Vermessungs- und Forschungsschiff »Meteor« (hierzu Taf. III—V) . . . . » 2.—
A. Hammerstein: Über die Entwickelung eines logarithmisch-unstetigen Kerns nach seinen Eigenfunktionen . . . . » 1.—

Die Preise verstehen sich in Reichsmark.

SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES
3 9088 01298 9927